

Reinhard Weiß

Einstieg in die Funktionentheorie

Vorwort

Dieses Skript richtet sich an Physikstudenten, bei denen die Funktionentheorie in den Mathematikvorlesungen zu kurz gekommen ist. In den Tutorien der Elektrodynamik oder der Quantenmechanik benötigt man nämlich gelegentlich die Methoden der Funktionentheorie bei der Lösung von Integralen.

Weil meine Vorlesungsmitschrift der Funktionentheorie unbrauchbar war, musste ich die mir wichtig erscheinenden Inhalte aus Lehrbüchern und aus im Internet veröffentlichten Vorlesungsskripten zusammengetragen. Besonders hervorzuheben sind dabei

- Manfred Dobrowolski, Einführung in die Funktionentheorie, Vorlesungsskript Universität Würzburg 2016,
www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~dobro/fu/b.pdf
- Andreas Gathmann, Einführung in die Funktionentheorie, Vorlesungsskript TU Kaiserslautern 2016/2017,
www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/futheo-2016/futheo-2016.pdf
- Michael Stoll, Vertiefung der Funktionentheorie, Vorlesungsskript Universität Bayreuth 2009/2010,
www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/teaching/VertFunktionentheorie/Skript-VertFunktionentheorie.pdf
- Jens Struckmeier, Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften, Vorlesungsskript TU Hamburg-Harburg 2012,
www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/kf/12/vorlesungen/vorlesung-kf.pdf
- Christian B. Lang und Norbert Pucker, Mathematische Methoden in der Physik, Hochschultaschenbuch, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1988
- Wolfgang Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 3, Springer-Lehrbuch Elektrodynamik, 7. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004
- Helmut Fischer und Helmut Kaul, Mathematik für Physiker, Band 1 Grundkurs, 4. Auflage, Teubner-Verlag, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2001

Das Ziel meiner Darstellungsweise ist nicht mathematische Strenge und Ausführlichkeit, sondern schnelles Verstehen durch Anschaulichkeit, weshalb dieses Skript bei Mathematikern möglicherweise Stirnrunzeln hervorruft. Außerdem kann ich keine Fehlerfreiheit garantieren, weil Korrekturleser nur schwer zu finden sind. Und schließlich bedenke man, dass es hier nur um einen Einstieg in die Funktionentheorie geht, dass also nicht alle Themen der Funktionentheorie und nur ein kleiner Teil ihrer Anwendungsmöglichkeiten behandelt werden. Vielleicht ist dieses Skript aber dennoch eine Hilfe für diejenigen, denen die einschlägigen Lehrbücher zu „beweislustig“ oder als Einstieg zu umfangreich sind.

Inhaltsverzeichnis

1	Rückblick auf Vektorfelder im Reellen	7
1.1	Eigenschaften von Vektorfeldern im Reellen	7
1.2	Einfache Beispiele für reellwertige Vektorfelder	8
2	Einige topologische Begriffe	11
3	Grundlegendes zu komplexen Zahlen	12
4	Konvergenzbegriff	18
5	Komplexwertige Funktionen	20
5.1	Allgemeines	20
5.2	Wurzelfunktion	20
5.3	Logarithmusfunktion	21
5.4	Arkuskosinus- und Arkussinus-Funktion	22
6	Schnitte und Verzweigungen	23
7	Komplexe Differentiation	24
8	Komplexe Integration – Grundlegendes	30
8.1	Einführende Beispiele für komplexe Integrale	32
8.2	Cauchy-Integralsatz	35
8.3	Cauchy-Integralformel	36
8.3.1	Vorbetrachtungen	36
8.3.2	Herleitung der Cauchy-Integralformel	39
9	Verallgemeinerte Cauchy-Integralformel	40
9.1	Vorbetrachtungen	40
9.2	Herleitung der verallgemeinerten Cauchy-Integralformel	41
10	Laurent-Reihen	42
10.1	Herleitung der Laurent-Reihenentwicklung	42
10.2	Konvergenzverhalten der Laurent-Reihe	46
10.3	Einfache Beispiele für Laurent-Reihen	49
11	Isolierte Singularitäten	54
11.1	Hebbare Singularitäten	54
11.2	Pole	55
11.3	Wesentliche Singularitäten	57
12	Das Residuum	58
12.1	Herleitung	58
12.2	Residuenbestimmung – Rechenregeln	59
12.3	Beispiele für die Berechnung von Residuen	64
13	Residuensatz	67
14	Anwendungen	69
14.1	Zur Erinnerung – rationale Funktionen	69
14.2	Berechnung von uneigentlichen Integralen $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$	71
14.3	Integralsinus und Integralkosinus	78
14.4	Berechnung von uneigentlichen Integralen $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} \, dx$ – Fourier-Transformation	80

14.5	Berechnung von uneigentlichen Integralen $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx$ für $f(z) e^{iaz}$ mit Pol auf der reellen Achse	86
14.6	Berechnung von uneigentlichen Integralen $\int_0^{\infty} x^a \cdot f(x) dx$ für $a \in \mathbb{C}$, $0 < \operatorname{Re} a < 1$	89
14.7	Berechnung von uneigentlichen Integralen $\int_0^{\infty} f(x) dx$	95
14.8	Partialbruchzerlegung im Komplexen und Residuen	98
14.8.1	Beispiel – Partialbruchzerlegung bei Vielfachheiten von Nullstellen	98
14.8.2	Beispiel – Partialbruchzerlegung bei komplex konju- gierten Nullstellen	100
14.8.3	Zusammenhang zwischen Partialbruchzerlegung und Residuen	101
15	Anhang	105
15.1	Ergänzung zu Abschnitt 14.1 – Zum Satz über das Wachstum rationaler Funktionen	105
15.2	Ergänzung zu Abschnitt 14.4 – Integralabschätzungen am Recht- eckmodell	109
15.3	Ergänzung zum 2. Beispiel des Abschnitts 14.4 – Fourier-Rücktransformation	112
15.4	Ergänzung zu Abschnitt 14.6 – Integral der Funktion $\ln(x)$. . .	113
15.5	Ergänzung zu Abschnitt 14.7 – Grenzwertbildungen	113
15.6	Potenzfunktion – Lösungen der Gleichung $w^n = z$	114

Beziehungen im Komplexen

$$1^z = 1^{x+iy} = 1^{iy} = 1^{|z| \cdot e^{i\varphi}} = 1^{i\varphi} = e^{\ln 1 \cdot i\varphi} = e^0 = 1, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= e^0 = e^{i \cdot 2n\pi} \\ -1 &= e^{i \cdot \pi} = e^{i \cdot (2n+1)\pi} \\ i &= e^{i \cdot \frac{1}{2}\pi} = e^{i \cdot (2n+\frac{1}{2})\pi} \\ -i &= e^{i \cdot \frac{3}{2}\pi} = e^{i \cdot (2n+\frac{3}{2})\pi} \end{aligned} \right\} \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

$$i^i = \left(e^{i \cdot (2n+\frac{1}{2})\pi} \right)^i = \begin{cases} \vdots \\ e^{\frac{3}{2}\pi} \approx 111,32 & \text{für } n = -1 \\ e^{-\frac{1}{2}\pi} \approx 0,20788 & \text{für } n = 0 \\ e^{-\frac{5}{2}\pi} \approx 0,00039 & \text{für } n = 1 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\sin z = \frac{1}{2i} \left(e^{iz} - e^{-iz} \right), \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cos z = \frac{1}{2} \left(e^{iz} + e^{-iz} \right), \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}$$

$$\cos i = \frac{1}{2} \left(e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i} \right) = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} \approx 1,54308 > 1$$

$$\sinh z = \frac{1}{2} \left(e^z - e^{-z} \right), \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$$\cosh z = \frac{1}{2} \left(e^z + e^{-z} \right), \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}$$

$$\sin(ix) = i \frac{e^x - e^{-x}}{2} = i \cdot \sinh x, \quad \tan(ix) = i \cdot \tanh x$$

$$\cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x, \quad \cot(ix) = -i \cdot \coth x$$

$$\sinh(ix) = i \cdot \sin x, \quad \tanh(ix) = i \cdot \tan x$$

$$\cosh(ix) = \cos x, \quad \coth(ix) = -i \cdot \cot x$$

1 Rückblick auf Vektorfelder im Reellen

Weil es gewisse Verhaltensähnlichkeiten gibt zwischen reellen vektorwertigen Funktionen im $\mathbb{R}^2$ und komplexen Funktionen (Funktionen in der komplexen Zahlenebene), insbesondere aber zwischen einigen *konservativen* Vektorfeldern und *holomorphen* Funktionen, um die es in der Funktionentheorie im Wesentlichen geht, wollen wir uns zu Beginn an die Vektoranalysis erinnern.

1.1 Eigenschaften von Vektorfeldern im Reellen

- **Quellenfrei** gemäß $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ sind stets
 - * homogene Felder.
- Radialsymmetrische Vektorfelder bzw. Zentralfelder sind allgemein nicht quellenfrei. **Quellenfreie Sonderfälle** sind
 - * kugelsymmetrische Vektorfelder (im $\mathbb{R}^3$) vom Typ

$$|\vec{V}| = V(r) = V_r = \frac{\text{const}}{r^2} \quad \text{für } r > 0,$$

also $\frac{1}{r^2}$ -Felder (elektrisches Feld einer Punktladung, Gravitationsfeld der Erde),

- * axialsymmetrische bzw. zylindersymmetrische Vektorfelder vom Typ

$$|\vec{V}| = V(\varrho) = V_\varrho = \frac{\text{const}}{\varrho} \quad \text{für } \varrho > 0,$$

(elektrisches Feld um einen geladenen Zylinder) und

- * ebene radialsymmetrische Vektorfelder (im $\mathbb{R}^2$) vom Typ

$$|\vec{V}| = V(r) = V_r = \frac{\text{const}}{r} \quad \text{für } r > 0.$$

- **Wirbelfrei** gemäß $\operatorname{rot} \vec{V} = 0$ sind stets
 - * Gradientenfelder $\vec{V}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \Phi(\vec{r})$ von Potentialfeldern $\Phi(\vec{r})$,
 - * radialsymmetrische Felder bzw. Zentralfelder (elektrisches Feld einer Punktladung, Gravitationsfeld einer Masse),
 - * axialsymmetrische bzw. zylindersymmetrische Felder (elektrisches Feld um einen geladenen Zylinder).
- Eine **wirbelfreier Sonderfall** ist das konzentrisch-ringförmige Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters, weil es im linearen Leiter nicht definiert ist und sich folglich über ein Gebiet erstreckt, das nicht einfach zusammenhängend ist.
- **Konservativ** sind Vektorfelder $\vec{V}(\vec{r})$, deren Linienintegral

$$\int_C \vec{V}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{wegunabhängig,}$$

also nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig ist und deren Integrationsweg nur in einem einfach zusammenhängenden Gebiet liegt.

Konservativ sind stets

- * Gradientenfelder $\vec{V}$, weil sie die folgende Eigenschaft besitzen:

$$\underbrace{\operatorname{rot} \vec{V} = 0}_{\text{Integrabilitätsbedingung}} \quad \text{bzw. speziell im } \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x},$$

- * radialsymmetrische bzw. Zentralfelder $\vec{V} = V(r) \vec{e}_r = V_r \vec{e}_r$.

1.2 Einfache Beispiele für reellwertige Vektorfelder

- $\vec{V}(r, \varphi) = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ für $r > 0$ im $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$\vec{V}(r, \varphi) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2 + y^2} \\ y/\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \\ y \cdot (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y^2 - 2x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{3xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{3xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{x^2 - 2y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - 2x^2 + x^2 - 2y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}},$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Achtung!

Wie man sieht, ist das radialsymmetrische Vektorfeld (Zentralfeld) vom Typ

$$|\vec{V}| = V(r) = V_r = \frac{\text{const}}{r^2} \quad \text{für } r > 0$$

im $\mathbb{R}^2$ bzw. in der Ebene nicht quellenfrei, während es im $\mathbb{R}^3$ als kugelsymmetrisches Feld quellenfrei ist.

Die Zirkulation um ein Rechteck $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ ist

$$\oint_{C_\square} \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \oint_{C_\square} \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = A + B + C + D = 0$$

mit

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow$$

$$A : -\left(x^2 + y_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x_2}^{x_1} = \left(x_2^2 + y_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(x_1^2 + y_2^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$B : -\left(x_1^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{y_2}^{y_1} = \left(x_1^2 + y_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(x_1^2 + y_1^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$C : -\left(x^2 + y_1^2\right)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{x_1}^{x_2} = \left(x_1^2 + y_1^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(x_2^2 + y_1^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$D : -\left(x_2^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{y_1}^{y_2} = \left(x_2^2 + y_1^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(x_2^2 + y_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

- $\vec{V}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \vec{e}_r = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ für $r > 0$ im $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$\vec{V}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2 + y^2} \\ y/\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot (x^2 + y^2)^{-1} \\ y \cdot (x^2 + y^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Die Zirkulation um ein Rechteck $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ mit

$$\int \frac{x \, dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + a^2|$$

ist analog zur Funktion $\vec{V}(\vec{r}, \varphi) = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$

$$\oint_{C_\square} \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \oint_{C_\square} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = A + B + C + D = 0.$$

- $\vec{V}(r, \varphi) = \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$ für $r > 0$ im $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$\vec{V}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -y/\sqrt{x^2 + y^2} \\ x/\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \cdot (x^2 + y^2)^{-1} \\ x \cdot (x^2 + y^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Die Zirkulation um ein Rechteck $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ ist

$$\oint_{C_\square} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \oint_{C_\square} \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = A + B + C + D \neq 0$$

mit

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Rightarrow$$

$$A : \quad -y_2 \cdot \frac{1}{y_2} \arctan \frac{x}{y_2} \Big|_{x_2}^{x_1} = \arctan \frac{x_2}{y_2} - \arctan \frac{x_1}{y_2} ,$$

$$B : \quad x_1 \cdot \frac{1}{x_1} \arctan \frac{y}{x_1} \Big|_{y_2}^{y_1} = \arctan \frac{y_1}{x_1} - \arctan \frac{y_2}{x_1} ,$$

$$C : \quad -y_1 \cdot \frac{1}{y_1} \arctan \frac{x}{y_1} \Big|_{x_1}^{x_2} = \arctan \frac{x_1}{y_1} - \arctan \frac{x_2}{y_1} ,$$

$$D : \quad x_2 \cdot \frac{1}{x_2} \arctan \frac{y}{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} = \arctan \frac{y_2}{x_2} - \arctan \frac{y_1}{x_2} .$$

2 Einige topologische Begriffe

- **Jordan-Kurven** bzw. einfache Kurven sind stetige und schnittpunktfreie Kurven. Schnittpunktfrei sind Kurven ohne Selbstüberschneidung, sie werden oft auch doppelpunktfrei genannt. Es gibt offene und geschlossene Jordan-Kurven.
- „Zwei Wege, die umkehrbar eindeutig ineinander deformiert werden können, heißen **homotop** (oder äquivalent). Jedem Parameterwert auf dem einen Weg muß dabei genau ein Parameterwert auf dem zweiten Weg entsprechen, obwohl die Wege geometrisch ganz verschieden aussehen dürfen. Es soll möglich sein, den einen Weg in einem stetigen Prozeß in den anderen Weg zu verformen.“¹
- In einer **sternförmigen Punktmenge** M gibt es einen Punkt z , das Sternzentrum, von dem aus alle Punkte p von M sichtbar sind, d. h., alle Strahlen von z nach den Punkten p liegen vollständig in M .
- Eine offene sternförmige Menge heißt **Sterngebiet**.
- Werden aus einer Umgebung U bestimmte Punkte ausgeschlossen, so ist die verbleibende Umgebung eine **punktierte Umgebung** $\dot{U}$. Wird beispielsweise aus U der Punkt z_0 ausgeschlossen, resultiert die punktierte Umgebung

$$U \setminus \{z_0\} = \dot{U}.$$

Topologischer Zusammenhang bezüglich Punktmengen

- 0-zusammenhängend = wegzusammenhängend:
Ein Gebiet ist wegzusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte durch einen ganz in diesem Gebiet liegenden Strecken- bzw. Polygonzug verbinden lassen.
 - 1-zusammenhängend = einfach zusammenhängend:
Ein Gebiet ist einfach zusammenhängend, wenn es wegzusammenhängend ist *und* wenn sich *jeder* geschlossene Weg in diesem Gebiet auf einen Punkt zusammenziehen lässt.
 - 2-zusammenhängend:
Ein Gebiet ist 2-zusammenhängend, wenn sich *jede* geschlossene Fläche in diesem Gebiet auf einen Punkt zusammenziehen lässt.
-
- Eine Fläche (Teilraum des $\mathbb{R}^2$) mit Löchern oder auch nur mit einem Punkt, der nicht zu dieser Fläche gehört, ist 0-zusammenhängend, aber nicht 1-zusammenhängend.
 - Ein Volltorus ist 0-zusammenhängend, aber nicht 1-zusammenhängend, weil sich geschlossene Kurven, die das „Torusloch“ umlaufen, nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen, ohne dabei das Gebiet des Torus zu verlassen.

¹Zitiert aus Hochschultaschenbuch von Christian B. Lang und Norbert Pucker, Mathematische Methoden in der Physik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1998, Abschnitt 17.2.1 Linienintegral, Seite 495.

- Ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$ mit Löchern („Schweizer Käse“) oder auch nur mit einem Punkt, der nicht zu diesem Teilraum gehört, ist unabhängig von der Zahl der Löcher 0-zusammenhängend und 1-zusammenhängend, aber nicht 2-zusammenhängend. Es lässt sich nämlich jede geschlossene Kurve unter Umgehung der Löcher auf einen Punkt zusammenziehen.

Es kann folgendes gezeigt werden:

- Auf einer 1-zusammenhängenden Menge gilt
 $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V} = \operatorname{grad} \Phi \Rightarrow \text{Zirkulation von } \vec{V} = 0$.
- Auf einer 2-zusammenhängenden Menge gilt
 $\operatorname{div} \vec{V} = 0 \Leftrightarrow \vec{V} = \operatorname{rot} \vec{A} \Rightarrow \text{Fluss von } \vec{V} \text{ aus geschlossener Fläche} = 0$.

3 Grundlegendes zu komplexen Zahlen

- Die **imaginären Einheit** i ist definiert durch

$$i^2 := -1.$$

- Darstellung von **komplexen Zahlen** $z \in \mathbb{C}$

1. durch ihre **Komponenten** in der komplexen Zahlenebene:

$$z := x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}\{z\} = x, \quad \operatorname{Im}\{z\} = y,$$

2. in der **Polarform**:

$$z := r \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot e^{i\varphi}, \quad r, \varphi \in \mathbb{R}$$

mit

$$r = |z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x},$$

Der Betrag von z , also $|z| = r$, und der Winkel φ sind die Polarkoordinaten von z in der komplexen Zahlenebene. Der Winkel φ ist das **Argument** von $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$, also

$$\varphi = \arg(z).$$

In der Physik ist es üblich φ als **Phasenwinkel** oder Phase zu bezeichnen.

3. in der **trigonometrischen Form**:

$$z := |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

mit

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi}} = \sqrt{(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi - i \sin \varphi)}$$

$$= \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1.$$

Die Funktion $f(\varphi) = e^{i\varphi}$ beschreibt also den Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene.

- Die **Euler-Identität**

Mit der Taylor-Entwicklung der komplexen Exponentialfunktion $f(\varphi) = e^{i\varphi}$ um den Entwicklungspunkt $\varphi_0 = 0$ leiten wir die sog. Euler-Formel her:

$$\begin{aligned}
 e^{i\varphi} &= 1 + \frac{i\varphi}{1!} + \frac{i^2\varphi^2}{2!} + \frac{i^3\varphi^3}{3!} + \frac{i^4\varphi^4}{4!} + \frac{i^5\varphi^5}{5!} + \frac{i^6\varphi^6}{6!} + \frac{i^7\varphi^7}{7!} + \frac{i^8\varphi^8}{8!} + \dots \\
 &= 1 + i\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i\frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \varphi^n \\
 &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} + i\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!}\right) + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} ,
 \end{aligned}$$

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

 . $\square$

Die komplexe Funktion $f(\varphi) = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ mit $\operatorname{Re}\{f\} = \cos \varphi$ und $\operatorname{Im}\{f\} = \sin \varphi$ beschreibt den Einheitskreis mit $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ in der komplexen Zahlenebene. Das Argument bzw. den Winkel φ erhalten wir mit $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$.

Bezüglich der Sinus- und Kosinusfunktion ist folgendes zu beachten:

Die reellen Funktionen $\cos(\varphi) = \tilde{u}(\varphi)$ und $\sin(\varphi) = \tilde{v}(\varphi)$ schwanken zwischen der oberen Schranke $+1$ und der unteren Schranke -1 hin und her, d. h., sie sind (für $\varphi \rightarrow \pm\infty$) divergent. Ihre Taylor-Reihen hängen jedoch von n ab, konvergieren für jedes beliebige φ und besitzen demzufolge den Konvergenzradius $r = \infty$ mit dem Konvergenzintervall $] -\infty, +\infty[$ auf φ :

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} ,$$

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|(-1)^n|}{|(2n)!|}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2n)!} = \infty ,$$

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|(-1)^n|}{|(2n+1)!|}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2n+1)!} = \infty .$$

Mit zunehmendem n wächst nämlich die Fakultät schneller, als die n -te Wurzel abnimmt.

- Vergleich des kartesischen 2-dimensionalen Vektorraums mit der komplexen Zahlenebene:

Die Vektoraddition

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{bzw.}$$

$$\vec{z}_1 + \vec{z}_2 = (a_1 \vec{e}_a + b_1 \vec{e}_b) + (a_2 \vec{e}_a + b_2 \vec{e}_b) = (a_1 + a_2) \vec{e}_a + (b_1 + b_2) \vec{e}_b$$

entspricht der Addition in der komplexen Zahlenebene:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) .$$

Das Skalarprodukt

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2 \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 &= (a_1 \vec{e}_a + b_1 \vec{e}_b) \cdot (a_2 \vec{e}_a + b_2 \vec{e}_b) \\ &= a_1 a_2 \underbrace{(\vec{e}_a \cdot \vec{e}_a)}_{=1} + a_1 b_2 \underbrace{(\vec{e}_a \cdot \vec{e}_b)}_{=0} + b_1 a_2 \underbrace{(\vec{e}_b \cdot \vec{e}_a)}_{=0} + b_1 b_2 \underbrace{(\vec{e}_b \cdot \vec{e}_b)}_{=1} \end{aligned}$$

entspricht nicht der Multiplikation in der komplexen Zahlenebene:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 - b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) . \end{aligned}$$

Die Multiplikation komplexer Zahlen ist sinngemäß eine Drehstreckung bzw. eine Drehstauchung gemäß

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 \cdot r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = z .$$

• Rechenregeln

* **Konjugation** komplexer Zahlen $\Rightarrow$ **komplex konjugierte Zahlen**:

$\bar{z} = x - iy = r e^{-i\varphi}$ ist die komplex Konjugierte zu $z = x + iy = r e^{i\varphi}$.

$$\overline{\bar{z}} = z ,$$

$$\bar{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} ,$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 ,$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 ,$$

$$\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} ,$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2 ,$$

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}} .$$

* Der **Betrag eines Produktes** komplexer Zahlen ist gleich dem Produkt ihrer Beträge:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| ,$$

$$\text{denn } |z_1 \cdot z_2|^2 = \overline{(z_1 \cdot z_2)} \cdot (z_1 \cdot z_2) = (\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2) \cdot (z_1 \cdot z_2) = |\bar{z}_1|^2 \cdot |z_2|^2 .$$

* **Dreiecksungleichung:** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Beweis mit

$$z := z_1 \bar{z}_2 \quad \text{und} \quad z + \bar{z} = (u + iv) + (u - iv) = 2u \leq 2\sqrt{u^2 + v^2} = 2|z|,$$

$$\boxed{z + \bar{z} \leq 2|z|} . \quad (1)$$

Für die linke Seite der Dreiecksungleichung gilt:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + \underbrace{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}_{\{z + \bar{z}\}} + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + \{z + \bar{z}\} + |z_2|^2 . \end{aligned}$$

Für die rechte Seite der Dreiecksungleichung gilt:

$$\begin{aligned} (|z_1| + |z_2|)^2 &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\sqrt{z_1 \bar{z}_1 \cdot z_2 \bar{z}_2} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\sqrt{z_1 \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_1 z_2} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\sqrt{z_1 \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_1 z_2} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + \underbrace{2\sqrt{z \cdot \bar{z}}}_{\{2|z|\}} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + \{2|z|\} + |z_2|^2 . \end{aligned}$$

Der Vergleich der geschweiften Klammern mit (1) liefert den Beweis.

Weiterhin gilt auch

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

- Wir zeigen

$$\boxed{|e^z| = e^{\operatorname{Re}\{z\}}} :$$

$$\begin{aligned} |e^{x+iy}| &= |e^z| = \sqrt{e^z \cdot \overline{e^z}} = \sqrt{e^z \cdot e^{\bar{z}}} = \sqrt{e^{z+\bar{z}}} = \sqrt{e^{2\operatorname{Re}\{z\}}} = e^{\operatorname{Re}\{z\}} , \\ \text{oder} \quad &= |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot \underbrace{|e^{iy}|}_{=1} = |e^x| = e^x . \end{aligned}$$

- Die Darstellung von **Potenzen** z^b , $z \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$ erfolgt am einfachsten in der Polarform gemäß

$$z^b = (x + iy)^b = r^b \cdot e^{i\varphi \cdot b} = |z|^b \cdot e^{ib\varphi} .$$

Achtung! „Die aus dem Reellen bekannte Definition $a^b = \exp(b \log a)$ kann zwar übernommen werden, ist aber mit Vorsicht zu genießen:

Beispiel ... Für reelle Zahlen gilt $(a^b)^c = a^{bc}$. Dagegen

$$(e^{2\pi i})^i = 1^i = e^{(\log 1) \cdot i} = 1, \quad e^{(2\pi i) \cdot i} = e^{-2\pi}.$$

Es ist in jedem Fall zu untersuchen, ob in der Definition $a^b = \exp(b \log a)$ Eindeutigkeit herrscht oder nicht. Ist a reell und positiv, so kann man hier $\ln a$ nehmen, was zur Eindeutigkeit von a^b führt. Andernfalls gibt es unendlich viele Werte von a^b , die sich um die Faktoren $e^{2\pi i n b}$ unterscheiden. Diese Faktoren sind genau dann 1, wenn b eine ganze Zahl m ist. In diesem Fall ist die Potenz eindeutig und gleich a^m . Ist $b = p/q \in \mathbb{Q}$ mit p, q teilerfremd, so besitzt a^b genau q Werte, nämlich $\sqrt[q]{a^p}, \dots$ ²

- Wir zeigen

$$|z^n| = |z|^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} \quad :$$

$$\begin{aligned} z^1 &= x + iy \\ |z^1| &= \sqrt{(x + iy) \cdot (x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^2 &= (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \\ |z^2| &= \sqrt{(x^2 - y^2 + i2xy) \cdot (x^2 - y^2 - i2xy)} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = |z|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \\ |z^3| &= \sqrt{[x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)] \cdot [x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)]} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2)^3} = \sqrt{(x^2 + y^2)^3} = |z|^3. \end{aligned}$$

Mit $|z^2| \cdot |z^3| = \sqrt{z^2 \cdot \overline{z^2}} \cdot \sqrt{z^3 \cdot \overline{z^3}} = \sqrt{z^2 \cdot z^3 \cdot \overline{z^2} \cdot \overline{z^3}} = \sqrt{z^5 \cdot \overline{z^5}} = |z^5|$
und $|z^2| = |z|^2 \wedge |z^3| = |z|^3$
können wir

$$|z|^5 = |z|^2 \cdot |z|^3 = |z^2| \cdot |z^3| = |z^5|$$

konstruieren. Analog dazu erhalten wir

$$|z^m| \cdot |z^n| = |z^{m+n}| = |z|^{m+n}$$

und somit

$$|z^n| = |z|^n. \quad \square$$

Sehr viel einfacher ist die Argumentation bei Darstellung von z in Polarform:

$$|z| = |r \cdot e^{i\varphi}| = r \quad \Rightarrow \quad |z^n| = |r^n \cdot e^{in\varphi}| = r^n = |z|^n. \quad \square$$

²Zitiert aus dem Vorlesungsskript von Manfred Dobrowolski, Einführung in die Funktionentheorie, Seite 31, www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~dobro/fu/b.pdf

- Berechnung des Betrags von Potenzen mit komplexem Exponenten $c = a + ib$

$$a, b, r \in \mathbb{R}, \quad c, z \in \mathbb{C}, \quad \varphi = \arg(z) :$$

$$r^c = r^{a+ib} = r^a \cdot r^{ib} = r^a \cdot e^{ib \cdot \ln |r|} = r^a \cdot [\cos(b \ln |r|) + i \sin(b \ln |r|)] \Rightarrow$$

$$r^c = r^a \cos(b \ln |r|) + i \cdot r^a \sin(b \ln |r|),$$

$$\overline{r^c} = r^{a-ib} = r^{\bar{c}} = r^a \cdot e^{-ib \cdot \ln |r|} = r^a \cos(b \ln |r|) - i \cdot r^a \sin(b \ln |r|),$$

$$|r^c| = \sqrt{(\operatorname{Re} r^c)^2 + (\operatorname{Im} r^c)^2} = \sqrt{r^{2a} [\cos^2(b \ln |r|) + \sin^2(b \ln |r|)]} \Rightarrow$$

$$\boxed{|r^c| = \sqrt{r^c \cdot \overline{r^c}} = r^a = r^{\operatorname{Re} c}}.$$

$$z^c = \left(|z| \cdot e^{i\varphi}\right)^{a+ib} = |z|^{a+ib} \cdot e^{i\varphi \cdot (a+ib)} = |z|^a \cdot e^{ib \cdot \ln |z|} \cdot e^{i\varphi a} \cdot e^{-\varphi b} \Rightarrow$$

$$z^c = |z|^a \cdot e^{-\varphi b} \cdot e^{i(\varphi a + b \ln |z|)},$$

$$\overline{z^c} = |z|^a \cdot e^{-\varphi b} \cdot e^{-i(\varphi a + b \ln |z|)} \Rightarrow$$

$$\boxed{|z^c| = \sqrt{z^c \cdot \overline{z^c}} = |z|^a \cdot e^{-\varphi b} = |z|^{\operatorname{Re} c} \cdot e^{-\arg(z) \cdot \operatorname{Im} c}}.$$

- Darstellung der **geometrischen Reihe** für $z \in \mathbb{C}$ und $0 < |z| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}, \quad (2)$$

denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (|z|^n \cdot e^{in\varphi}) = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n}_{=0 \text{ für } 0 < |z| < 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e^{in\varphi} = 0.$$

4 Konvergenzbegriff

- **Punktweise und gleichmäßige Konvergenz:** Siehe auch Mathepedia!

Zitat aus Peter Furlan, **Das Gelbe Rechenbuch 1**, Verlag Martina Furlan, Dortmund, 2012, Seite 199:

„Eine Funktionenfolge (f_n) konvergiert punktweise auf dem Definitionsbereich I gegen f , wenn für jedes $x \in I$ gilt $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad (\epsilon\text{-}n_0\text{-Kriterium})$$

Die Folge konvergiert gleichmäßig auf I gegen f , wenn $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ gilt. Das bedeutet, daß das ϵ - n_0 -Kriterium für alle x mit demselben n_0 erfüllbar ist:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I : \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

$\begin{array}{ccc} \text{gleichmäßige Konvergenz} & \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \nLeftarrow \end{array} & \text{(punktweise) Konvergenz} \end{array}$
--

Eine Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ heißt

- * (punktweise) konvergent im Intervall I , falls die Reihe für jedes feste $x \in I$ konvergiert, d. h. für jedes feste x konvergiert die Folge der Partialsummen.
- * gleichmäßig konvergent im Intervall I , wenn die Folge der Partialsummen in I gleichmäßig konvergiert.

- * absolut konvergent im Intervall I , wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ (punktweise) konvergiert.

- * absolut und gleichmäßig konvergent im Intervall I , wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ gleichmäßig konvergiert.

Kurz: Die Reihe ist absolut gleichmäßig konvergent.“

- Der **Konvergenzradius** $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ im reellen Fall bzw. $\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho > 0$ im komplexen Fall gibt an, für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$ eine Funktion $f(x)$ bzw. $f(z)$ oder deren Potenzreihe um den Entwicklungspunkt x_0 bzw. z_0 konvergiert.

Im **reellen** Fall gilt:

Konvergenz bei $|x - x_0| < r \geq 0$ mit dem **Konvergenzintervall**

(x -Achsenabschnitt) $]x_0 - r, x_0 + r[$,

Divergenz bei $|x - x_0| > r \geq 0$.

Im **komplexen** Fall gilt:

Konvergenz bei $|z - z_0| < \varrho \geq 0$ mit dem Radius ϱ des **Konvergenzkreises**

(der Konvergenzkreisfläche) um den Entwicklungspunkt z_0 in der komplexen Zahlenebene,

Divergenz bei $|z - z_0| > \varrho \geq 0$.

Das Verhalten einer Funktion oder ihrer Potenzreihe auf dem Rand des Konvergenzintervalls, also für r , bzw. auf dem Rand des Konvergenzkreises, also für ϱ , muss gesondert untersucht werden.

Wegen $|z^n| = |z|^n$ kann man formal bei der Bestimmung des Konvergenzradius mit $z \in \mathbb{C}$ genauso wie mit $x \in \mathbb{R}$ verfahren.

- **Berechnung des Konvergenzradius für Potenzreihen**

Die hier verwendete Darstellung

für komplexe Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ gilt vollkommen analog auch für reelle Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Aus dem Quotientenkriterium

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{Reihe konvergiert} \\ = 1 & \Rightarrow \text{keine Aussage möglich} \\ > 1 & \Rightarrow \text{Reihe divergiert} \end{cases}$$

für die **absolute Konvergenz** allgemeiner Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ erhalten wir den zugehörigen Konvergenzradius für Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| &< 1, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (z - z_0)^{n+1}}{a_n (z - z_0)^n} \right| &= |z - z_0| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \quad \Leftrightarrow \\ \boxed{|z - z_0| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \varrho} &. \end{aligned} \quad (3)$$

Der Limes superior ($\limsup$) ist der größte Häufungspunkt der Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$, wenn diese beschränkt ist; sonst ist der Limes superior $= \infty$. Es gibt nämlich auch Folgen mit mehreren „Grenzwerten“, die man dann als Häufungspunkte bezeichnet. Die Formel (3) ist nur anwendbar, wenn fast alle $a_n \neq 0$, also wenn nur höchstens endlich viele $a_n = 0$. Außerdem ist zu beachten, dass es konvergente Reihen gibt, die absolut divergieren wie beispielsweise die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Immer anwendbar, auch für $\varrho = 0$ bzw. $r = 0$ ist die **Formel von Cauchy-Hadamard**

$$\boxed{|z - z_0| < \varrho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}.$$

5 Komplexwertige Funktionen

5.1 Allgemeines

- Die **Funktionentheorie** ist die Theorie der komplexwertigen bzw. kurz gesagt **komplexen Funktionen**

$$f : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad G \subseteq \mathbb{C},$$

wobei $\mathbb{C}$ für die komplexe Zahlenebene steht mit den komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$. Komplexe Funktionen f lassen sich auch wie folgt darstellen:

$$f(z) = f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y) \quad \Rightarrow \quad u = \operatorname{Re}\{f\}, \quad v = \operatorname{Im}\{f\}.$$

- „Da wir jede komplexe Funktion mit einer Funktion $(u, v)^T : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ identifizieren können, ist die Stetigkeit von $f(z)$ äquivalent zur Stetigkeit von u und v . Allein aufgrund dieser Korrespondenz gelten alle aus dem Reellen bekannten **Regeln für die Stetigkeit**: Sind f, g stetig, so auch $f + g$, fg und f/g , sofern $g \neq 0$ in D . Ist der Wertebereich von g im Definitionsbereich von f enthalten, so ist auch $f \circ g$ stetig.“³
- Eine Funktion $f(z)$ ist in einem Gebiet G **eindeutig**, wenn man z alle möglichen Wege C_n in G durchlaufen lassen kann und $f(z)$ nach ihrer Rückkehr zum Ausgangspunkt *stets* wieder denselben Wert annimmt.

Ein Beispiel für eine **mehrdeutige Funktion** ist $f(z) = \sqrt{z}$:

$$z = x + iy = |z| \cdot e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}},$$

$$\varphi = \varphi_0 \xrightarrow{1 \text{ Umlauf}} \varphi = \varphi_0 + 2\pi.$$

Nach einem Umlauf gilt also

$$|z|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} \cdot e^{i\pi} = -|z|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} \neq |z|^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}},$$

denn $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$. Wegen ihrer speziellen Bedeutung werden wir im Folgenden auf einige mehr- bzw. vieldeutige Funktionen gesondert eingehen.

5.2 Wurzelfunktion

Die Wurzelfunktion $f(z) = z^{\frac{1}{n}} = w$ ist die Umkehrfunktion der Potenzfunktion $w^n = z$. Wegen der 2π -Periodizität der trigonometrischen Funktionen gilt

$$w_k^n = z \quad \Leftrightarrow \quad z^{\frac{1}{n}} = w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) \quad \Rightarrow$$

$$w = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, (n-1). \quad (4)$$

w ist also die n -te Wurzel von z und es gibt n verschiedene komplexe Zahlen w zur Lösung von Gleichung (4) entsprechend $k = 0, 1, \dots, (n-1)$. Folglich ist die Wurzelfunktion mehrdeutig oder genau gesagt n -deutig.

³Zitiert aus dem Vorlesungsskript von Manfred Dobrowolski, Einführung in die Funktionentheorie, Seite 20, www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~dobro/fu/b.pdf

5.3 Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $e^c = z$ mit $z, c \in \mathbb{C}$ ist der natürliche Logarithmus bzw. die (natürliche) Logarithmusfunktion $f(z) = \ln z = c$. Die Verallgemeinerung des reellen natürlichen Logarithmus auf den komplexen natürlichen Logarithmus erhalten wir unter Berücksichtigung der 2π -Periodizität von e^c in der Phase φ des Exponenten $c = i\varphi$ wie folgt:

$$\begin{aligned} c = \ln z = \ln(r \cdot e^{i\varphi}) &= \ln[r \cdot e^{i(\varphi+k \cdot 2\pi)}] \\ &= \ln r + \ln e^{i\varphi} \cdot \ln e^{ik \cdot 2\pi}, \\ \ln z &= \underbrace{\ln r + i\varphi}_{\text{Hauptwert}} + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Wegen $k \in \mathbb{Z}$ ist der natürliche Logarithmus eines komplexen Arguments eine vieldeutige komplexwertige Funktion.

Wir zeigen den natürlichen Logarithmus aus negativen reellen Zahlen

$$\ln(-a) = \ln(-1) + \ln a, \quad 0 < a \in \mathbb{R} :$$

Unter Verwendung von

$$-1 = \cos(\pi \pm k \cdot 2\pi) + i \sin(\pi \pm k \cdot 2\pi) = e^{i(\pi \pm k \cdot 2\pi)} = e^{i(2k+1)\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \ln(-1) = \ln(e^{i(2k+1)\pi}) &= (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \dots, -5\pi i, -3\pi i, -\pi i, \underbrace{\pi i}_{\text{Hauptwert}}, 3\pi i, 5\pi i, \dots \end{aligned}$$

und damit schließlich

$$\ln(-a) = \ln a + (2k+1)\pi i \quad \text{für } 0 < a \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{Z}$$

Der zugehörige Hauptwert (für $k = 0$) ist $\ln a + \pi i$.

5.4 Arkuskosinus- und Arkussinus-Funktion

Die Arkuskosinus-Funktion $f(z) = \arccos z = \omega$ ist die Umkehrfunktion der Kosinus-Funktion $\cos \omega = z$ für $\omega, z \in \mathbb{C}$. Für die Kosinusfunktion gilt

$$\begin{aligned}\cos \omega &= \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} = z \\ \Leftrightarrow e^{2i\omega} + 1 &= 2ze^{i\omega} \\ \Leftrightarrow (e^{i\omega})^2 - 2ze^{i\omega} + 1 &= 0, \\ e^{i\omega} &= z \pm \sqrt{z^2 - 1}.\end{aligned}\tag{6}$$

Die quadratische Gleichung (6) hat also zwei Lösungen. Mit diesen resultiert für die **Arkuskosinus-Funktion**

$$\begin{aligned}\arccos z = \omega &= \frac{1}{i} \ln e^{i\omega} = \frac{1}{i} \left[\ln \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right) + 2k\pi i \right], \\ \arccos z &= -i \ln \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Völlig analog ist die Herleitung der Arkussinus-Funktion $f(z) = \arcsin z = \omega$ aus der Sinus-Funktion $\sin \omega = z$ für $\omega, z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\sin \omega &= \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} = z \\ \Leftrightarrow e^{2i\omega} - 1 &= 2ize^{i\omega} \\ \Leftrightarrow (e^{i\omega})^2 - 2ize^{i\omega} - 1 &= 0, \\ e^{i\omega} &= iz \pm \sqrt{-z^2 + 1}.\end{aligned}\tag{7}$$

Die quadratische Gleichung (7) hat wieder zwei Lösungen. Mit diesen resultiert für die **Arkussinus-Funktion**

$$\begin{aligned}\arcsin z = \omega &= \frac{1}{i} \ln e^{i\omega} = \frac{1}{i} \left[\ln \left(iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right) + 2k\pi i \right], \\ \arcsin z &= -i \ln \left(iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Wie man sieht, sind auch die Arkuskosinus- und die Arkussinus-Funktion vieldeutige Funktionen.

6 Schnitte und Verzweigungen

Mehr zu diesem Thema findet man in den gut illustrierten Abschnitten 2.4 Riemannsche Blätter auf Seite 61 bis Seite 68 und 17.2.6 Schnitte auf Seite 511 bis Seite 512 im Hochschultaschenbuch von Christian B. Lang und Norbert Pucker, Mathematische Methoden in der Physik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1998.

- Gehen wir beispielsweise von der komplexen Wurzelfunktion (4)

$$w = w(z) = z^{\frac{1}{n}} = \tilde{w}(r, \varphi) = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

aus, dann entspricht jeder (vollständige) Umlauf in der z -Ebene von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ nur einem von insgesamt n Umlaufsektoren in der w -Ebene mit jeweils einem überstrichenen Winkel von $\frac{2\pi}{n}$. Nach n Umläufen in der z -Ebene ist dann ein (vollständiger) Umlauf in der w -Ebene erfolgt. Deshalb ist die komplexe Wurzelfunktion n -deutig. Nummeriert man jetzt die einzelnen Umlauf- z -Ebenen entsprechend den Umlaufsektoren der w -Ebene mit $k = 0, 1, \dots, (n-1)$, so ist die komplexe Wurzelfunktion formal umkehrbar eindeutig. Die so nummerierten z -Ebenen heißen Riemann-Blätter.

Jedes **Riemann-Blatt** stellt also die gesamte komplexe Zahlenebene dar und das Riemann-Blatt mit der Nummer k ist einem „ k -Wert“ der Funktion $w = w(z)$ im k -ten Teilgebiet der w -Ebene zugeordnet.

- Die Logarithmus-Funktion (5)

$$w = w(z) = \ln z = \underbrace{\ln r + i\varphi}_{\text{Hauptwert}} + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

besitzt unendlich viele Riemann-Blätter (in der z -Ebene). Diesen Riemann-Blättern sind den k -Werten entsprechende, parallel zur reellen w -Achse angeordnete Streifen der (gleichen) Breite 2π zugeordnet. Der Hauptwert von $\ln z$ mit $k = 0$ erstreckt sich also auf den Streifen zwischen der reellen Achse und ihrer Parallelen durch den Punkt 2π auf der imaginären w -Achse.

- Die Summe aller möglichen Riemann-Blätter heißt Riemann'sche z -Fläche bzw. kurz **Riemann'sche-Fläche**.

Die Riemann'sche Fläche von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten, also $w = z^{\frac{m}{n}}$, besitzt n Riemann-Blätter. Die Riemann'sche Fläche von Potenzfunktionen mit irrationalem Exponenten wie z. B. e und π jedoch besitzt unendlich viele Riemann-Blätter. Und auch die Riemann'schen Flächen der Logarithmusfunktion sowie der Arkusfunktionen besitzen unendlich viele Riemann-Blätter.

- Ein **Schnitt** in der komplexen Zahlenebene ist die Linie, entlang der eine Funktion die Riemann-Blätter wechselt. Im Fall der komplexen Wurzelfunktion $w = z^{\frac{1}{n}}$ wäre dies z. B. die positive reelle Achse.

- Die beiden Endpunkte eines Schnitts nennt man **Verzweigungspunkte**. Im Fall der komplexen Wurzelfunktion sind die Verzweigungspunkte $z = 0$ und der Punkt im Unendlichen. Und der Schnitt von $\ln z$ verläuft vom singulären Verzweigungspunkt $z = 0$ ebenfalls bis zum Verzweigungspunkt im Unendlichen. Die Schnittlinie zwischen den beiden Verzweigungspunkten kann beliebig gelegt werden.

Die Verzweigungspunkte liegen dort, wo die Funktion nicht mehrdeutig, also unabhängig von k ist. Nach einer Umkreisung *eines* Verzweigungspunktes in der z -Ebene wechselt die Funktion $w(z)$ das zugehörige Teilgebiet in der w -Ebene. Wird aber in der z -Ebene ein Gebiet ohne Verzweigungspunkt umkreist, wechselt die Funktion $w(z)$ ihr k -tes Teilgebiet in der w -Ebene nicht, d. h., der Weg der Funktion $w(z)$ verbleibt bei und nach einer (vollständigen) Umkreisung auf dem Riemann-Blatt ihres Hauptwertes.

7 Komplexe Differentiation

- „Die komplexe Funktion $f(z)$ heißt an der Stelle $z = z_0$ **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = f'(z_0) = \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0}$$

für *jede* Folge $z_n \rightarrow z_0$ existiert, dabei aber unabhängig von der speziellen Wahl der Folge ist. ... Alle in z_0 differenzierbaren Funktionen sind dort auch stetig. Die Differenzierbarkeit im Komplexen setzt voraus, dass die Zahlenfolge $\{z_n\}$ aus jeder beliebigen Richtung in der komplexen Zahlenebene an z_0 herangeführt werden kann. Dies ist ein schärferes Kriterium als das für die Differenzierbarkeit einer reellen Funktion zweier reeller Variabler x, y⁴

- **Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen (CRD):**

$$u + iv = f(z) = f(x + iy) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = i f'(z)$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\boxed{\text{(I)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \text{(II)} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .}$$

Damit eine komplexe Funktion $f(z)$ differenzierbar ist, muss sie *beide* Cauchy-Riemann'schen Dgln. erfüllen.

- Sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil einer differenzierbaren komplexen Funktion $f(z)$ genügen der Laplace-Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{(I)} + \frac{\partial}{\partial y} \text{(II)} : \left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv \Delta u = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \text{(I)} + \frac{\partial}{\partial x} \text{(II)} : \left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv \Delta v = 0 .$$

⁴Zitiert aus dem Springer-Lehrbuch von Wolfgang Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 3 – Elektrodynamik, 7. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 308.

- Eine komplexwertige, kurz gesagt komplexe Funktion $f(z) : G \rightarrow \mathbb{C}$, $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **holomorph**⁵ oder auch analytisch bzw. regulär, wenn sie in *allen* Punkten von G **eindeutig** ist und **komplex differenzierbar** ist.

Eigenschaften holomorpher Funktionen :

- * Holomorphe Funktionen sind beliebig oft (stetig) differenzierbar.
- * Holomorphe Funktionen lassen sich in jedem Punkt (lokal) in eine Potenzreihe bzw. in eine Laurent-Reihe (s. Kapitel 10) entwickeln.
- * Eine holomorphe Funktion $f(z)$ ist genau dann im Punkt z_0 komplex differenzierbar, wenn sie dort auch total differenzierbar ist. Das bedeutet, dass ihre totale Ableitung sogar $\mathbb{C}$ -linear ist und dass die totale Ableitung die Darstellungsmatrix der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ bezüglich der kanonischen Basis $\{1, i\}$ besitzt.
- * Bezüglich der reellen Funktionen u, v besitzt die totale Ableitung einer holomorphen Funktion $f(z)$ als Darstellungsmatrix die Jacobi-Matrix $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$. Folglich ist die komplexe Funktion $f(z)$ genau dann komplex differenzierbar, wenn sie reell differenzierbar ist und für u, v die Cauchy-Riemann'schen Dgln. $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ gelten.

Beispiele :

- * **Ganze Funktionen** sind holomorphe Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $G = \mathbb{C}$, die also auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind, wie z. B.
 1. Konstanten $f(z) = \text{const}$,
 2. Polynome $z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ und folglich auch die Funktionen $f(z) = z$ und $f(z) = z^n$,
 3. trigonometrische und hyperbolische Funktionen,
 4. die Exponentialfunktion $f(z) = e^z$.
- * **Holomorphe nichtganze Funktionen** sind komplexe Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$, wie z. B.
 1. gebrochen rationale Funktionen $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ außer an den Nullstellen ihres Nennerpolynoms $h(z)$, wo sie isolierte Polstellen besitzen,
 2. die Logarithmusfunktion in allen Punkten aus $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.
- * **Hermiteisch holomorphe Funktionen** $f(z)$ besitzen die Eigenschaft

$$\operatorname{Re} f(x \pm i\epsilon) = \operatorname{Re} \overline{f}(x \mp i\epsilon) = \operatorname{Re} f(x \mp i\epsilon),$$

$$\operatorname{Im} f(x \pm i\epsilon) = \operatorname{Im} \overline{f}(x \mp i\epsilon) = -\operatorname{Im} f(x \mp i\epsilon).$$

bzw.

$$f(z) = f(x + i\epsilon) = \overline{f}(x - i\epsilon) = \overline{f}(\bar{z}) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0 \text{ („nahe“ der reellen Achse).}$$

⁵Holo-morph heißt ganz-förmig oder von vollständiger Gestalt.

Daraus folgt

$$f(x + i\epsilon) - f(x - i\epsilon) = i \operatorname{Im} f(x + i\epsilon) - [-i \operatorname{Im} f(x + i\epsilon)] = 2i \operatorname{Im} f(x + i\epsilon) .$$

Beispielsweise sind Polynome hermitesch holomorph, denn

$$z = z_1 \cdot z_2 , \quad \bar{z} = \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad \implies$$

$$f(z) = z^n \quad \Rightarrow \quad f(\bar{z}) = (\bar{z})^n \quad \Rightarrow \quad \overline{f(\bar{z})} = \overline{(\bar{z})^n} = \overline{(\bar{z}^n)} = z^n = f(z) .$$

* **Nicht holomorph** sind beispielsweise

1. die Betragsfunktion $z \mapsto |z|$ und folglich auch $z \mapsto |z|^n$,
2. die Projektionsfunktionen $z \mapsto \operatorname{Re}\{z\}$ und $z \mapsto \operatorname{Im}\{z\}$,
3. die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$, also $f(z) = \bar{z}$
mit $z = x + iy \Leftrightarrow \bar{z} = x - iy$.

• Darstellung der **komplexen Ableitung**.⁶

Wir gehen wieder aus von der Beziehung

$$u(x, y) + iv(x, y) = f(z) = f(x + iy) ,$$

wobei f auf $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorph sein soll:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'(z) \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=1} = f'(z) , \quad \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = f'(z) \cdot \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{=i} = i f'(z) \quad \Leftrightarrow$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y .$$

f muss also in G die Cauchy-Riemann'schen Dgln. $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$ erfüllen.

⁶Nach dem Vorlesungsskript von Jens Struckmeier, Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften, Seite 66 und Seite 67, <https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/kf/12/vorlesungen/vorlesung-kf.pdf>

Ist also $f(z)$ holomorph auf $G \subseteq \mathbb{C}$ und folglich in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar, so gilt kurz

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0) . \quad (8)$$

Weil $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ ist, können wir für (8) verallgemeinernd auch

$$f'(z_0) = a(z_0) + i b(z_0) , \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (9)$$

schreiben und mit

$$z - z_0 = (x + i y) - (x_0 + i y_0) = (x - x_0) + i (y - y_0)$$

erhalten wir aus (9)

$$\begin{aligned} f'(z_0) \cdot (z - z_0) &= (a(z_0) + i b(z_0)) \cdot [(x - x_0) + i (y - y_0)] \\ &= a \cdot (x - x_0) - b \cdot (y - y_0) + i (b \cdot (x - x_0) + a \cdot (y - y_0)) . \end{aligned} \quad (10)$$

Interpretieren wir jetzt $f(z)$ als vektorwertige, **total differenzierbare** Funktion zweier reeller Variablen, also $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, so erhält (10) die Gestalt der Matrixengleichung

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x - x_0) - b(y - y_0) \\ b(x - x_0) + a(y - y_0) \end{pmatrix} .$$

Diese Darstellung ergibt mit den Umbenennungen $a \rightarrow u_x$ und $b \rightarrow v_x$, also von (9) zurück nach (8)⁷

$$\begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x - x_0) - v_x(y - y_0) \\ v_x(x - x_0) + u_x(y - y_0) \end{pmatrix}$$

und unter Berücksichtigung der Cauchy-Riemann'schen Dgln. $-v_x = u_y$ und $u_x = v_y$ schließlich

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0) \\ v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0) \end{pmatrix} .$$

„Satz: Die Funktion $f(z)$ ist im Punkt $z_0 \in G$ genau dann komplex differenzierbar, wenn $f(z)$ als Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dort total differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen gelten.“⁸

⁷Eine komplexe Matrix $A = \begin{pmatrix} u_x & -iv_x \\ iv_x & u_x \end{pmatrix}$ ist hermitesch, denn die zu A komplex-konjugierte Matrix $\overline{A}$ ist gleich der transponierten Matrix A^T . Für eine hermitesche Matrix A gilt also $(\overline{A})^T = A^\dagger = A$.

⁸Zitiert aus dem Vorlesungsskript von Jens Struckmeier, Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften, Seite 67. Allerdings wurde als Zugeständnis an die Konsistenz der Darstellung für den Definitionsbereich im Ausdruck $z_0 \in D$ das Symbol G verwendet.

Beispiele:

1. Die Funktion $f(z) = z = x + iy$ mit $u = x$ und $v = y$ ist holomorph, weil sie mit $u_x = v_y = 1$ und $u_y = -v_x = 0$ die Cauchy-Riemann'schen Dgln. erfüllt:

$$f(z) = z \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \frac{\partial}{\partial x}x + i\frac{\partial}{\partial x}y = \frac{\partial}{\partial y}y - i\frac{\partial}{\partial y}x = 1.$$

2. Die Funktion $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$ ist holomorph, weil sie mit $u_x = v_y = 2x$ und $u_y = -v_x = -2y$ die Cauchy-Riemann'schen Dgln. erfüllt:

$$\begin{aligned} f(z) = z^2 \quad \Rightarrow \quad f'(z) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) + i\frac{\partial}{\partial x}(2xy) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy) - i\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) \\ &= 2x + i2y = 2z. \end{aligned}$$

3. Die Exponentialfunktion

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)},$$

ist holomorph, denn sie erfüllt mit

$$u_x = v_y = e^x \cos y, \quad u_y = -v_x = -e^x \sin y$$

die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen.

- „Es gelten die üblichen, aus dem Reellen bekannten **Rechenregeln für die komplexe Ableitung**: Wenn f, g holomorph sind, so auch $\alpha f + \beta g$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ sofern $g \neq 0$ und $h(z) = f(g(z))$ (sofern das Bild von g im Definitionsbereich von f liegt) und es gelten die üblichen Regeln:

$$(a) \quad (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad (\text{Linearität})$$

$$(b) \quad (fg)' = f'g + fg' \quad (\text{Produktregel})$$

$$(c) \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

$$(d) \quad \left(f(g(z))\right)' = f'(y)\Big|_{y=g(z)} g'(z) \quad (\text{Kettenregel})$$

Beweis: kann man wörtlich aus der Theorie der Funktionen einer reellen Variablen übernehmen.“⁹

⁹Zitiert aus dem Vorlesungsskript von Manfred Dobrowolski, Einführung in die Funktionentheorie, Seite 21, www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~dobro/fu/b.pdf

- **Modifizierte Kettenregel:**

Ist $f(z)$ holomorph auf G und $C : [a, b] \rightarrow G$ eine $\mathcal{C}^1$ -Kurve, d. h. $C(t)$ ist in G stetig differenzierbar, dann gilt für $f(z)$ längs der Kurve $C(t)$, also für $f(C(t))$, die Kettenregel

$$\boxed{\frac{d}{dt}f(C(t)) = f'(C(t)) \cdot \dot{C}(t)}.$$

Wegen $z = x + iy$ ändern sich allgemein u und v in $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sowohl in x -Richtung als auch in y -Richtung bei einer Änderung von z . Ändert sich jetzt z in Abhängigkeit eines Parameters t , so erhalten wir mit

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{C}_1 \quad \text{und} \quad \frac{dy(t)}{dt} = \dot{C}_2$$

aus dem Differential

$$df = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + i \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx + i \frac{\partial v}{\partial y} \cdot dy$$

den Differentialquotienten

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \left(u_x \cdot \dot{C}_1 + u_y \cdot \dot{C}_2 \right) + i \left(v_x \cdot \dot{C}_1 + v_y \cdot \dot{C}_2 \right) \\ &\stackrel{\text{CRD}}{=} u_x \cdot \dot{C}_1 - v_x \cdot \dot{C}_2 + i v_x \cdot \dot{C}_1 + i u_x \cdot \dot{C}_2 \\ &= (u_x + i v_x) \cdot \dot{C}_1 + (i u_x - v_x) \cdot \dot{C}_2 \\ &= (u_x + i v_x) \cdot (\dot{C}_1 + i \dot{C}_2) \\ &= f'(C(t)) \cdot \dot{C}(t) . \quad \square \end{aligned}$$

Darin bedeuten

$$f'(C(t)) \Rightarrow f'(z) = u_x + i v_x$$

und

$$\dot{C}(t) = \dot{C}_1 + i \dot{C}_2 = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} .$$

8 Komplexe Integration – Grundlegendes

Definition : Eine komplexwertige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ einer reellen Variablen ist integrierbar, falls der Real- und Imaginärteil von f integrierbar sind, und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &:= \int_a^b \operatorname{Re}\{f(t)\} dt + i \int_a^b \operatorname{Im}\{f(t)\} dt = R e^{i\varphi} \\ &= R \cdot \cos \varphi + i R \cdot \sin \varphi, \quad 0 < R \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es gelten zu dem Reellen analoge Eigenschaften, wie zum Beispiel Linearität. Weiter gilt stets:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Beweis : Man berechnet

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= R = e^{-i\varphi} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{-i\varphi} f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}\{e^{-i\varphi} f(t)\} dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\varphi} f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Boxinhalt zitiert aus dem Vorlesungsskript von Jens Struckmeier, Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften, Seite 89.

Erläuterungen zum Boxinhalt :

- Die Integralabschätzung $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ wird auch **Dreiecksungleichung für Integrale** genannt.
- R und φ sind hier voneinander *abhängig*, d. h., es ergeben sich nur jeweils ein Lösungs- R und ein Lösungs- φ .
- Im Beweis wurden die folgenden Zusammenhänge berücksichtigt:
 - * $e^{-i\varphi} \cdot R e^{i\varphi} = R e^{i\varphi - i\varphi} = R e^0 = R$.
 - * Aus dem speziellen Resultat R, φ folgt hier, dass das Integral über den Imaginärteil von $e^{-i\varphi} f(t)$ verschwindet.
 - * $|e^{-i\varphi} f(t)| = \sqrt{e^{-i\varphi} f(t) \cdot e^{i\varphi} \overline{f(t)}} = |f(t)|$.
 - * Analog zu $\operatorname{Re}\{z\} \leq |z|, z \in \mathbb{C}$ gilt auch

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\varphi} f(t)\} \leq |e^{-i\varphi} f(t)|.$$
 - * Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(x_0), \quad a \leq x_0 \leq b$$
 folgt deshalb

$$\int_a^b \operatorname{Re}\{e^{-i\varphi} f(t)\} dt \leq \int_a^b |e^{-i\varphi} f(t)| dt.$$

Bei der (komplexen) Integration im Rahmen der Funktionentheorie geht es im Wesentlichen um **Kurvenintegrale**, die auch **Wegintegrale** oder **Linienintegrale** genannt werden. Analog zu den reellen Kurvenintegralen

$$\begin{aligned}\int_C f(\vec{r}) \, ds &= \int_C f(x, y) \cdot ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \, dt \\ &:= \int_a^b f(C(t)) \cdot \|\dot{C}\| \, dt\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \, dt \\ &:= \int_a^b \langle F(C(t)), \dot{C}(t) \rangle \, dt\end{aligned}$$

mit $C : [a, b] \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\vec{F} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ handelt es sich bei der komplexen Integration ebenfalls um Kurvenintegrale:

Auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene mit $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\boxed{\int_C f(z) \, dz := \int_a^b f(C(t)) \cdot \dot{C}(t) \, dt = \int_a^b g(t) \, dt}$$

das komplexe Integral der Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ längs der $\mathcal{C}^1$ -Kurve $C : [a, b] \rightarrow G$, wobei die komplexwertige Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ gleich der in der Box zur Definition der komplexen Integration verwendeten Funktion $f(t)$ ist.

Ausgehend vom Grenzübergang *Riemann-Summe* $\rightarrow$ *Integral* lassen sich die „Differenziale“ dz in $\int_C f(z) \, dz$ als infinitesimal kleine „Verschiebungen“ von z längs der Kurve C in der komplexen Zahlenebene auffassen, die nach Multiplikation mit dem zugehörigen $f(z)$ und anschließender Aufsummierung bzw. Integration das Kurvenintegral liefern.

Die **Standardabschätzung für Wegintegrale** im Komplexen ist

$$\boxed{\left| \int_C f(z) \, dz \right| \leq L(C) \cdot \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|}.$$

Darin ist $C = C(z(t))$ eine parametrisierbare Kurve in der komplexen Zahlenebene und $L(C)$ ist die Länge der Kurve, längs der die Integration erfolgt.

8.1 Einführende Beispiele für komplexe Integrale

1. Komplexe Funktion $f(z) = z$ in der Polarform $z = re^{it}$,
Integrationskurve $C(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, also ein Vollkreis mit Radius r
und einem Umlauf um den Koordinatenursprung:

$$\begin{aligned}\oint_C z \, dz &= \int_0^{2\pi} re^{it} \cdot ire^{it} \, dt \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} e^{2it} \, dt \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} [\cos(2t) + i \sin(2t)] \, dt \\ &= -r^2 \int_0^{2\pi} \sin(2t) \, dt + ir^2 \int_0^{2\pi} \cos(2t) \, dt \\ \oint_C z \, dz &= 0.\end{aligned}$$

$f(z) = z$ ist eine ganze Funktion, also holomorph
gemäß $f(z) = x + iy \Rightarrow u_x = v_y = 1$ und $u_y = -v_x = 0$.

Das von C eingeschlossene Gebiet ist einfach zusammenhängend.

2. Komplexe Funktion $f(z) = \bar{z}$ in der Polarform $\bar{z} = re^{-it}$,
Integrationskurve $C(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, also ein Vollkreis mit Radius r
und einem Umlauf um den Koordinatenursprung:

$$\begin{aligned}\oint_C \bar{z} \, dz &= \int_0^{2\pi} re^{-it} \cdot ire^{it} \, dt = ir^2 \int_0^{2\pi} dt \\ &= r^2 \cdot 2\pi i.\end{aligned}$$

$f(z) = \bar{z}$ ist nicht holomorph,
denn $f(z) = x - iy \Rightarrow u_x = 1 \neq v_y = -1$ und $u_y = -v_x = 0$.

3. Komplexe Funktion $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{r^2}$,

Integrationskurve $C(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, also ein Vollkreis mit Radius r
und einem Umlauf um den Koordinatenursprung:

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{z} \, dz &= \frac{1}{r^2} \oint_C \bar{z} \, dz \stackrel{2. \text{ Beispiel}}{=} \frac{1}{r^2} r^2 \cdot 2\pi i \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

Außer im Punkt $z = 0$ ist $f(z) = 1/z$ überall holomorph,
denn $u_x = v_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ und $u_y = -v_x = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

Das Integral liefert hier den Betrag $2\pi i$, d. h., es ist ungleich null, weil die Funktion $f(z) = 1/z$ an der Stelle $z = 0$ nicht definiert ist, also im Punkt z_0 eine isolierte Singularität besitzt, die im Innern der doppel­punkt­freien geschlossenen Kurve C liegt. Speziell ist z_0 hier eine Polstelle. Die Kurve C liegt zwar ganz in G , aber das von C eingeschlossene Gebiet ist wegen der Polstelle nicht einfach­zusammenhängend. G besitzt an der Polstelle im Innern von C gleichsam ein Loch, weshalb sich C nicht auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

4. Komplexe Funktion $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ für $|z_0| > |z| \Rightarrow \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$,

Integrationskurve $C(t) = r e^{it} = z \Rightarrow |z| = r$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, also ein Vollkreis mit Radius r und einem Umlauf um den Koordinatenursprung.

Wegen $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$ können wir die Formel (2) für die unendliche geometrische Reihe auf die Funktion $\frac{1}{z - z_0}$ anwenden und erhalten

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{z_0}} = -\frac{1}{z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0} \right)^n.$$

Damit bilden wir jetzt das Kurvenintegral:

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{|z|=r} -\frac{1}{z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0} \right)^n dz = -\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^n} z^n dz.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz dürfen wir Summation und Integration vertauschen. Mit dem Ergebnis des Beispiels 5 resultiert schließlich

$$-\frac{1}{z_0} \oint_{|z|=r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^n} z^n dz = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{n+1}} \underbrace{\oint_{|z|=r} z^n dz}_{= 0 \text{ gemäß Bsp. 5}},$$

$$\oint_{|z|=r} \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{|z|=r} (z - z_0)^{-1} dz = 0 \quad \text{für } |z_0| > |z|.$$

Außer im Punkt z_0 ist $f(z) = 1/(z - z_0) = (z - z_0)^{-1}$ überall holomorph, denn

$$u_x = v_y = \frac{(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2},$$

$$u_y = -v_x = -\frac{2(x - x_0)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2}.$$

Weil die Polstelle z_0 wegen $|z_0| > |z|$ in diesem Fall außerhalb der geschlossenen, doppel­punkt­freien Kurve C liegt, ist das von C eingeschlossene Gebiet einfach­zusammenhängend und $f(z)$ dort überall holomorph. Folglich verschwindet das Umlaufintegral gemäß dem Cauchy-Integralsatz.

5. Komplexe Funktion $f(z) = z^n$ in der Polarform $z^n = (r \cdot e^{it})^n = r^n e^{int}$,

Integrationskurve $C(t) = re^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, also ein Vollkreis mit Radius r und einem Umlauf um den Koordinatenursprung:

Ausgehend von $f(z) = z$ und $C(t) = re^{it}$ in Beispiel 1 erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \oint_C z^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot i r e^{it} dt \\ &= -r^{n+1} \int_0^{2\pi} \sin[(n+1)t] dt + i r^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos[(n+1)t] dt \\ \oint_C z^n dz &= \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1, \\ 0 & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

das gleiche Ergebnis wie im Beispiel 6.

Anmerkung:

Alle Funktionen $f(z) = z^n$ mit $n \neq -1$ besitzen die komplexe Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{n+1} \cdot z^{n+1}$.

6. Komplexe Funktion $f(z) = (z - z_0)^n$ in der Polarform

$$(z - z_0)^n = (r \cdot e^{it})^n = r^n e^{int},$$

Integrationskurve $C(t) = z_0 + r e^{it}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, also ein Vollkreis mit Radius r und einem Umlauf um z_0 , denn es gilt

$$\begin{aligned} z &= z_0 + (z - z_0) \\ &= z_0 + |z - z_0| \cdot e^{it} = z_0 + r e^{it} =: C(t) \\ \Rightarrow \quad z - z_0 &= r e^{it}, \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned} \oint_C (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot i r e^{it} dt = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= r^{n+1} \left(- \int_0^{2\pi} \sin[(n+1)t] dt + i \int_0^{2\pi} \cos[(n+1)t] dt \right) \\ \oint_C (z - z_0)^n dz &= \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1, \\ 0 & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Wie man sieht, ist das Ringintegral $\oint_C (z - z_0)^n dz$ für alle n unabhängig vom Radius r des Umlaufkreises C um z_0 . Diese Tatsache wird uns im Zusammenhang mit der Wegunabhängigkeit des Ringintegrals bei der Herleitung der Cauchy-Integralformel im Abschnitt 8.3 erneut beschäftigen.

8.2 Cauchy-Integralsatz

Es gelte

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) \\ &= \int_C \vec{p}_{\text{re}} \cdot d\vec{r} + i \int_C \vec{p}_{\text{im}} \cdot d\vec{r}\end{aligned}$$

mit $\vec{p}_{\text{re}} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$, $\vec{p}_{\text{im}} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$, $d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$.

Unter Berücksichtigung der Cauchy-Riemann'schen Dgln. ist aber

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{p}_{\text{re}} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ u & -v \end{vmatrix} = - \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \stackrel{(\text{II})}{=} 0, \\ \text{rot } \vec{p}_{\text{im}} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{(\text{I})}{=} 0.\end{aligned}$$

Die **Rotationsfreiheit** der Vektorfelder $\vec{p}_{\text{re}} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ und $\vec{p}_{\text{im}} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ bedeutet:

- Das Linienintegral entlang C , also $\int_C f(z) dz$, ist **wegunabhängig**.
- Für alle **geschlossenen Wege**, die samt der umlaufenen Fläche ganz in einem **einfach-zusammenhängenden Gebiet** G liegen, in dem $f(z)$ **holomorph** ist, gilt der **Cauchy-Integralsatz** (13)

$$\boxed{\oint_C f(z) dz = 0} . \quad (13)$$

Weiterhin folgt aus den Cauchy-Riemann'schen Dgln., dass die Vektorfelder $\vec{p}_{\text{re}} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ und $\vec{p}_{\text{im}} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ **divergenzfrei** sind:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{p}_{\text{re}} &= \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \stackrel{(\text{I})}{=} 0, \\ \text{div } \vec{p}_{\text{im}} &= \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \stackrel{(\text{II})}{=} 0. \quad \square\end{aligned}$$

Beispiel zur Wegunabhängigkeit des Linienintegrals holomorpher Funktionen:

Wir berechnen das Linienintegral der holomorphen Funktion $f(z) = z^2$ vom Anfangspunkt -1 (auf der reellen Achse) zum Endpunkt $+1$ (auf der reellen Achse) zunächst längs der reellen Achse und dann längs des oberen Halbkreises mit dem Radius $r = 1$ in der komplexen Zahlenebene ebenfalls von -1 bis $+1$:

- $C := z(t) = t, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad dz = dt,$

$$\int_C z^2 dz = \int_{-1}^1 (z(t))^2 dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

- $C := z(\varphi) = e^{i\varphi}, \quad \pi \leq \varphi \leq 0, \quad \Rightarrow \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi,$
denn $z(\varphi = \pi) = e^{i\pi} = -1$ und $z(\varphi = 0) = e^0 = 1,$

$$\begin{aligned} \int_C z^2 dz &= \int_{\pi}^0 (z(\varphi))^2 \cdot ie^{i\varphi} d\varphi = \int_{\pi}^0 e^{2i\varphi} \cdot ie^{i\varphi} d\varphi \\ &= i \int_{\pi}^0 e^{3i\varphi} d\varphi = \frac{i}{3i} \cdot e^{3i\varphi} \Big|_{\pi}^0 = \frac{1}{3} \cdot [1 - (-1)] = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist das Linienintegral einer holomorphen Funktion unabhängig vom Weg zwischen Anfangs- und Endpunkt des Integrals. Es hängt also nur vom Anfangs- und Endpunkt der Integration ab.

8.3 Cauchy-Integralformel

8.3.1 Vorbetrachtungen

(s. Abb. 1 und Abb. 2)

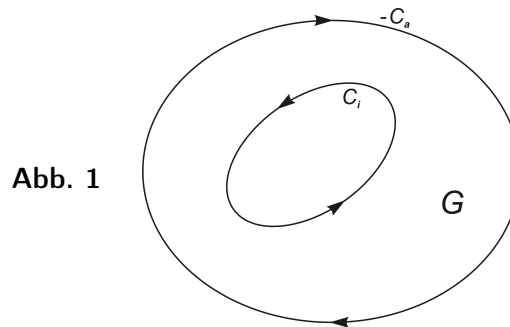


Abb. 1

Das von den geschlossenen Wegen $-C_a$ und C_i eingeschlossene Ringgebiet gehöre ganz zu einem Gebiet G , in dem $f(z)$ holomorph ist. C_i liege innerhalb von $-C_a$ und das Gebiet innerhalb von C_i muss nicht zu G gehören. $-C_a$ besitzt den zu C_a und zu C_i entgegengesetzten Umlaufsinn. Wir untersuchen jetzt die Beziehung zwischen den Linienintegralen

$$\oint_{C_a} f(z) dz \quad \text{und} \quad \oint_{C_i} f(z) dz$$

und zerschneiden dazu das Ringgebiet durch die zwei Wege

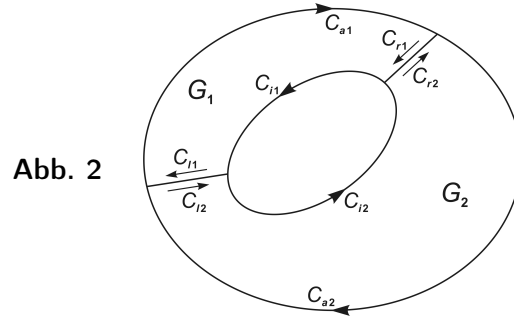
$$C_{l1} = -C_{l2} \quad \text{und} \quad C_{r1} = -C_{r2},$$

sodass wir zwei Linienintegrale bilden können entlang der geschlossenen Wege

$$C_{a1} + C_{r1} + C_{i1} + C_{l1} \quad \text{um} \quad G_1$$

und

$$C_{a2} + C_{l2} + C_{i2} + C_{r2} \quad \text{um} \quad G_2 .$$



Wenn $f(z)$ sowohl in G_1 als auch in G_2 holomorph ist, gilt mit (13)

$$\underbrace{\int_{C_{a1}} f(z) dz}_A + \underbrace{\int_{C_{r1}} f(z) dz}_X + \underbrace{\int_{C_{i1}} f(z) dz}_U + \underbrace{\int_{C_{l1}} f(z) dz}_Y = 0 , \quad (14)$$

$$\underbrace{\int_{C_{a2}} f(z) dz}_B + \underbrace{\int_{C_{l2}} f(z) dz}_{-Y} + \underbrace{\int_{C_{i2}} f(z) dz}_V + \underbrace{\int_{C_{r2}} f(z) dz}_{-X} = 0 . \quad (15)$$

Die Addition von (14) und (15) liefert dann

$$\begin{aligned} A + X + U + Y + B - Y + V - X &= 0 \\ A + B + U + V &= 0 \\ U + V &= -(A + B) . \end{aligned}$$

Wegen

$$C_{i1} + C_{i2} = C_i \quad \text{und} \quad C_{a1} + C_{a2} = -C_a$$

ist

$$\begin{aligned} U + V &= \int_{C_{i1}} f(z) dz + \int_{C_{i2}} f(z) dz = \oint_{C_i} f(z) dz , \\ -(A + B) &= - \left(\int_{C_{a1}} f(z) dz + \int_{C_{a2}} f(z) dz \right) = - \oint_{-C_a} f(z) dz = \oint_{C_a} f(z) dz . \end{aligned}$$

Wir stellen fest:

Wenn ein äußerer geschlossener Weg C_a und ein innerhalb von C_a gelegener geschlossener Weg C_i den gleichen Umlaufsinn besitzen, ganz im Gebiet G liegen und ein

„Ringgebiet“ einschließen, in dem $f(z)$ holomorph ist, dann gilt

$$\oint_{C_a} f(z) dz = \oint_{C_i} f(z) dz \quad (16)$$

unabhängig von der Gestalt der Kurven C_a und C_i und unabhängig davon, ob das Innere von C_i ganz zu G gehört oder nicht. Diese Eigenschaft wird **Invarianz des Wegintegrals** oder auch **Wegunabhängigkeit des Ringintegrals** genannt.

Anwendungsbeispiel:

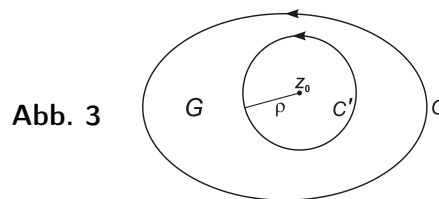
Berechnung des Umlaufintegrals

$$I = \oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz .$$

Die komplexe Funktion

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)} = \frac{1}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \\ &= \frac{(x - x_0) - i(y - y_0)}{[(x - x_0) + i(y - y_0)] \cdot [(x - x_0) - i(y - y_0)]} \\ &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + i \frac{y_0 - y}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = u + iv \end{aligned}$$

erfüllt die Cauchy-Riemann'schen Dgln. und ist folglich, außer im Punkt $z = z_0$, überall holomorph. Wegen (16) dürfen wir zur Berechnung von I einen beliebigen, den Punkt z_0 umschließenden Weg C benutzen. Aus Bequemlichkeitsgründen wählen wir deshalb speziell den Kreis C' um z_0 mit dem Radius ϱ (s. Abb. 3).



$$C' := z = z_0 + \varrho e^{i\varphi} \Rightarrow dz = d\varphi \cdot i \varrho e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$

Das Integral I erhält damit die Gestalt

$$\oint_{C'} dz \frac{1}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot i \varrho e^{i\varphi} \frac{1}{\varrho e^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = i 2\pi .$$

Für jeden, den Punkt z_0 umschließenden Weg C gilt also

$$I = \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \quad (17)$$

Dieses Ergebnis werden wir im Folgenden noch verwenden.

8.3.2 Herleitung der Cauchy-Integralformel

Bei der Herleitung der Cauchy-Integralformel benutzen wir die Taylor-Entwicklung von $f(z)$ an der Stelle z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (18)$$

Dabei sei $f(z)$ überall auf einem Gebiet G holomorph mit $z_0 \in G$ und einer Kurve C , die ganz in G liegt und den Punkt z_0 einmal im positiven Sinn umläuft. Für das entsprechende Kurvenintegral über die Funktion $\frac{f(z)}{z-z_0}$ erhalten wir dann mit (18)

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_C \frac{1}{z - z_0} \left(f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \right) dz \\ &= \oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1} dz \\ &= f(z_0) \underbrace{\oint_C \frac{dz}{z - z_0}}_{= 2\pi i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \underbrace{\oint_C (z - z_0)^{n-1} dz}_{= 0 \text{ gemäß (12) und (16)}} \\ &= f(z_0) \cdot 2\pi i, \end{aligned}$$

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz}. \quad (19)$$

Die **Cauchy-Integralformel** (19) bringt zum Ausdruck, dass die Funktionswerte f auf dem Rand C ausreichen, um alle Funktionswerte von f im Inneren von C zu bestimmen.

Beweis¹⁰: Der Weg C lässt sich innerhalb von $G \setminus \{z_0\}$ infolge (16) auf einen Kreis $K(r, t) = z_0 + r e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ zusammenziehen. Daher gilt

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{r e^{it}} i r e^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt \end{aligned}$$

für alle in G möglichen r und insbesondere auch für $r \rightarrow 0$:

$$i \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt \xrightarrow{r \rightarrow 0} f(z_0) \cdot i \int_0^{2\pi} dt = f(z_0) \cdot 2\pi i.$$

¹⁰Beweis nach dem Vorlesungsskript von Jens Struckmeier, Komplexe Funktionen für Ingenieure, Seite 109 und Seite 110.

Wegen (16) ist das Umlaufintegral $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dt$ unabhängig von r bzw. von der Form von C , sodass

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0) \cdot 2\pi i \quad \Leftrightarrow \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz . \quad \square$$

Alternative Herleitung der Cauchy-Integralformel:

Die komplexe Funktion $f(z)$ sei holomorph in G . Folglich ist $f(z_0)$ endlich und $f(z)$ in z_0 differenzierbar. Die geschlossene Jordankurve C liege vollständig in G , also $C \subset G$. Dann gilt nach dem Cauchy-Integralsatz

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

und mit

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \Rightarrow \quad g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

auch

$$\begin{aligned} \oint_C g(z) dz &= 0 = \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &= \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz \\ 0 &= \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \cdot 2\pi i \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

9 Verallgemeinerte Cauchy-Integralformel

9.1 Vorbetrachtungen

- Taylor-Entwicklung der Funktion

$$g(z) = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{c - z_0}}$$

mit $c \in \mathbb{C}$ und $c \neq z_0$ an der Stelle z_0 :

$$\begin{aligned} g^{(n)}(z) \Big|_{z_0} &= \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{c - z_0}} \Big|_{z_0} = \frac{d^n}{dz^n} \left[1 - \frac{z - z_0}{c - z_0} \right]^{-1} \Big|_{z_0} \\ &= \frac{n!}{(c - z_0)^n} \quad \Rightarrow \\ g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot g^{(n)}(z) \Big|_{z_0} \cdot (z - z_0)^n , \end{aligned}$$

$$g(z) = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{c - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(c - z_0)^n} (z - z_0)^n .$$

- Die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{c-z}$$

mit $c \in \mathbb{C}$ und $c \neq z_0$ an der Stelle z_0 ist damit folglich

$$\begin{aligned} \frac{1}{c-z} &= \frac{1}{(c-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{c-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{c-z_0}} \\ &= \frac{1}{c-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(c-z_0)^n} (z-z_0)^n, \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{c-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(c-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot (z-z_0)^n. \quad (20)$$

9.2 Herleitung der verallgemeinerten Cauchy-Integralformel

Mit $|c| > |z| \Rightarrow \left| \frac{z-z_0}{c-z_0} \right| < 1$ sind die Funktion $\frac{(z-z_0)^n}{(c-z_0)^{n+1}}$ und mit (20) auch die Potenzreihe in z

$$f(c) \cdot \frac{1}{c-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(c)}{(c-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$$

gleichmäßig konvergent, wodurch Summation $\sum \dots$ und Integration $\int \dots$ vertauschbar sind. Daraus folgt mit der Cauchy-Integralformel (19) und unter den Bedingungen für ihre Gültigkeit

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(c)}{c-z} dc = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(c)}{(c-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n dc \\ f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(c)}{(c-z_0)^{n+1}} dc}_{\text{Taylor-Entwicklung von } f(z)} \cdot (z-z_0)^n \\ &= \text{Taylor-Entwicklung von } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{1}{n!} \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z_0} \cdot (z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{n!} \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z_0} &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(c)}{(c-z_0)^{n+1}} dc \Leftrightarrow \\ f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(c)}{(c-z_0)^{n+1}} dc. \end{aligned}$$

Mit den Umbenennungen $z_0 \rightarrow z$ und $c \rightarrow \zeta$ resultiert daraus die übliche Darstellung (21) der **verallgemeinerten Cauchy-Integralformel** bezüglich einer überall auf G **holomorphen Funktion** $f(z)$ unter der Bedingung, dass die geschlossene doppeltpunktfreie Kurve C ganz in G liegt und den Punkt z_0 einmal in positiver Richtung umläuft:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta. \quad (21)$$

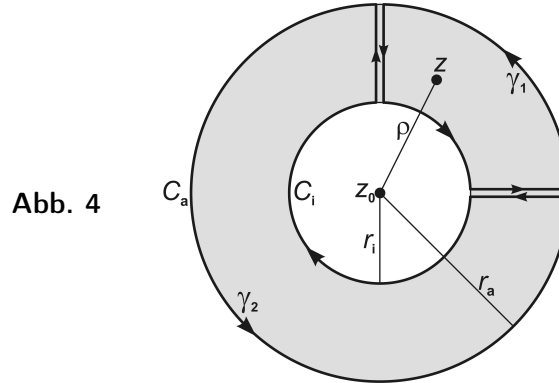
Die verallgemeinerte Cauchy-Integralformel kann auch als Integralformel zur Ableitung einer holomorphen Funktion $f(z)$ angesehen werden.

10 Laurent-Reihen

10.1 Herleitung der Laurent-Reihenentwicklung

Die Laurent-Reihenentwicklung ist eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Potenzreihenentwicklung.

Bei der Herleitung der Entwicklung einer holomorphen Funktion $f(z)$ in ihre Laurent-Reihe gehen wir aus vom Cauchy-Integralsatz (13) und von der Cauchy-Integralformel (19), benutzen dabei aber zur besseren Übersicht die Umbenennungen $z_0 \rightarrow z$ und $z \rightarrow \zeta$ und verwenden beim Cauchy-Integralsatz im Integranden statt $f(z)$ die Funktion $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$.



Gemäß Abbildung 4 erhalten wir folglich mit dem Cauchy-Integralsatz das γ_2 -Umlaufintegral

$$0 = \oint_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{=0}$$

und mit der Cauchy-Integralformel das γ_1 -Umlaufintegral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Beide Integrale besitzen den gleichen (positiven) Umlaufsinn. Bei ihrer Addition trägt das γ_2 -Umlaufintegral nichts zur Summe bei und wir erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta . \quad (22)$$

In (22) heben sich aber die Teilintegrale über die gegensinnig durchlaufenen radialen Strecken auf, sodass die Umlaufintegrale über die Kurven bzw. Kreise C_i und C_a übrig bleiben (s. Abb.4). Dabei stellen wir fest, dass das C_a -Umlaufintegral einen positiven, das C_i -Umlaufintegral aber einen negativen Umlaufsinn besitzt. Letzteres nimmt deshalb ein negatives Vorzeichen an, sodass für einen Punkt z im Ringgebiet zwischen C_a und C_i gemäß $r_a > \rho > r_i$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (23)$$

resultiert. Unter Verwendung von (20) und mit der Umbenennung $c \rightarrow \zeta$, also mit

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^n} (z - z_0)^n \\ \frac{1}{\zeta - z} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\end{aligned}$$

führen wir jetzt die Taylor-Entwicklung von (23) bezüglich z um den Entwicklungspunkt z_0 durch.

Taylor-Entwicklung des C_a -Umlaufintegrals

für die Punkte ζ auf C_a mit $|\zeta - z_0| > |z - z_0|$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}_{a_n} (z - z_0)^n ,\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Taylor-Entwicklung des C_i -Umlaufintegrals

für die Punkte ζ auf C_i mit $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$:

Wir ziehen das Minuszeichen vor dem C_i -Umlaufintegral in den Integranden, wodurch die Taylor-Entwicklung dieses Integrals eine andere Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^n} (\zeta - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} .\end{aligned}$$

Jetzt lassen wir den Index n von 1 bis ∞ laufen und wechseln anschließend das

Vorzeichen des Index:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\zeta - z} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \\
-\frac{1}{\zeta - z} &= \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \Rightarrow \\
-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta \\
&= \sum_{n=-1}^{-\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}}_{a_n} (z - z_0)^n, \\
\boxed{-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n}.
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind also gegeben durch

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_a} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta & \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta & \text{für } n = -1, -2, -3, \dots \end{cases} \quad (24)$$

Infolge (16) sind aber die Umlaufintegrale (24) unabhängig von der Gestalt ihrer geschlossenen Kurven C , wenn diese nur innerhalb des von C_a und C_i eingeschlossenen Ringgebietes liegen. Der Vorzeichenumkehr des Integrals dadurch, dass C_i im Gegensatz zu C_a einen negativen Umlaufsinn besitzt, wird Rechnung getragen durch das negative Vorzeichen der Exponenten n . Zusammenfassend schreiben wir folglich für die Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

Die **Laurent-Entwicklung** für die komplexe Funktion $f(z)$ ist damit

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = L(z), \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}}. \quad (26)$$

Dabei konnten wir die Koeffizienten a_n in Übereinstimmung mit (16) allgemein als Umlaufintegral entlang eines beliebigen, im Ringgebiet zwischen C_i und C_a liegenden und den Entwicklungspunkt z_0 einmal umlaufenden Weges C formulieren.

Für die Taylor-Entwicklung des C_i -Umlaufintegrals schreibt man oft auch

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}}_{a_{-n}} (z - z_0)^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} . \end{aligned}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad \text{heißt}$$

Hauptteil oder singulärer Teil der Laurent-Reihe,

$$N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{heißt}$$

Nebenteil oder regulärer Teil der Laurent-Reihe,

sodass
$$L(z) = H(z) + N(z) .$$

Ist $f(z)$ im Punkt z_0 holomorph, geht die Laurent-Reihe in die gewöhnliche Potenzreihe über, weil dann aufgrund des *Cauchy-Integralsatzes* die negativen Koeffizienten a_{-n} und damit der Hauptteil $H(z)$ der Laurent-Reihe verschwinden:

$$a_{-n} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta & \text{für } n = -1, -2, -3, \dots \\ \text{bzw.} \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} f(\zeta) \cdot (\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta & \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Weil das Produkt aus holomorphen Funktionen (hier $f(z)$ und $(\zeta - z_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$), wieder eine holomorphe Funktion ergibt, die in diesem Fall auch in z_0 holomorph sein soll, resultiert

$$\text{für } n = 1 : \quad a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} f(\zeta) \cdot (\zeta - z_0)^0 d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} f(\zeta) d\zeta = 0 ,$$

$$\text{für } n = 2 : \quad a_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} f(\zeta) \cdot (\zeta - z_0)^1 d\zeta = 0 ,$$

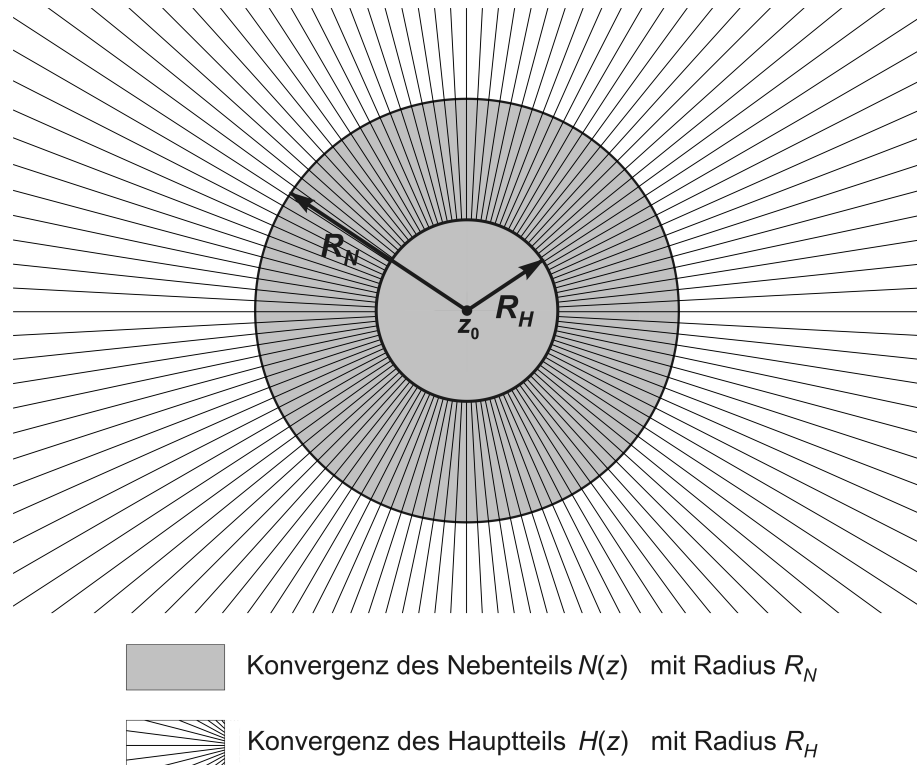
$$\text{für } n = 3 : \quad a_{-3} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} f(\zeta) \cdot (\zeta - z_0)^2 d\zeta = 0 , \quad \text{und so weiter.}$$

$H(z)$ verschwindet aber auch, wenn $f(z)$ an der Stelle z_0 eine hebbare Singularität besitzt, wie wir im Abschnitt 11.1 noch sehen werden.

Laurent-Reihen sind für ihren Entwicklungspunkt $z = z_0$ und für $z = \infty$ nicht definiert.

10.2 Konvergenzverhalten der Laurent-Reihe

Abb. 5



Erläuterungen zur Abbildung 5 :

- **Nebenteil bzw. regulärer Teil $N(z)$:**

Der reguläre Teil der Laurent-Reihe ist die gewöhnliche Potenzreihe

$$N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit dem **Konvergenzradius** $R_N \geq 0$ und dem daraus resultierenden **Konvergenzgebiet** in Form der offenen Kreisscheibe

$$G_{R_N}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R_N\} .$$

- **Hauptteil $H(z)$:**

Der Hauptteil der Laurent-Reihe ist

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

mit dem **Konvergenzradius** $\rho > 0$,

$$\rho := \frac{1}{R_H} > \frac{1}{|z - z_0|} \quad \Leftrightarrow \quad R_H < |z - z_0| ,$$

und dem daraus resultierendem **Konvergenzgebiet**

$$G_{R_H}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : R_H < |z - z_0|\} .$$

Das Konvergenzgebiet erstreckt sich also auf den Außenbereich einer Kreisscheibe mit dem Radius R_H .

- **Laurent-Reihe** $L(z)$:

Eine Laurent-Reihe konvergiert im Punkt $z \in \mathbb{C}$, wenn sowohl ihr Hauptteil als auch ihr regulärer Teil in diesem Punkt konvergieren. Demzufolge und wie in Abbildung 5 dargestellt ist ihr Konvergenzgebiet der offene Kreisring

$$G_{R_H, R_N}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : R_H < |z - z_0| < R_N\}$$

für den Fall $R_H < R_N$.

Anmerkung:

In einigen Punkten der Ränder des Kreisrings kann ebenfalls Konvergenz vorliegen, sodass dort $|z - z_0| = R_H$ oder $|z - z_0| = R_N$ gilt.

Ist der Konvergenzradius einer *gewöhnlichen Potenzreihe* $\varrho = 0$, so konvergiert diese nur für $z = z_0$.

Ist der Konvergenzradius einer *gewöhnlichen Potenzreihe* $\varrho = \infty$, so konvergiert diese für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut.

Für das Konvergenzverhalten der Laurent-Reihe ergeben sich folgende Fälle:

1. Ist $R_N = 0$, so konvergiert der Nebenteil nur an z_0 und ist sonst divergent.
 $\Rightarrow$ Die Laurent-Reihe divergiert überall,
da sie in $z = z_0$ nicht definiert ist.

2. Ist $R_H = \infty$, so divergiert der Hauptteil für alle $z \in \mathbb{C}$.
 $\Rightarrow$ Die Laurent-Reihe divergiert überall.

3. Ist $0 \leq R_H < \infty$, $0 < R_N \leq \infty$ und ist zusätzlich

- (a) $R_H > R_N$,

so existiert kein z , für das beide Teilreihen zugleich konvergieren.

$\Rightarrow$ Die Laurent-Reihe divergiert überall.

- (b) $R_H = R_N$

so konvergieren beide Teilreihen und damit auch die Laurent-Reihe höchstens an gewissen Punkten der Kreislinie

$$K_{R_H} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R_H = R_N\}.$$

- (c) $R_H < R_N$,

so konvergiert der Nebenteil auf der Menge $\{z : |z - z_0| < R_N$ und

so konvergiert der Hauptteil auf der Menge $\{z : |z - z_0| > R_H$.

Auf dem Durchschnitt dieser beiden Teilmengen konvergieren also beide Teilmengen.

$\Rightarrow$ Die Laurent-Reihe konvergiert auf dem Ringgebiet

$$G_{R_H, R_N}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : R_H < |z - z_0| < R_N\} \text{ um } z_0$$

mit $0 \leq R_H < R_N \leq \infty$.

Wählen wir eine kompakte Teilmenge des Ringgebietes zu

$$\tilde{G}_{\tilde{R}_H, \tilde{R}_N}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \geq \tilde{R}_H\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \tilde{R}_N\}$$

mit $\tilde{R}_H > R_H$ und $\tilde{R}_N < R_N$, wobei $\tilde{R}_H < \tilde{R}_N$,

konvergiert die Laurent-Reihe sogar **gleichmäßig** auf $\tilde{G}_{\tilde{R}_H, \tilde{R}_N}(z_0)$,
da dann auch die beiden Teilreihen gleichmäßig konvergieren.

$\Rightarrow$ Die Laurent-Reihe konvergiert also **kompakt** auf $\tilde{G}_{\tilde{R}_H, \tilde{R}_N}(z_0)$.

Boxinhalt ist mit kleinen Änderungen der Notation weitgehend zitiert aus dem Skript von Pascal Niehus, „Laurent-Reihen und isolierte Singularitäten“, Seite 7 und Seite 8, www.mathematik.uni-dortmund.de/~tdohnal/TEACH/Seminar_AnalIII_SS2013/Niehus_Laurent-Reihen.pdf

10.3 Einfache Beispiele für Laurent-Reihen

Aus Helmut Fischer, Helmut Kaul, Mathematik für Physiker, Band 1, Grundkurs, 4. Auflage, Verlag B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2001, Abschnitt 17.2.4 Laurentreihe, Seite 505 bis Seite 507.

Beispiel 1:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}}_{H(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}}_{N(z)} = \cdots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \cdots$$

ist die Laurent-Entwicklung der Funktion $f(z)$ um die Entwicklungsstelle $z_0 = 0$. Wie man sieht, ist $H(z)$ und damit auch $L(z)$ an der Entwicklungsstelle, also im Punkt $z_0 = 0$ nicht definiert. Wir untersuchen das Konvergenzverhalten dieser Laurent-Reihe nach dem Quotientenkriterium:

$$H(z) : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{\frac{1}{z^n}} \right| = \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \Leftrightarrow 1 < |z| ,$$

Konvergenzgebiet $:= \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\} ,$

$$N(z) : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^n} \right| = \left| \frac{z}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2 ,$$

Konvergenzgebiet $:= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$

$$\Rightarrow L(z) : \text{Konvergenzgebiet} := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} .$$

Das Konvergenzgebiet dieser Laurent-Reihe ist der Kreisring $:= \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, in dem sowohl $H(z)$ als auch $N(z)$ konvergieren.

Beispiel 2:

Die Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z-i} + e^z$$

besitzt nur eine Polstelle, nämlich $z = i$. Wählen wir diese der Einfachheit halber als Entwicklungspunkt $z_0 = i$ für die Laurent-Reihe, so liegt ihr Hauptteil bereits vor, denn er besteht in diesem Fall nur aus dem Summanden $\frac{2}{z-i}$, denn

$$\begin{aligned} \frac{2}{z-i} &= 2 \cdot (z-i)^{-1} = a_{-1}(z-z_0)^{-1} \\ &= H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \quad \text{falls} \quad a_{-n} = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n \geq 2 \end{cases} . \end{aligned}$$

Der Nebenteil resultiert aus der Taylor-Entwicklung von e^z um den Entwicklungspunkt $z_0 = i$:

$$e^z = e^i \cdot e^{z-i} = \underbrace{(\cos 1 + i \sin 1)}_{= c \in \mathbb{C}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{n!} (z-i)^n = N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n .$$

Die Laurent-Reihe von $f(z) = \frac{2}{z-i} + e^z$ ist folglich und mit $(\cos 1 + i \sin 1) = c$

$$\begin{aligned} L(z) &= \underbrace{\frac{2}{z-i}}_{H(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{n!} (z-i)^n}_{N(z)} \\ &= \frac{2}{z-i} + c + c(z-i) + \frac{c}{2}(z-i)^2 + \frac{c}{6}(z-i)^3 + \dots \end{aligned}$$

Wir untersuchen das Konvergenzverhalten dieser Laurent-Reihe wieder nach dem Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned} H(z) &: \frac{2}{|z-i|}, \\ \text{Konvergenzgebiet} &:= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < \infty\}, \\ N(z) &: \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c \cdot \frac{(z-i)^{n+1}}{(n+1)!}}{c \cdot \frac{(z-i)^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z-i|}{n+1} = 0 < 1, \\ z = z_0 = i &\Rightarrow |z-i| = 0 \Rightarrow N(z) = 0, \\ \text{Konvergenzgebiet} &:= \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z-i| < \infty\}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L(z) : \text{Konvergenzgebiet} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < \infty\}.$$

Das Konvergenzgebiet dieser Laurent-Reihe ist die gesamte komplexe Zahlenebene *mit Ausnahme des Entwicklungspunktes*, also

$$G(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < \infty\} \quad \text{für } z_0 = i,$$

weil der Hauptteil im Entwicklungspunkt $z_0 = i$ eine isolierte Singularität, nämlich einen Pol der Ordnung 1 besitzt (s. Abschnitt 11).

Die Laurent-Reihe einer Funktion mit nur *einer* isolierten Singularität ist *eindeutig* bestimmt, d.h., sie besitzt nur *ein* ringförmiges Konvergenzgebiet. Hat eine Funktion jedoch mehrere isolierte Singularitäten, besitzt sie mehrere Laurent-Reihen mit den entsprechenden (verschiedenen) Konvergenzgebieten. Dies werden wir mit den nächsten Beispielen zeigen. Dafür benötigen wir die beiden folgenden, allgemein dargestellten Reihenentwicklungsmöglichkeiten der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

um den Entwicklungspunkt $z_0 \neq a$. Die Entwicklungen erfolgen also *nicht* an der Polstelle $z = a$ der Funktion :

1. Entwicklung für $|z - z_0| < |a - z_0| \Rightarrow$

(gewöhnliche) **Potenzreihe** bzw. **Taylor-Reihe** durch Anwendung der

geometrischen Reihe $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n}$, $0 < q < 1$, $q = \frac{z - z_0}{a - z_0}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0) + (z_0-a)} = \frac{1}{z_0-a} \cdot \frac{1}{\frac{z-z_0}{z_0-a} + 1} \\ &= \frac{1}{z_0-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{a-z_0}} = \frac{1}{z_0-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{a-z_0} \right)^n, \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{z-a} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}}}. \quad (27)$$

2. Entwicklung für $|z - z_0| > |a - z_0| \Rightarrow$

(**Hauptteil der**) **Laurent-Reihe** durch Anwendung der

geometrischen Reihe mit $q = \frac{a-z_0}{z-z_0}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0) + (z_0-a)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0-a}{z-z_0}} \\ &= \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a-z_0}{z-z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}}. \quad (28)$$

Beispiel 3:

Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z-2}$$

besitzt nur einen Pol an der Stelle $z = 2$. Wählen wir jetzt als Entwicklungspunkt nicht die Polstelle sondern $z_0 = 0$, können wir die Reihenentwicklungen gemäß (27) und (28) durchführen:

Konvergenzgebiet $:= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\} \xrightarrow{(27)} \text{Taylor-Reihe}$

$$\frac{1}{z-2} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Konvergenzgebiet := $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < \infty\} \xrightarrow{(28)} \text{Laurent-Reihe}$

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

Auch wenn sich in diesem Fall die Konvergenzgebiete der beiden Reihen nicht überschneiden, bezeichnet man die Reihe mit den negativen Potenzen von z als Laurent-Reihe, weil sie dem Hauptteil (mit den negativen Potenzen) entspricht.

Beispiel 4:

Die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2 - 4z + 2}{z(z-1)(z-2)} = \underbrace{\frac{1}{z}}_A + \underbrace{\frac{1}{z-1}}_B - \underbrace{\frac{1}{z-2}}_C$$

besitzt die drei Polstellen $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ und soll um den Punkt $z_0 = 0$ entwickelt werden, d. h., dass insbesondere der Partialbruch $\frac{1}{z} = A$ um seine Polstelle entwickelt wird. Folglich besitzt die Funktion $f(z)$ drei verschiedene Laurent-Reihen mit den zugehörigen (verschiedenen) Konvergenzbereichen. Weil die Berechnung der Reihenkoeffizienten durch das Integral (25) mühsam wäre, benutzen wir zur Reihenentwicklung wieder die bereits bekannte geometrische Reihe gemäß (27) und (28):

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{z} && \text{für } 0 < |z| < \infty \implies A = \frac{1}{z} \\ B &= \frac{1}{z-1} = \begin{cases} B_1 = -\frac{1}{1-z} & \text{für } 0 < |z| < 1 \xrightarrow{(27)} B_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ B_2 = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} & \text{für } 1 < |z| < \infty \xrightarrow{(28)} B_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \end{cases} \\ C &= -\frac{1}{z-2} = \begin{cases} C_1 = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} & \text{für } 0 < |z| < 2 \xrightarrow{(27)} C_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \\ C_2 = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} & \text{für } 2 < |z| < \infty \xrightarrow{(28)} C_2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} \end{cases} \end{aligned}$$

Den sich überschneidenden Konvergenzbereichen entsprechend stellen wir jetzt die drei Laurent-Reihen für die Funktion $f(z)$ zusammen:

$$f(z) := L_1 = A + B_1 + C_1 = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{für } 0 < |z| < 1,$$

$$f(z) := L_2 = A + B_2 + C_1 = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{für } 1 < |z| < 2,$$

$$f(z) := L_3 = A + B_2 + C_2 = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} \quad \text{für } 2 < |z| < \infty.$$

Wie man sieht, hat die Entwicklung der **dreipoligen** Funktion $f(z)$ in **drei Laurent-Reihen** mit ihren zugehörigen (verschiedenen) Konvergenzbereichen die Laurent-Entwicklung auf dem *gesamten* Definitionsbereich von $f(z)$ ermöglicht. Dass das nicht immer so ist, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 5:

Wir verändern die Funktion aus dem Beispiel 4 so, dass nach der Partialbruchzerlegung der Bruch $\frac{1}{z}$ nicht mehr auftritt:

$$\underbrace{\frac{1}{z-1}}_B - \underbrace{\frac{1}{z-2}}_C = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = f(z) .$$

Als Entwicklungspunkt wählen wir wieder $z = 0$. Die Funktion $f(z)$ besitzt jetzt nur **zwei Pole**, aber immer noch die **drei verschiedenen Konvergenzbereiche** wie im Beispiel 4:

$$f(z) := T_0 = B_1 + C_1 = - \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{für } 0 < |z| < 1 ,$$

$$f(z) := L_1 = B_2 + C_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{für } 1 < |z| < 2 ,$$

$$f(z) := L_2 = B_2 + C_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} \quad \text{für } 2 < |z| < \infty .$$

In diesem Fall wurde die Funktion $f(z)$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich nur in die **zwei Laurent-Reihen** L_1, L_2 und im inneren Konvergenzbereich $0 < |z| < 1$ nur in **eine Taylor-Reihe** T_0 (mit positiven Potenzen) entwickelt.

Anhand der Beispiele 4 und 5 stellen wir fest:

Die Konvergenzgebiete, hier z. B.

$$G_{R_i, R_a}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - z_0| < 2\} \quad \text{für } z_0 = 0 ,$$

werden begrenzt durch einen Innenkreis R_i und einen Außenkreis R_a , die durch die Pole bestimmt werden. In den Beispielen 4 und 5 sind dies für $1 < |z| < 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &\Rightarrow \text{Polstelle } z=1 \Rightarrow R_i = 1 , \\ \frac{1}{z-2} &\Rightarrow \text{Polstelle } z=2 \Rightarrow R_a = 2 . \end{aligned}$$

Aus dem zu R_i gehörenden Pol resultiert die Reihe mit den negativen Potenzen und aus dem zu R_a gehörenden Pol die Reihe mit den positiven Potenzen für das entsprechende Konvergenzgebiet $G_{R_i, R_a}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : R_i < |z - z_0| < R_a\}$. Folglich resultiert aus der Polstelle $z = 0$ nur eine Reihe mit negativen Potenzen.

Kurz gesagt, eine Polstelle $z \neq 0$ liefert sowohl eine Reihe mit negativen als auch eine Reihe mit positiven Potenzen, während die Polstelle $z = 0$ nur eine Reihe mit negativen Potenzen liefert.

11 Isolierte Singularitäten

Singularitäten nennt man isoliert z. B. in einem Punkt z_0 , wenn die zugehörige Funktion $f(z)$ rund um z_0 holomorph ist, nur in z_0 nicht. Isolierte Singularitäten holomorpher Funktionen $f(z)$ werden entsprechend dem Verhalten des Hauptteils $H(z)$ ihrer Laurent-Reihe klassifiziert in hebbare Singularitäten, Pole und wesentliche Singularitäten. Ist eine Funktion in einem Gebiet holomorph bis auf **endlich viele Pole**, so nennt man sie **meromorph**.

11.1 Hebbare Singularitäten

$f(z)$ besitzt in z_0 eine hebbare Singularität, wenn **kein** Koeffizient des Hauptteils **ungleich Null** ist bzw. wenn alle Koeffizienten des Hauptteils und damit $H(z)$ verschwinden, d. h.,

$$a_n = 0 \quad \text{für alle } n < 0, n \in \mathbb{Z}.$$

$f(z)$ besitzt an der Stelle z_0 eine hebbare Singularität, wenn

$$\boxed{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ existiert}}.$$

Wegen der Hebbarkeit verschwindet also auch das Residuum a_{-1} . Verallgemeinert heißt das, dass eine Funktion $f(z)$, die eine hebbare Singularität im Punkt z_0 besitzt, allgemein in die gewöhnliche Potenzreihe

$$f(z) = N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (29)$$

entwickelt werden kann. Wie man sieht, konvergiert diese Potenzreihe für $z = z_0$ gegen a_0 sodass sich die Singularität „beheben“ lässt und wir eine abgeänderte, auch in z_0 holomorphe Funktion $\tilde{f}(z)$ erhalten:

$$f(z) \text{ mit hebbarer Singularität in } z_0 \longrightarrow \tilde{f}(z_0) = a_0 \longrightarrow \tilde{f}(z).$$

Man sagt auch, die Funktion

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0 & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

ist die holomorphe **Fortsetzung** von $f(z)$. Hebbare Singularitäten sind also nur scheinbare Singularitäten, die man durch entsprechende Umformung der zugehörigen Funktion beheben kann. Ein alternatives Kriterium für eine hebbare Singularität der Funktion $f(z)$ an der Stelle z_0 ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = 0.$$

Dies leuchtet sofort ein, wenn man für $f(z)$ die Potenzreihe von $f(z)$ um z_0 einsetzt.

Beispiel: $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ an der Stelle $z_0 = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(z_0) = a_0 = 1 .$$

Wie man sieht, verschwindet $H(z)$ und die Laurent-Reihe von $f(z)$ reduziert sich auf den Nebenteil

$$N(z) = \tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} ,$$

beginnend mit dem „gehobenen“ Glied $a_0 = 1$.

11.2 Pole

$f(z)$ besitzt in z_0 einen Pol, wenn z_0 keine hebbare Singularität ist und wenn nur **endlich viele** Koeffizienten des Hauptteils **ungleich Null** sind. Gilt also

$$a_{-m} \neq 0 , \quad \text{aber} \quad a_{-n} = 0 \quad \text{für alle} \quad n > m \quad \text{mit} \quad m, n \in \mathbb{N} ,$$

dann ist z_0 ein Pol der Ordnung m .

z_0 ist eine Polstelle der Ordnung m von $f(z)$ mit $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, wenn $m \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl ist, für die

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m \cdot f(z) \quad \text{existiert} . \quad (30)$$

Besitzt eine Funktion $f(z)$ einen Pol der Ordnung m im Punkt z_0 , lässt sie sich folglich in die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (31)$$

entwickeln, die in einer punktierten Kreisscheibe $U \setminus \{z_0\}$ konvergiert.

Dies können wir zeigen, indem wir eine auch in z_0 holomorphe Funktion $\tilde{f}(z)$ einführen, die

$$f(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z - z_0)^m} , \quad \tilde{f}(z_0) \neq 0$$

(32)

erfüllt und somit gleichzeitig dafür sorgt, dass $f(z)$ in z_0 einen Pol der Ordnung m besitzt. Mit der gewöhnlichen Potenzreihe bzw. Taylor-Reihe

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

um z_0 resultiert daraus

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^{n-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} \underbrace{b_{n+m}}_{=a_n} (z - z_0)^n \Rightarrow \\
 f(z) &= \underbrace{\sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Laurent-Reihe}} \quad \text{mit} \quad a_{-m} = b_0 \neq 0 . \quad \square
 \end{aligned}$$

Umgekehrt resultiert aus der Laurent-Reihe von $f(z)$ um z_0

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(z) &= (z - z_0)^m \cdot f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} \Rightarrow \\
 \tilde{f}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n
 \end{aligned}$$

und daraus schließlich

$$\tilde{f}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n = a_{-m} \neq 0 . \quad \square$$

Beispiel: $f(z) = \frac{1}{z^n}$ an der Stelle $z_0 = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^m \cdot \frac{1}{z^n} = \lim_{z \rightarrow 0} z^{m-n} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n , \\ 0 & \text{für } m > n . \end{cases}$$

Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^n}$ besitzt an der Stelle $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung $m = n$ für $n \geq 1$, weil n die kleinste Zahl ist, für die der Grenzwert existiert.

Beispiel: $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ an der Stelle $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 0} z^m \cdot \frac{\sin z}{z^2} &= \lim_{z \rightarrow 0} z^m \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots \right) \\
 \lim_{z \rightarrow 0} \left(z^{m-1} - \frac{z^{m+1}}{3!} + \frac{z^{m+3}}{5!} - \dots \right) &= \begin{cases} \infty & \text{für } m < 1 , \\ 1 & \text{für } m = 1 , \\ 0 & \text{für } m > 1 . \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die Funktion $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ besitzt an der Stelle $z_0 = 0$ einen Pol der Ordnung 1, weil $m = 1$ die kleinste Zahl ist, für die der Grenzwert existiert. ∞ ist ein uneigentlicher Grenzwert und deshalb hier nicht relevant.

11.3 Wesentliche Singularitäten

Einen „Pol der Ordnung ∞ “ bezeichnet man als wesentliche Singularität.

$f(z)$ besitzt in z_0 eine wesentliche Singularität, wenn z_0 keine hebbare Singularität und auch kein Pol ist und wenn **unendlich viele** Koeffizienten des Hauptteils **ungleich Null** sind.

$f(z)$ besitzt an der Stelle z_0 eine wesentliche Singularität, wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m \cdot f(z) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ **nicht** existiert}$$

und wenn $f(z)$ *jeden* Kreisring auf $\mathbb{C}$ um das Zentrum z_0 bildet.

Beispiel: $f(z) = e^{1/z}$ an der Stelle $z_0 = 0$:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^{-n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^{-n} = 1 + H(z) .$$

Die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ besitzt im Punkt $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, weil unendlich viele Glieder des Hauptteils ihrer Laurent-Reihe ungleich Null sind und auch weil für alle $m \in \mathbb{N}$ kein Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m \cdot f(z)$ an der Stelle $z_0 = 0$ existiert:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^m \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^{-n} \right) = z^m + \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{m-n}}{n!} = z^m + \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^m}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = \infty .$$

12 Das Residuum

12.1 Herleitung

Mit der Laurent-Entwicklung einer (holomorphen) Funktionen $f(z)$, also mit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\Rightarrow \quad a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-1+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta, \quad (33)$$

und unter Berücksichtigung des Ergebnisses (12) folgt für das Kurvenintegral längs einer geschlossenen Jordan-Kurve C , die einmal in positiver Richtung um den Punkt z_0 verläuft:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \underbrace{\oint_C (z - z_0)^n dz}_{\substack{= 0 \text{ für } n \in \mathbb{Z} \setminus -1 \\ = 2\pi i \text{ für } n = -1}} \\ \oint_C f(z) dz &= a_{-1} \cdot 2\pi i. \end{aligned}$$

Dieses Kurvenintegral über die Funktion $f(z)$ bzw. über ihre Laurent-Reihe liefert also lediglich das „Überbleibsel“ $a_{-1} \cdot 2\pi i$. Durch Äquivalenzumformung und in Übereinstimmung mit (33) erhalten wir daraus das **Residuum**

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \text{Res}(f, z_0)}, \quad (34)$$

d. h., der Koeffizient a_{-1} der Laurent-Entwicklung der (holomorphen) Funktion $f(z)$ um z_0 heißt Residuum von f in z_0 .

Anmerkung:

Das Residuum hängt nicht von der Gestalt der geschlossenen Jordan-Kurve C ab.

12.2 Residuenbestimmung – Rechenregeln

1. $f(z)$ besitze in z_0 **keinen Pol**, sei also auch in z_0 holomorph oder besitze in z_0 eine hebbare Singularität:

Nach dem Cauchy-Integralsatz gilt dann

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = 0}.$$

In diesem Fall verschwinden der Hauptteil $H(z)$ und damit auch der Koeffizient a_{-1} und die Laurent-Reihe geht in die gewöhnliche Potenzreihe über.

2. $f(z)$ besitze in z_0 einen **Pol erster Ordnung**, also einen einfachen Pol:

In diesem Fall hat die Laurent-Reihe von $f(z)$ um den Entwicklungspunkt z_0 die Gestalt

$$f(z) = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots,$$

sodass

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z)} \quad (35)$$

3. $f(z)$ besitze in z_0 einen **Pol der Ordnung m** (s. auch Abschn. 11.2):

In diesem Fall hat die Laurent-Reihe von $f(z)$ um den Entwicklungspunkt z_0 die Gestalt

$$\begin{aligned} f(z) = & a_{-m}(z - z_0)^{-m} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} \\ & + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Die Funktion $f(z)$ lässt sich aber auch in die Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad (37)$$

bringen, wobei $g(z)$ auch im Punkt z_0 holomorph sein soll. Wir setzen zunächst die Taylor-Reihe der Funktion $g(z)$ um den Entwicklungspunkt z_0 , also

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(z_0) \cdot (z - z_0)^n,$$

in (37) ein:

$$f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(z_0) \cdot (z - z_0)^n}{(z - z_0)^m}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{g^{(1)}(z_0) \cdot (z - z_0)}{(z - z_0)^m} + \dots \\
&\quad + \frac{g^{(m-1)}(z_0) \cdot (z - z_0)^{m-1}}{(m-1)! \cdot (z - z_0)^m} \\
&\quad + \frac{g^{(m)}(z_0) \cdot (z - z_0)^m}{m! \cdot (z - z_0)^m} + \frac{g^{(m+1)}(z_0) \cdot (z - z_0)^{m+1}}{(m+1)! \cdot (z - z_0)^m} + \dots \\
&= g(z_0) \frac{1}{(z - z_0)^m} + g^{(1)}(z_0) \frac{1}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots \\
&\quad + \underbrace{\frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \frac{1}{z - z_0}}_A \tag{38} \\
&\quad + \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0) + \frac{g^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!} (z - z_0)^2 + \dots .
\end{aligned}$$

Bilden wir jetzt wieder das Umlaufintegral von $f(z)$ in positiver Richtung um den Pol z_0 , so stellen wir unter Berücksichtigung von (12) fest, dass nur das Reihenglied A einen Betrag leistet und das Residuum von $f(z)$ liefert:

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z) \, dz &= \oint_C \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \frac{1}{z - z_0} \, dz \\
&= \underbrace{\frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}}_{\text{Res}(f, z_0)} \underbrace{\oint_C \frac{1}{z - z_0} \, dz}_{2\pi i} \\
\oint_C f(z) \, dz &= \text{Res}(f, z_0) \cdot 2\pi i \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

Das Residuum einer Funktion $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ mit $g(z)$ holomorph in z_0 ist

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1}g(z)}{dz^{m-1}} \right|_{z=z_0}, \quad g(z) = (z - z_0)^m f(z).$$

Meistens wird diese Regel in der Form

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \right]$$

angegeben. Für $m = 1$, d. h. zur Berechnung des Residuums eines Pols erster Ordnung erhalten wir daraus wieder die Formel (35). Und vergleichen wir die

Laurent-Reihe von $f(z)$, also (36), und die Reihenentwicklung von $f(z)$ mittels $g(z)$, also (38), stellen wir fest, dass

$$a_{-m} = g(z_0), \quad a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \text{Res}(f, z_0).$$

Wir zitieren hier noch die Kurzfassung des **Beweises** für die 3. Rechenregel:

Besitzt f in z_0 höchstens einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, d. h., „ist $\text{ord}_{z_0} f \geq -m$, so hat die Laurent-Entwicklung von f in z_0 die Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (z - z_0)^m f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} \\ &= a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \cdots. \end{aligned}$$

Beim $(m-1)$ -fachen Differenzieren dieser Potenzreihe fallen natürlich die Terme mit einer Potenz von $z - z_0$ kleiner als $m-1$ weg, und wir erhalten

$$\left((z - z_0)^m f(z) \right)^{(m-1)} = a_{-1} \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot 1 + a_0 \cdot m \cdot (m-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot (z - z_0) + \cdots.$$

Bilden wir hier nun den Grenzwert für $z \rightarrow z_0$, so erhalten wir offensichtlich genau $a_{-1} \cdot (m-1)!, \dots$ ¹¹

4. $\mathbb{C}$ -Linearität:

Gemäß den Integrationsregeln und den Rechenregeln für (Laurent-)Reihen gilt für die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ mit den Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\text{Res}(a \cdot f + b \cdot g, z_0) = a \cdot \text{Res}(f, z_0) + b \cdot \text{Res}(g, z_0)}.$$

5. $f(z)$ besitze in z_0 einen **Pol erster Ordnung** und $g(z)$ besitze in z_0 **keinen Pol**, $g(z)$ sei also in z_0 holomorph:

Die Funktion $h(z) := g(z) \cdot f(z)$ besitzt dann in z_0 einen Pol höchstens erster Ordnung. Folglich ist nach der 1. und nach der 2. Regel

$$\begin{aligned} \text{Res}(h, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) h(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) [g(z) \cdot f(z)] \\ &= \underbrace{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}_{= g(z_0)} \cdot \underbrace{\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)}_{= \text{Res}(f, z_0)}, \end{aligned}$$

¹¹Zitiert aus dem Vorlesungsskript von Andreas Gathmann, Einführung in die Funktionentheorie, TU Kaiserslautern 2016/2017, Seite 66, www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/futheo-2016/futheo-2016.pdf

$$\text{Res}(g \cdot f, z_0) = g(z_0) \cdot \text{Res}(f, z_0) .$$

6. $h(z)$ besitze in z_0 eine **Nullstelle erster Ordnung**. Dann besitzt die Funktion $f(z) := \frac{1}{h(z)}$ in z_0 einen **Pol erster Ordnung**, sodass

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{1}{h(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{\underbrace{h(z) - h(z_0)}_{\stackrel{!}{=} 0}} . \end{aligned}$$

Mit $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = h'(z_0)$ resultiert daraus

$$\text{Res}\left(\frac{1}{h}, z_0\right) = \frac{1}{h'(z_0)}, \quad h'(z_0) \neq 0 .$$

7. $g(z)$ besitze in z_0 **keinen Pol**, sei also in z_0 holomorph.
 $h(z)$ besitze in z_0 eine **Nullstelle erster Ordnung**.

Die Funktion $\frac{1}{h(z)} := f(z)$ besitzt dann in z_0 einen **Pol erster Ordnung**.

Folglich gilt nach der 5. und nach der 6. Regel

$$\text{Res}(g \cdot f, z_0) = g(z_0) \cdot \text{Res}(f, z_0) = g(z_0) \cdot \text{Res}\left(\frac{1}{h}, z_0\right) = g(z_0) \cdot \frac{1}{h'(z_0)} \Rightarrow$$

$$\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}, \quad h'(z_0) \neq 0 .$$

8. $f(z)$ besitze in z_0 eine **Nullstelle der Ordnung k** . Dann gilt

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k > 0 .$$

Dies lässt sich wie folgt zeigen: f kann dargestellt werden in der Form

$$f = \tilde{f} \cdot (z - z_0)^k \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(z_0) \neq 0 .$$

$$\Rightarrow f' = \tilde{f}' \cdot (z - z_0)^k + \tilde{f} \cdot k(z - z_0)^{k-1} ,$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{\tilde{f}' \cdot (z - z_0)^k + \tilde{f} \cdot k(z - z_0)^{k-1}}{\tilde{f} \cdot (z - z_0)^k} = \frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}} + \frac{k}{z - z_0} . \quad (39)$$

$f(z)$ sei holomorph in einem Gebiet um z_0 mit Nullstelle der Ordnung k in z_0 .

- $\Rightarrow f$ ist holomorph auch in z_0 .
- $\Rightarrow \tilde{f}$ ist holomorph auch in z_0 .
- $\Rightarrow$ Folglich gilt $0 < |1/\tilde{f}| < \infty$.
- $\Rightarrow 1/\tilde{f}$ ist ebenfalls holomorph in einem Gebiet um z_0 und auch in z_0 .
- $\Rightarrow \tilde{f}'$ ist holomorph in einem Gebiet um z_0 und auch in z_0 , denn holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar.

Weil das Produkt zweier (auch in z_0) holomorpher Funktionen ebenfalls (und auch in z_0) holomorph ist, gilt

$$\tilde{f}' \cdot \frac{1}{\tilde{f}} = \frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}} \quad \Rightarrow \quad \text{Res} \left(\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}, z_0 \right) = 0.$$

Damit und unter Verwendung von (12) und (34) erhalten wir für das Residuum aus (39)

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_0 \right) &= \underbrace{\text{Res} \left(\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}, z_0 \right)}_{=0} + \text{Res} \left(\frac{k}{z - z_0}, z_0 \right) \\ &= k \cdot \underbrace{\text{Res} \left(\frac{1}{z - z_0}, z_0 \right)}_{=1} = k. \quad \square \end{aligned}$$

9. $f(z)$ besitze in z_0 einen **Pol** der **Ordnung** m . Dann gilt

$$\text{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_0 \right) = -m < 0.$$

Dies lässt sich mit der zur 8. Regel analogen Argumentation wie folgt zeigen: Wegen des Pols ist f allerdings im Punkt z_0 nicht holomorph. f kann aber wieder dargestellt werden in der Form

$$\begin{aligned} f &= \tilde{f} \cdot (z - z_0)^{-m}. \\ \Rightarrow f' &= \tilde{f}' \cdot (z - z_0)^{-m} + \tilde{f} \cdot (-m)(z - z_0)^{-m-1}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{f}$ und $\tilde{f}'$ auch in z_0 wieder holomorph sind. Aus diesem Grunde resultiert

$$\frac{f'}{f} = \frac{\tilde{f}' \cdot (z - z_0)^{-m} + \tilde{f} \cdot (-m)(z - z_0)^{-(m+1)}}{\tilde{f} \cdot (z - z_0)^{-m}} = \frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}} + \frac{-m}{z - z_0},$$

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_0 \right) &= \underbrace{\text{Res} \left(\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}, z_0 \right)}_{=0} + \text{Res} \left(\frac{-m}{z - z_0}, z_0 \right) \\ &= -m \cdot \underbrace{\text{Res} \left(\frac{1}{z - z_0}, z_0 \right)}_{=1} = -m. \quad \square \end{aligned}$$

12.3 Beispiele für die Berechnung von Residuen

- $f(z) = \frac{\cos z}{z}$

Gesucht wird das Residuum des Pols erster Ordnung von f an der Stelle $z = z_0 = 0$.

Gemäß der **2. Regel** gilt

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{\cos z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1.$$

- $f(z) = \frac{\cos z}{1 - z^2} = \frac{\cos z}{(1 - z)(1 + z)}$

Gesucht werden die Residuen der beiden Pole erster Ordnung von f an den Stellen $z = z_0 = \pm 1$.

Gemäß der **2. Regel** und mit $\cos(-\alpha) = \cos(+\alpha)$ gilt

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow +1} (z - 1) \cdot \frac{\cos z}{(1 - z)(1 + z)} = \lim_{z \rightarrow +1} (-1) \frac{\cos z}{1 + z} = -\frac{1}{2} \cos 1,$$

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z + 1) \cdot \frac{\cos z}{(1 - z)(1 + z)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\cos z}{1 - z} = \frac{1}{2} \cos 1.$$

- $f(z) = \frac{z \sin z}{(z - \pi)^3}$

Gesucht wird das Residuum des Pols dritter Ordnung von f an der Stelle $z = z_0 = \pi$.

Gemäß der **3. Regel** gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, \pi) &= \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{d^2}{dz^2} (z - \pi)^3 \frac{z \sin z}{(z - \pi)^3} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{d^2}{dz^2} z \sin z \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \rightarrow \pi} (-z \sin z + 2 \cos z) = -1. \end{aligned}$$

- $f(z) = \frac{1}{\sin z}$

$1/\sin z$ besitzt Pole erster Ordnung an den Stellen $z = n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{N}$. Gesucht werden die Residuen dieser Pole.

Gemäß der **2. Regel** und nach dem **Satz von L'Hospital** gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, n\pi) &= \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \cdot \frac{1}{\sin z} \\ &= \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{(z - n\pi)'}{(\sin z)'} = \lim_{z \rightarrow n\pi} \frac{1}{\cos z} = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{40}$$

- $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$

Die Funktion $\cot z$ besitzt Pole an den Stellen $z = n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{N}$, d. h. an den Stellen mit $\sin z = 0$. Diese π -Periodizität von f , nämlich $\cot z = \cot(z + n\pi)$, berücksichtigen wir bei der Berechnung der Residuen.

Gemäß der **2. Regel** gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, n\pi) &= \lim_{z \rightarrow n\pi} (z - n\pi) \cdot \frac{\cos z}{\sin z} \\ &= \lim_{z \rightarrow n\pi} \underbrace{\frac{(z - n\pi)}{\sin z}}_{\stackrel{(40)}{=} (-1)^n} \cdot \lim_{z \rightarrow n\pi} \cos z = (-1)^n \cdot (-1)^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- $f(z) = \frac{z^2 + 4}{\sin z}$

Gesucht wird das Residuum des Pols erster Ordnung von f an der Stelle $z = z_0 = 0$.

Gemäß der **7. Regel**, d. h. mit $g(z) = z^2 + 4$ und $h(z) = \sin z$ bzw. $h'(z) = \cos z$ gilt

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{g(0)}{h'(0)} = \frac{0^2 + 4}{\cos(0)} = 4.$$

- $f(z) = \frac{z}{z^n - 1}$

Die Nennerfunktion $h(z) = z^n - 1$ mit festem n besitzt einfache Nullstellen (erster Ordnung) in den Punkten

$$z_k = e^{i2\pi \frac{k}{n}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

weil

$$z_k^n = e^{i2\pi \frac{k}{n} \cdot n} = e^{i2\pi \cdot k} = 1.$$

Die Zählerfunktion $g(z) = z$ besitzt an den Stellen z_k keine Pole, ist also auch in den Punkten z_k holomorph.

Gesucht wird das Residuum der Pole erster Ordnung von $f = g/h$ an den Stellen $z = z_k = e^{i2\pi \frac{k}{n}}$.

Gemäß der **7. Regel** gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z_k\right) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{z_k}{n \cdot z_k^{n-1}} = \frac{z_k^2}{n \cdot z_k^n} = \frac{z_k^2}{n} = \frac{1}{n} e^{i4\pi \frac{k}{n}}, \quad n \text{ fest}, k \in \mathbb{N}.$$

- $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

Die Laurent-Reihe L von f um $z = z_0 = 0$ ist

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} + 1 \\ &= \dots + \frac{1}{3!} z^{-3} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \underbrace{\frac{1}{1!} z^{-1}}_{= a_{-1} \cdot z^{-1}} + 1 = L. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ an der Stelle $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität besitzt. Das Residuum von f ist der Koeffizient a_{-1} der zugehörigen Laurent-Reihe:

$$\operatorname{Res}(f, 0) = a_{-1} = \frac{1}{1!} = 1.$$

Im Abschnitt 8.1 hatten wir das Umlaufintegral von $f(z) = 1/z$ um $z_0 = 0$ ermittelt, woraus sich das Residuum von f wie folgt ergibt:

$$\oint_C L \, dz \stackrel{(12)}{=} \oint_C \frac{1}{1!} z^{-1} \, dz = 1 \cdot 2\pi i = \operatorname{Res}(f, 0) \cdot 2\pi i \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Res}(f, 0) = 1.$$

• $g(z) = \frac{z^{a-1}}{z+1} = \frac{z^a}{z(z+1)}, \quad a \in \mathbb{C} \text{ mit } 0 < \operatorname{Re} a < 1$

Die Funktionen $z+1$ und $z(z+1)$ haben in $z_0 = -1$ eine einfache Nullstelle. Folglich besitzt die Funktion $g(z)$ an der Stelle $z_0 = -1$ einen Pol erster Ordnung. Wir zeigen vier Wege zur Bestimmung des Residuums von $g(z)$ an der Stelle $z_0 = -1$ unter Verwendung von $(-1) = e^{i\pi}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z+1}, -1\right) &= \\ &= \begin{cases} \text{5. Regel: } z^{a-1} \Big|_{z=-1} \cdot \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{z+1} = (-1)^{a-1} \cdot 1 = e^{i\pi(a-1)} \\ \text{7. Regel: } \frac{z^{a-1}}{1} \Big|_{z=-1} = \frac{(-1)^{a-1}}{1} = e^{i\pi(a-1)} \end{cases} \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{z^a}{z(z+1)}, -1\right) &= \\ &= \begin{cases} \text{5. Regel: } z^a \Big|_{z=-1} \cdot \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{1}{z(z+1)} = \frac{(-1)^a}{(-1)} = \frac{(e^{i\pi})^a}{e^{i\pi}} = e^{i\pi(a-1)} \\ \text{7. Regel: } \frac{z^a}{2z+1} \Big|_{z=-1} = \frac{(-1)^a}{(-1)} = \frac{(e^{i\pi})^a}{e^{i\pi}} = e^{i\pi(a-1)} \end{cases} \end{aligned}$$

13 Residuensatz

Ist $f(z)$ holomorph in G mit Ausnahme isolierter Singularitäten z_n und existieren auf dem vollständig in G liegenden geschlossenen Integrationsweg C keine Singularitäten, so gilt:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_n) .$$

Siehe Helmut Fischer, Helmut Kaul, Mathematik für Physiker, Band 1, Grundkurs, 4. Auflage, Verlag B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2001, Seite 565!

Die geschlossene Integrationskurve C umschließt also die isolierten Singularitäten $z_1, \dots, z_N$. Außerdem wird hier vereinfachend nur *ein* (vollständiger) Integrationsumlauf betrachtet. Durch zusätzliche (vollständige) Umläufe würden sich nämlich die Residuen entsprechend vervielfachen, worauf wir aber nicht weiter eingehen wollen.

Von mehreren Möglichkeiten, den Residuensatz zu veranschaulichen, haben wir die zwei Folgenden ausgewählt:

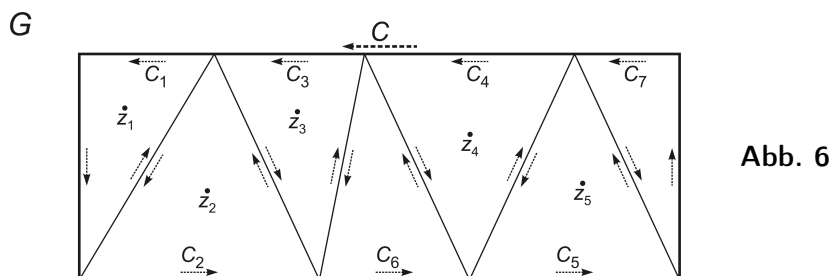


Abb. 6

Wie man in Abbildung 6 sieht, werden die sieben dreieckförmigen Teilgebiete von den geschlossenen Integrationskurven C_1 bis C_7 in positiver Richtung umlaufen. Da innerhalb von C_6 und C_7 keine Singularitäten liegen, verschwinden die Umlaufintegrale um diese beiden Teilgebiete nach dem Cauchy-Integralsatz

$$\oint_{C_n} f(z) dz = 0 .$$

Innerhalb der geschlossenen Integrationskurven C_1 bis C_5 hingegen liegt jeweils eine Singularität, sodass die Umlaufintegrale um diese fünf Teilgebiete nicht verschwinden, sondern entsprechend (34) ihren Beitrag liefern mit

$$\oint_{C_n} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, z_n) .$$

Addieren wir jetzt die sieben Umlaufintegrale, so heben sich die Teilintegrale längs der in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Wege auf. Die übrigen Integrationswege bilden zusammen die geschlossene Kurve C , die alle fünf Singularitäten umschließt.

Es verbleiben also von den sieben Umlaufintegralen nur die Teilintegrale längs der in positiver Richtung durchlaufenen Kurve C :

$$\sum_{n=1}^7 \oint_{C_n} f(z) dz = \sum_{n=1}^5 \oint_{C_n} f(z) dz = \sum_{n=1}^5 2\pi i \cdot \text{Res}(f, z_n) = \oint_C f(z) dz .$$

Die zweite Veranschaulichung des Residuensatzes anhand der Abbildung 7 baut auf der Herleitung der Cauchy-Integralformel auf (vgl. Abschnitt 8.3).

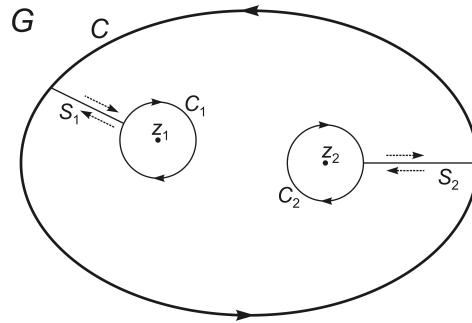


Abb. 7

Auch in Abbildung 7 liegt die geschlossene Jordankurve C vollständig in G . In dem von C eingeschlossenen Gebiet wiederum liegen die ebenfalls geschlossenen Jordankurven C_1 um die Singularität z_1 und C_2 um die Singularität z_2 . Jetzt legen wir die beiden Schnitte S_1 von C_1 direkt nach C und S_2 von C_2 direkt nach C . Dadurch erhalten wir aus der Kurve C einen oberen und einen unteren Teil gemäß $C_{\text{oben}} + C_{\text{unten}} = C$. Durch die Schnitte S_1 und S_2 haben wir ein einfach-zusammenhängendes Gebiet erhalten. Bilden wir jetzt nach dem Cauchy-Integralsatz das Umlaufintegral um dieses einfach-zusammenhängende Gebiet immer in Richtung der in Abbildung 7 dargestellten Pfeile, so stellen wir fest, dass C_1 und C_2 in entgegengesetzter Richtung zu C durchlaufen werden und dass sich die Teilintegrale längs S_1 und S_2 aufheben:

$$\int_{C_{\text{oben}}} + \int_{S_1} + \left(- \oint_{C_1} \right) - \int_{S_1} + \int_{C_{\text{unten}}} + \int_{S_2} + \left(- \oint_{C_2} \right) - \int_{S_2} = \oint_C - \oint_{C_1} - \oint_{C_2} \stackrel{(13)}{=} 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, z_1) + 2\pi i \cdot \text{Res}(f, z_2) .$$

14 Anwendungen

14.1 Zur Erinnerung – rationale Funktionen

Rationale Funktionen, die sich als Polynom in der Normalform $\sum_{n=0}^m a_n x^n$ mit $x \in \mathbb{R}$ und den konstanten Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$, $a_m \neq 0$ darstellen lassen, heißen **ganzrationale Funktionen**. Der höchste darin auftretende Exponent m ist der Grad des Polynoms. Der Vorfaktor a_m heißt **Leitkoeffizient**. Ist der Leitkoeffizient $a_m = 1$, handelt es sich um ein normiertes Polynom vom Grad m .

Der Quotient p/q aus den ganzrationalen Funktionen p und q liefert eine **echt gebrochenrationale Funktion**, wenn der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad. Ist der Zählergrad jedoch größer als der Nennergrad, ist p/q eine **unecht gebrochenrationale Funktion**, die durch Polynomdivision zerlegt werden kann in eine ganzrationale Funktion und ggf. zusätzlich eine echt gebrochenrationale Funktion.

Diese Aussagen über rationale Funktionen lassen sich unmittelbar auf **komplexe Polynomfunktionen** der Form $f(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ und den konstanten Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ übertragen. Aus der Verallgemeinerung auf den Bereich der komplexen Zahlen resultiert jedoch ein wesentlicher Unterschied:

Werden auch komplexe Koeffizienten zugelassen, lässt sich *jede* ganzrationale Funktion vom Grad $m \geq 2$ durch **Faktorisierung** als Produkt aus m **Linearfaktoren** darstellen (Produktdarstellung). Komplexe Polynomfunktionen lassen sich also im Gegensatz zu Polynomfunktionen in den rationalen oder reellen Zahlen *immer* vollständig in Linearfaktoren zerlegen bzw. faktorisieren, was wir in den folgenden Beispielen zeigen werden.

Der **Fundamentalsatz der Algebra** besagt u. a.: Ein (nicht konstantes komplexes) Polynom vom Grad $m \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten besitzt insgesamt genau m Nullstellen, wenn die Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden.

Beispiele: mit $z \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$

- **Hinweis!**

Das Polynom 2. Grades $x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ ist in den rationalen Zahlen **nicht faktorisierbar**, also **irreduzibel**. Es ist aber **reduzibel** in den reellen Zahlen.

- $p(z) = z + 3 - 2i = z - (-3 + 2i) = z - z_0$

Polynom 1. Grades mit der Nullstelle $z = z_0 = -3 + 2i$.

- $p(z) = z^3 + z = z(z^2 + 1) = z(z + i)(z - i)$

Polynom 3. Grades mit den drei einfachen Nullstellen $0, -i, i$.

Hinweis!

Das Polynom 2. Grades $x^2 + 1$ ist in den reellen Zahlen **irreduzibel**, aber es ist **reduzibel** in den komplexen Zahlen: $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$.

- $p(z) = z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = (z - 1) \left[z + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \left[z + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$

Polynom 3. Grades mit den drei Nullstellen $1, -\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right), -\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Hinweis!

$p(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ besitzt die gleichen Nullstellen, weil der reelle quadratische Faktor ein Paar komplexe Nullstellen mit unterschiedlichem Vorzeichen ihres Imaginärteils liefert. Das Polynom 2. Grades $x^2 + x + 1$ ist also in den reellen Zahlen irreduzibel.

- $p(z) = z^5 + 3z^4 - 6z^3 - 10z^2 + 21z - 9 = (z + 3)^2(z - 1)^3$

Polynom 5. Grades mit fünf Nullstellen: $z = -3$ mit Vielfachheit 2, $z = 1$ mit Vielfachheit 3.

- $p(z) = iz - i$

Polynom 1. Grades mit der Nullstelle $z = 1$.

Hinweis!

Ein Polynom mit nur komplexen Koeffizienten, kann auch reelle Nullstellen besitzen. Auch $p(x) = ix - i$ hat die Nullstelle $x = 1$.

- $p(z) = z^3 + 3iz^2 + z + 3i = (z + 3i)(z + i)(z - i)$

Polynom 3. Grades mit den drei einfachen komplexen Nullstellen $-3i, -i, i$.

- $p(z) = (z + i)^m \cdot (z - 3i)^n$
Polynom vom Grad $(m + n)$ mit $(m + n)$ Nullstellen: $z = -i$ mit Vielfachheit m und $z = 3i$ mit Vielfachheit n .
- $p(z) = z - i$
Polynom 1. Grades mit der komplexen Nullstelle $z = i$.
Hinweis!
Im Gegensatz dazu besitzt das Polynom $iz - i$ die reelle Nullstelle $z = x = 1$.

Wie man sieht, gibt es **komplexe Polynome beliebigen Grades**, also auch ungerade komplexe Polynome, die keine reellen Nullstellen besitzen.

Ungerade reelle Polynome, beispielsweise $p(x) = x^3 - 1$ (s. oben), besitzen **immer mindestens eine reelle Nullstelle**.

Gerade reelle Polynome besitzen wie gerade komplexe Polynome **nicht immer reelle Nullstellen**. Folglich sind reelle Polynome 2. Grades in den reellen Zahlen nicht immer reduzibel.

Im Folgenden benötigen wir den **Satz über das Wachstum von rationalen Funktionen**:

Seien $p(z)$ und $q(z)$ komplexe Polynomfunktionen mit $q(z) \neq 0$. Der Grad von $p(z)$ sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und der Grad von $q(z)$ sei $l \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann existieren die Konstanten $R, K, M \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass die rationale Funktion $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$ keine Polstellen besitzt und die Abschätzung

$$K \cdot |z|^{k-l} \leq |f(z)| = \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| = \left| \frac{\sum_{n=0}^k a_n \cdot z^n}{\sum_{n=0}^l b_n \cdot z^n} \right| \leq M \cdot |z|^{k-l} \quad (42)$$

erfüllt. Dies lässt sich wie folgt zeigen:

$$\left. \begin{array}{l} K_p |z|^k \leq |p(z)| \leq M_p |z|^k \\ K_q |z|^l \leq |q(z)| \leq M_q |z|^l \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{K_p}{M_q} \cdot \frac{|z|^k}{|z|^l} = K \cdot |z|^{k-l} \leq \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq M \cdot |z|^{k-l} = \frac{M_p}{K_q} \cdot \frac{|z|^k}{|z|^l}.$$

Insbesondere werden wir diese Beziehung in der Form

$$\boxed{|f(z)| \leq M \cdot \frac{1}{|z|^2} = \frac{\frac{3}{2}|a_k|}{\frac{1}{2}|b_l|} \cdot \frac{|z|^k}{|z|^l}}, \quad (43)$$

d. h. für den Exponenten $k - l = -2$, aber auch für Exponenten $k - l < -2$, nicht nur im Komplexen sondern auch im Reellen benutzen. Weiterhin zeigen wir im Anhang, dass es für ein komplexes Polynom $f = f(z)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit Leitkoeffizient 1 ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass

$$\begin{aligned} K|z|^n &\leq |f(z)| \leq M|z|^n \Rightarrow \\ \frac{1}{2}|z|^n &\leq |f(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^n \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |z| \geq R. \end{aligned}$$

14.2 Berechnung von uneigentlichen Integralen $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Wir wollen auf Grundlage des Cauchy-Integralsatzes und der Invarianz des Wegintegrals (s. Abschn. 8.3) eine Methode entwickeln zur Berechnung von reellen uneigentlichen Integralen der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ mit der echt gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Uneigentlich integrierbar sind, im Reellen wie im Komplexen, nur Funktionen, die im Unendlichen hinreichend schnell abklingen, also bestimmte Abklingbedingungen erfüllen.

Als einfaches Modell zur Entwicklung betrachten wir eine stetige geschlossene Jordan-Kurve C in der komplexen Zahlenebene (s. Abb. 8) und eine holomorphe Funktion $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit den **komplexen Polynomfunktionen**

$$p(z) = \sum_{n=0}^k a_n \cdot z^n, \quad a_k \neq 0 \quad \text{und} \quad q(z) = \sum_{n=0}^l b_n \cdot z^n, \quad b_l \neq 0.$$

Weiterhin sollen folgende Bedingungen gelten:

- C bestehe aus den beiden Teilstücken A und B , also $C = A + B$, und soll bei der Integration in positiver Richtung umlaufen werden.
- Die Kurve A verlaufe auf der reellen Achse von $x = -R$ nach $x = +R$.

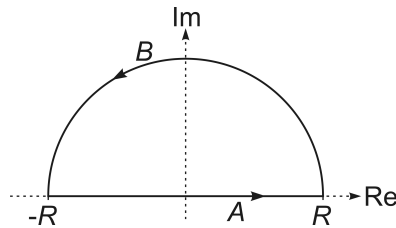


Abb. 8

- Die Kurve B sei der obere Halbkreis mit dem Radius R um den Koordinatenursprung, werde also beschrieben durch

$$z(r, \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi} = R \cdot e^{i\varphi} \quad \text{mit} \quad r = R = \text{const}, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \text{Im } z \geq 0.$$

- R sei hinreichend groß, sodass alle oberhalb der reellen Achse vorhandenen Singularitäten von f innerhalb des von C eingeschlossenen Gebietes liegen.
- Auf C selbst sollen sich keine Singularitäten befinden. Insbesondere besitze $q(z)$ keine reellen Nullstellen, sodass der Integrand $f(z)$ auf der gesamten reellen Achse definiert ist.
- Der Grad l des Nennerpolynoms $q(z)$ sei um mindestens zwei höher als der Grad k des Zählerpolynoms $p(z)$, also

$$l \geq k + 2 \quad \Leftrightarrow \quad k - l \leq -2.$$

Warum diese Einschränkung erforderlich ist, wird im Folgenden deutlich werden.

Zunächst zeigen wir auf der Grundlage der eindimensionalen reellen Analysis, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^a f(x) dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx$$

als Grenzwert des Integrals $\int_{-r}^r f(x) dx$ (mit symmetrischen Integrationsgrenzen) für $r \rightarrow \infty$ in $\mathbb{R}$ tatsächlich existiert, also konvergiert.

Diese Betrachtung im Reellen ist auf komplexe Integrale übertragbar, weil die Funktionswerte $f(x) \in \mathbb{R}$ den „Abstand“ vom Koordinatenursprung auf der reellen f -Achse darstellen. Analog dazu sind die Betragswerte der Funktion $f(z) \in \mathbb{C}$ der „Abstand“ vom Koordinatenursprung der komplexen Zahlenebene, in der $f(z) \in \mathbb{C}$ dargestellt ist. Das komplexe Analogon zum (reellen) Integrationsweg längs der x -Achse ist die parametrisierbare Kurve $C(z)$ mit dem lokalen Abstand $|z|$ vom Koordinatenursprung in der komplexen Zahlenebene. Wir können deshalb auch die Abschätzung (43) in der reellen Form

$$|f(x)| \leq M \cdot \frac{1}{x^2}, \quad (44)$$

verwenden.

Wir betrachten also eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, z. B. eine reelle rationale Funktion vom Grad ≤ -2 und ohne reelle Polstellen, für die Konstanten $R, M \in \mathbb{R}$ existieren, sodass gemäß (43) gilt

$$|f(x)| \leq Mx^{-2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{mit } |x| \geq R.$$

Unter Berücksichtigung der Additivität des Integrals zerlegen wir jetzt das uneigentliche Riemann-Integral wie folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{-R} f(x) dx + \int_{-R}^R f(x) dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f(x) dx.$$

Das uneigentliche Integral existiert, wenn wir zeigen können, dass sich sowohl der obere als auch der untere Grenzwert in der Summe der Integrale bilden lassen. Untersuchen wir also den oberen Grenzwert und teilen dabei die Funktion $f(z)$ auf in ihren positiven Anteil $f_+(x)$ (oberhalb der x -Achse) und ihren negativen Anteil $f_-(x)$ unterhalb der x -Achse. Das betreffende Integral erhält dann die Gestalt

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f(x) dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r [f_+(x) + f_-(x)] dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f_+(x) dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f_-(x) dx. \end{aligned} \quad (45)$$

Wenn wir jetzt die Integrale $\int_R^r f_+(x) dx$ und $\int_R^r f_-(x) dx$ als Funktion von r betrachten, stellen wir fest

$$\begin{aligned} f_+(x) \geq 0 &\Rightarrow r \mapsto \int_R^r f_+(x) dx \text{ monoton wachsend,} \\ f_-(x) \leq 0 &\Rightarrow r \mapsto \int_R^r f_-(x) dx \text{ monoton fallend.} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (44) resultieren daraus die folgenden Abschätzungen

$$f_+(x) \leq |f(x)| \leq \frac{M}{x^2} \quad \text{und} \quad -f_-(x) \leq |f(x)| \leq \frac{M}{x^2} .$$

Diese Abschätzung wenden wir auf die beiden Integrale $\int_R^r f_+(x) dx$ und $\int_R^r f_-(x) dx$ an:

$$\left. \begin{array}{l} \int_R^r f_+(x) dx \\ \int_R^r -f_-(x) dx \end{array} \right\} \leq \int_R^r |f(x)| dx \leq \int_R^r M \cdot x^{-2} dx = \left[-M \cdot x^{-1} \right]_R^r = MR^{-1} - Mr^{-1} \leq MR^{-1} . \quad (46)$$

Wir stellen fest, dass die Integrale $\int_R^r f_+(x) dx$ und $\int_R^r -f_-(x) dx$ nach oben beschränkt sind und folglich das Integral

$$\int_R^r f(x) dx = \int_R^r [f_+(x) + f_-(x)] dx = \int_R^r f_+(x) dx - \int_R^r -f_-(x) dx \quad (47)$$

nach unten und nach oben beschränkt ist. Für den Grenzwert von (47), also für (45), erhalten wir mit (46) die folgende Abschätzung:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f(x) dx \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r |f(x)| dx \leq \lim_{r \rightarrow \infty} [MR^{-1} - Mr^{-1}] = MR^{-1} .$$

Wir sehen, dass der Integrand $f(x)$ im Unendlichen derart gegen null konvergiert und keinen Beitrag zum Integral leistet, dass das Integral für $r \rightarrow \infty$ nicht divergiert. Dies wäre nicht der Fall, wenn wir in (44) von einem Exponenten $k - l \geq -1$ ausgegangen wären.¹²

Die Argumentation bezüglich des Verhaltens des Integrals $\int_{-r}^{-R} f(x) dx$ für $r \rightarrow \infty$ ist völlig analog und kommt zum gleichen Ergebnis. Und schließlich ist auch das Integral $\int_{-R}^R f(x) dx$ endlich, sodass das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{für} \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit} \quad \deg p - \deg q \leq -2 \quad \text{existiert} . \quad (48)$$

Nachdem wir gezeigt haben, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ über eine reelle rationale Funktion $f(x)$ mit $\deg f(x) \leq -2$ existiert, betrachten wir das komplexe Integral

$$\int_C f(z) dz , \quad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} , \quad \deg f(z) = -2$$

¹²Integrale $\int_a^b x^n dx$ mit $n \geq -1$ divergieren für $b \rightarrow \infty$. Beispielsweise gilt bereits im Fall $n = -1$:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln a) = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b - \lim_{b \rightarrow \infty} \ln a = \infty - \ln a = \infty .$$

längs der Kurve $C = A + B$ unter den oben definierten Bedingungen. Nach dem **Residuensatz** gilt

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_A f(z) dz + \int_B f(z) dz \\ &= \int_{-R}^R f(x) dx + \int_B f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}(f, z_j) .\end{aligned}$$

Bevor wir den Grenzwert des Integrals für $R \rightarrow \infty$ bilden können, benötigen wir noch die Abschätzung des Integrals längs des Halbkreises B . Dafür benutzen wir die **Standardabschätzung für Wegintegrale**

$$\left| \int_B f(z) dz \right| \leq L(B) \cdot \max_{|z|=R} |f(z)| \leq \pi R \cdot MR^{-2} = \frac{\pi M}{R}$$

mit der Länge des Halbkreisbogens $L(B) = \pi R$ und mit der Abschätzung (43) für $|z| = R$, nämlich

$$|f(z)| \leq M \cdot \frac{1}{|z|^2} \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq \max_{|z|=R} |f(z)| \leq M \cdot \frac{1}{R^2} .$$

Abschließend bilden wir den Grenzwert des Betrags des Integrals längs der Kurve B für $R \rightarrow \infty$ und stellen fest, dass der Betrag des Integrals dann gegen null konvergiert:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_B f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi M}{R} = 0 . \quad (49)$$

Wenn aber der Betrag des Integrals im Unendlichen verschwindet, dann verschwindet auch das Integral selbst und wir erhalten für das Integral längs der Kurve C

$$\int_{C(R \rightarrow \infty)} f(z) dz = \underbrace{\int_{-R \rightarrow -\infty}^{R \rightarrow \infty} f(x) dx}_{\text{existiert, (48)}} + \underbrace{\int_{B(R \rightarrow \infty)} f(z) dz}_{\text{verschwindet, (49)}} = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}(f, z_j) \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}(f, z_j) \quad \text{für} \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \deg f(x) \leq -2 \quad . \quad \square$$

Da das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ reell ist, muss die Summe der Residuen von $f(z)$ rein imaginär sein, sodass das Produkt $2\pi i \cdot \sum_j \operatorname{Res}(f, z_j)$ ebenfalls reell ist.

Beispiele

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$

An diesem „übersichtlichen“ Beispiel wollen wir die Vorgehensweise bei der Lösung uneigentlicher Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ demonstrieren:

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ mit $p(x) \equiv 1$ und $q(x) = x^2 + 1$ besitzt Pole erster Ordnung an den Nullstellen von $q(x)$. Aus diesen Polen resultieren die Residuen von f .

Die Funktion $q(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$ besitzt lediglich die komplexen Nullstellen $x_1 = i$ und $x_2 = -i$, die man auch mit der sog. pq -Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen berechnen kann. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, dass q keine reellen Nullstellen besitzen darf. Die Funktion

$$q(z) = z^2 + 1$$

besitzt die gleichen Nullstellen wie $q(x)$.

Die Residuen lassen sich in diesem Fall sehr einfach mit der 6. Regel aus dem Abschnitt 12.2 berechnen:

$$\text{Res}(f, z_j) = \text{Res}\left(\frac{1}{q}, z_j\right) = \frac{1}{q'(z_j)} = \frac{1}{2z} \Big|_{z_j}, \quad q'(z_j) \neq 0.$$

Da die Nullstelle $z_2 = -i$ von q und folglich auch der aus dieser Nullstelle resultierende Pol von f in der unteren Hälfte der komplexen Zahlenebene liegen, ist für unser Integral nur das Residuum an der Stelle $z_1 = i$ relevant:

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{1}{2z_1} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Schließlich brauchen wir die relevanten Residuen von $f(z)$ nur noch einzusetzen, dann ist das Integral gelöst:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_j \text{Res}(f, z_j) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \pi}.$$

In Integraltabellen finden wir $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$. Damit und mit $1 = a^2 = a$ überprüfen wir unser Ergebnis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\arctan x \right]_{x=-t}^{x=t} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi. \quad \square$$

Der Vollständigkeit halber zeigen wir schließlich noch, dass das Wegintegral über die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ längs des Halbkreises

$$B := z = z(r, \varphi) = R \cdot e^{i\varphi}, \quad r = R = \text{const}, \quad \varphi \in [0, \pi]$$

für $R \rightarrow \infty$ verschwindet:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_B f(z) \cdot dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{(R e^{i\varphi})^2 + 1} \cdot i R e^{i\varphi} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \underbrace{\left[\frac{i e^{i\varphi}}{\lim_{R \rightarrow \infty} R e^{2i\varphi} + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R}} \right]}_{=0} d\varphi = 0. \quad \square \end{aligned}$$

• $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^m} dx$

Das Nennerpolynom $(z^2 + 1)^m$ der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^m} = \frac{1}{(z + i)^m (z - i)^m}$$

besitzt die rein imaginären Nullstellen i und $-i$ jeweils mit der Vielfachheit m . Für die Berechnung des Integrals relevant ist aber nur die in der oberen Halbebene liegende Nullstelle i bzw. der aus ihr resultierende Pol der Ordnung m . Zur Ermittlung des zugehörigen Residuums benutzen wir die 3. Rechenregel aus dem Abschnitt 12.2:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - i)^m \cdot \frac{1}{(z^2 + 1)^m} \right] \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \frac{(z - i)^m}{(z + i)^m (z - i)^m} \right] \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z + i)^{-m} \right]. \end{aligned}$$

Nach Durchführung der $m - 1$ Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} (-m)(-m-1)(-m-2)(-m-3) \cdots \\ &\quad \cdots (-m-(m-2)) \cdot (z + i)^{-m-(m-1)} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} (-1)^{m-1} \cdot m(m+1)(m+2) \cdots (2m-2) \cdot (2i)^{-2m+1}. \end{aligned}$$

Jetzt berücksichtigen wir $m(m+1)(m+2) \cdots (2m-2) = \frac{(2m-2)!}{(m-1)!}$, sodass

$$\text{Res}(f, i) = (-1)^{m-1} \cdot \frac{(2m-2)!}{(m-1)!(m-1)!} \cdot (2i)^{-2m+1}.$$

Diesen Ausdruck können wir mit

$$(-1)^{m-1} \cdot (2i)^{-2m+1} = \frac{(-1)^{m-1}}{i^{2m-1} \cdot 2^{2m-1}} = \frac{-i^{2m-1} \cdot (-1)^{m-1}}{2^{2m-1}} = \frac{-i}{2^{2m-1}}$$

und wegen¹³ $(2m-2) - (m-1) = (m-1)$ weiter vereinfachen:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^m}, i\right) = \frac{-i}{2^{2m-1}} \binom{2m-2}{m-1}.$$

Mit diesem Residuum haben wir im Grunde schon die Lösung des Integrals gefunden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^m} dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^m}, i\right) = 2\pi i \cdot \frac{-i}{2^{2m-1}} \binom{2m-2}{m-1} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^m} dx = \frac{\pi}{2^{2m-2}} \binom{2m-2}{m-1}}.$$

• $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - x - 5}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$

Das Nennerpolynom $h(z) = z^4 + 3z^2 + 2$ der Funktion

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{2z^2 - z - 5}{z^4 + 3z^2 + 2} = \frac{2z^2 - z - 5}{(z^2+1)(z^2+2)}$$

besitzt die vier rein imaginären Nullstellen (erster Ordnung) $\pm i$ und $\pm i\sqrt{2}$. Folglich besitzt die Funktion $f(z)$ an diesen Nullstellen Pole erster Ordnung. Für die Berechnung des Integrals relevant sind nur die in der oberen Halbebene liegenden Nullstellen i und $i\sqrt{2}$. Zur Ermittlung der zugehörigen Residuen benutzen wir die 7. Rechenregel aus dem Abschnitt 12.2:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, i\right) = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{2i^2 - i - 5}{4i^3 + 6i} = \frac{-7 - i}{2i} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i,$$

$$\operatorname{Res}(f, i\sqrt{2}) = \frac{g(i\sqrt{2})}{h'(i\sqrt{2})} = \frac{2 \cdot i^2 \cdot 2 - i\sqrt{2} - 5}{4 \cdot i^3 \cdot 2\sqrt{2} + 6 \cdot i\sqrt{2}} = \frac{-9 - \sqrt{2}i}{-2\sqrt{2}i} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2\sqrt{2}}i.$$

Damit ist das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - x - 5}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{9}{2\sqrt{2}}i\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - x - 5}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \pi \left(\frac{9}{\sqrt{2}} - 7\right)}.$$

¹³Für Binomialkoeffizienten gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \implies \frac{n!}{k! \cdot k!} = \binom{n}{k}$ für $n-k=k$.

14.3 Integralsinus und Integralkosinus

Es ist für die folgenden Abschnitte hilfreich, wenn wir uns zuvor mit dem Konvergenzverhalten des Integralsinus und des Integralkosinus vertraut machen. Wir können nämlich das Verhalten der Funktionen $\frac{1}{t} \cdot \sin t$ und $\frac{1}{t} \cdot \cos t$ analog zum Verhalten der Funktion $f(x) e^{iax} = f(x) \cdot \cos(ax) + i f(x) \cdot \sin(ax)$ betrachten. U. a. im Internet findet man schöne graphische Darstellungen dieser Funktionen aber auch vom Integralsinus und vom Integralkosinus. Anhand der Graphen kann man sehr leicht die Wirkungen verstehen, welche die Exponentialfunktion e^{iax} bzw. die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ ausüben, nämlich die **Oszillation** des Integranden und des Integrals, insbesondere aber die **Dämpfung** des Integrals.

Integralsinus $\text{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt, \quad |x| < \infty$

$$\left. \begin{array}{ll} \sin t & \text{ungerade Funktion} \\ \frac{1}{t} & \text{ungerade Funktion} \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{\sin t}{t} \quad \textbf{gerade Funktion} \text{ symmetrisch zur } y\text{-Achse}.$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin t}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0_{\pm}} \frac{\sin t}{t} = 1 \text{ (hebbare Singularität)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Si}(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad \textbf{Dirichlet-Integral} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$

Die Funktion $\frac{1}{t} \cdot \sin t$ fällt im Unendlichen so stark ab, dass das uneigentliche Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ über diese Funktion konvergiert, also existiert. Die Funktion $\frac{1}{t}$ allein besitzt an der Stelle $t = 0$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel, geht aber im Unendlichen ebenfalls gegen null gemäß

$$\lim_{t \rightarrow 0_-} \frac{1}{t} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{1}{t} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

Das Integral über $\frac{1}{t}$ allein divergiert sowohl im Unendlichen, weil die Funktion $\frac{1}{t}$ im Unendlichen nicht schnell genug abfällt, als auch an der Polstelle:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c, \quad t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow 0_{\pm}} \ln |t| = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \ln |t| = \infty.$$

Achtung! Das Integral $\int_0^\infty \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ ist divergent.

Integralkosinus $\text{Ci}(x) := \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \ln \gamma + \ln x - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt, \quad 0 < x < \infty$

mit der Euler'schen Konstante $\ln \gamma = 0,5772 \dots$

$$\left. \begin{array}{ll} \cos t & \text{gerade Funktion} \\ \frac{1}{t} & \text{ungerade Funktion} \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{\cos t}{t} \quad \textbf{ungerade Funktion} \text{ antisymmetrisch zur } y\text{-Achse}.$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos t}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0_{\pm}} \frac{\cos t}{t} = \pm\infty.$$

Die Funktion $\frac{1}{t} \cdot \cos t$ fällt wie die Funktion $\frac{\sin t}{t}$ im Unendlichen so stark ab, dass der Integralkosinus in der oben definierten Form existiert. Allerdings steht in der Definition des Integralkosinus als untere Integrationsgrenze $x > 0$, weil der Integrand $\frac{\cos t}{t}$ an der Stelle $t = 0$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel besitzt und deshalb der Integralkosinus dort divergiert. Die Integration längs der t -Achse unter Einbeziehung der Polstelle $t = 0$ ist also nicht möglich.

Wir werden aber im Folgenden die Integralsumme

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\cos t}{t} dt + \int_r^R \frac{\cos t}{t} dt = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{-R}^{-r} \frac{\cos t}{t} dt = - \int_r^R \frac{\cos t}{t} dt$$

benutzen. Weil dabei die Integrationsbereiche symmetrisch zur Polstelle im Koordinatenursprung $t = 0$ liegen und weil der Integrand eine ungerade Funktion ist, verschwindet die Summe der beiden Integrale. Wegen des Poles bei $x = 0$ sind die Integrale $\int_{-R}^0 \frac{\cos t}{t} dt$ und $\int_0^R \frac{\cos t}{t} dt$ sowie die uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^0 \frac{\cos t}{t} dt$ und $\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ keine Riemann-Integrale. Dennoch gilt der

Cauchy-Hauptwert (*principal value* $\mathcal{P}$) bzw. das **Hauptwertintegral**

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[\int_{-R}^{0-r} \frac{\cos t}{t} dt + \int_{0+r}^R \frac{\cos t}{t} dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = 0 ,$$

was infolge der symmetrischen Verhältnisse intuitiv klar ist. Analog zum Integral über das Produkt aus Dirac'scher δ -Funktion und Testfunktion kann das Hauptwertintegral als Funktional bzw. **Distribution** aufgefasst werden. Weiterführendes dazu findet man z. B. im Internet.

14.4 Berechnung von uneigentlichen Integralen $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx$ – Fourier-Transformation

Die Methode zur Berechnung von uneigentlichen Integralen der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{iax} dx$$

auf der Grundlage des Cauchy-Integralsatzes werden wir analog zum Abschnitt 14.2 entwickeln. Wir verwenden wieder das Halbkreismodell in der oberen Halbebene mit den gleichen Bedingungen wie im Abschnitt 14.2. Allerdings können wir die Bedingung

$$\deg p(z) - \deg q(z) \leq -2 \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$$

wegen der dämpfenden Wirkung der Exponentialfunktion e^{iaz} auf das Integral durch die schwächere Bedingung

$$\deg p(z) - \deg q(z) \leq -1 \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \text{ für } |z| \geq R, \operatorname{Im} z \geq 0$$

ersetzen. Mit dieser Beziehung und mit

$$\text{festem } a > 0, \quad C(z(t)) = Re^{it}, \quad dz = iR e^{it} dt,$$

$$f(z) \cdot e^{iaz} = f(Re^{it}) \cdot e^{iaRe^{it}} = f(Re^{it}) \cdot e^{iaR(\cos t + i \sin t)} = f(Re^{it}) \cdot e^{iaR \cos t} \cdot e^{-aR \sin t}$$

zeigen wir zunächst die Existenz des Wegintegrals $\int_C g(z) dz$ für $R \rightarrow \infty$. Das Wegintegral längs C ist

$$\begin{aligned} \int_C g(z) dz &= \int_A f(z) \cdot e^{iaz} dz + \int_B f(z) \cdot e^{iaz} dz \\ &= \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx + iR \int_0^\pi f(Re^{it}) \cdot e^{iaR \cos t} \cdot e^{-aR \sin t} \cdot e^{it} dt. \end{aligned}$$

Wir schätzen jetzt das parametrisierte Integral längs B ab und verwenden dabei $|e^{iaR \cos t}| = 1$ und $|e^{it}| = 1$ sowie¹⁴

$$\sin t \geq t - \frac{t^3}{6} = t \left(1 - \frac{t^2}{6}\right) \geq \frac{1}{2} t \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} :$$

$$\begin{aligned} &\left| iR \int_0^\pi f(Re^{it}) \cdot e^{iaR \cos t} \cdot e^{-aR \sin t} \cdot e^{it} dt \right| \\ &\leq R \int_0^\pi \left| f(Re^{it}) \cdot e^{iaR \cos t} \cdot e^{-aR \sin t} \cdot e^{it} \right| dt \\ &= R \int_0^\pi \left| f(Re^{it}) \right| \cdot \left| e^{-aR \sin t} \right| dt \\ &\leq 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M}{R} \cdot e^{-aR \frac{1}{2} t} dt = 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2} aR t} dt. \end{aligned} \tag{50}$$

¹⁴Sinus-Reihenentwicklung: $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$, $\left(1 - \frac{(\pi/2)^2}{6}\right) \approx 1 - 0,4 > \frac{1}{2}$.

Wir lösen das Integral und bilden den Grenzwert:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{4M}{aR} \left(1 - e^{-\frac{1}{4}aR\pi}\right) = 0.$$

Das Wegintegral längs des oberen Halbkreises B verschwindet also, was auch bedeutet, dass das Integral für $R \rightarrow \infty$ nicht divergiert. Somit existiert auf der reellen Achse, wo nach Voraussetzung der Integrand $g(z)$ keine Pole besitzen soll, das folgende Wegintegral:

$$\int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx = \int_{-R}^R f(x) \cos(ax) dx + i \int_{-R}^R f(x) \sin(ax) dx.$$

Ist $f(x)$ eine *gerade* Funktion, verschwindet das Integral mit dem dann ungeraden Integranden $f(x) \sin(ax)$, ist $f(x)$ eine *ungerade* Funktion, verschwindet das Integral mit dem dann ungeraden Integranden $f(x) \cos(ax)$. Nach der Integration bilden wir den Grenzwert für $R \rightarrow \infty$.

Wenden wir auf diese Ergebnisse den Residuensatz an, so können wir für die *obere Halbebene* und unter den oben genannten Bedingungen feststellen:

$$\begin{aligned} \int_C g(z) dz &= \int_A f(x) e^{iax} dx + \int_B f(z) e^{iaz} dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(g, z_k) \Rightarrow \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_{|z|=R}} f(z(t)) e^{iaz(t)} \cdot iRe^{it} dt}_{=0} &= 2\pi i \sum_k \text{Res}(g, z_k), \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f(z) e^{iaz}, z_k), \quad a > 0.$$

Es gibt Fälle, bei denen es sinnvoll oder erforderlich ist, den Halbkreis in die untere Halbebene zu legen. Wenn wir dann auf der reellen Achse wieder von $-R$ nach R integrieren wollen, ist der Umlaufsinn des Wegintegrals in der unteren Halbebene negativ, wodurch sich das Vorzeichen des Integrals gegenüber dem der oberen Halbebene umkehrt. Mit der Änderung des Umlaufsinn ändern sich auch das Vorzeichen bei der Parametrisierung und die Vorzeichen der Integrationsgrenzen des Halbkreisbogens, d. h., die Integration läuft in der unteren Halbebene von $t = 0$ bis $t = -\pi$ bzw. bis $t = -\frac{\pi}{2}$. Die geschlossene Kurve um den unteren Halbkreis mit negativem Umlaufsinn bezeichnen wir mit C_- und den unteren Halbkreisbogen mit negativem Umlaufsinn mit B_- , die Kurven in der oberen Halbebene (mit positivem Umlaufsinn) indizieren wir zur besseren Unterscheidung mit einem Pluszeichen.

Der Vollständigkeit halber skizzieren wir kurz die Parametrisierung der Kurve B_- sowie die Abschätzung des Wegintegrals längs B_- :

$$\left. \begin{aligned} C_+(z(t)) &:= R e^{it}, \quad dz = i R e^{it} \\ \Rightarrow e^{ia R e^{it}} &= e^{ia R \cos t} \cdot e^{-a R \sin t} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} C_-(z(t)) &:= R e^{-it}, \quad dz = -i R e^{-it} \\ \Rightarrow e^{ia R e^{-it}} &= e^{ia R \cos t} \cdot e^{a R \sin t} \end{aligned} \right.$$

Statt (50) erhalten wir damit für B_- als Ergebnis der Abschätzung

$$2M \int_0^{-\frac{\pi}{2}} e^{\frac{1}{2}aRt} dt = \frac{4M}{aR} \left[e^{\frac{1}{2}aRt} \right]_{t=0}^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{4M}{aR} \left(1 - e^{-\frac{1}{4}aR\pi} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{4M}{aR} \left(1 - e^{-\frac{1}{4}aR\pi} \right) \right] = 0 . \quad \square$$

Statt dieser Vorgehensweise werden vereinfachend auch nur das Vorzeichen von a geändert und die Integrationsgrenzen an den veränderten Integrationsweg angepasst:

$$\text{für } C_+ : a = |a| > 0, \int_{B_+} = \int_{t=0}^{\pi} \longrightarrow \text{für } C_- : a = -|a| < 0, \int_{B_-} = \int_{t=0}^{-\pi} .$$

Das in diesem Abschnitt gezeigte Berechnungsverfahren für uneigentliche Integrale wird oft auch an einem Rechteckmodell hergeleitet. Weil die Darstellung am Rechteckmodell mühsam aber lehrreich ist, haben wir die Abschätzungen der entsprechenden Integrale in den Anhang verbannt.

Abschließend stellen wir die Ergebnisse dieses Abschnitts in einer Synopse dar. Leider ist in der Mathematik und besonders in der Physik die Notation für dieselben Sachverhalte nicht immer einheitlich, was leicht zu Missverständnissen führen kann. Hier betrifft es die Vorzeichenkonvention. Deshalb weisen wir in der Synopse auf die bei der Fourier-Transformation gelegentlich auftretenden „Vorzeichenabweichungen“ hin. Bei genauem Hinschauen stellen wir jedoch fest, dass die Vorzeichen hierbei tatsächlich nur eine Konvention sind und dass es sich im Grunde genommen nicht um Abweichungen handelt.

Synopse zur Berechnung von uneigentlichen Integralen der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} \, , \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit} \quad \deg p(x) - \deg q(x) \leq -1$$

durch Anwendung des Residuensatzes auf holomorphe Funktionen $g(z) = f(z) e^{iaz}$, die keine Pole auf der reellen Achse besitzen

Nach dem Residuensatz gilt für die **obere Halbebene**

$$\oint_{C_+} g(z) \, dz = \oint_{C_+} f(z) e^{iaz} \, dz = 2\pi i \sum_m \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z > 0} (g, z_m) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} \, dx$$

$$\text{mit } a > 0 \quad \Rightarrow \quad e^{iaz} = e^{i|a|z}$$

und in der üblichen Notation der Fourier-Transformation

$$\text{mit } k < 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-ikz} = e^{-i(-|k|)z} = e^{i|k|z}$$

$$\oint_{C_+} g(z) \, dz = \oint_{C_+} f(z) e^{-ikz} \, dz = 2\pi i \sum_m \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z > 0} (g, z_m) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \, dx \, .$$

Nach dem Residuensatz gilt für die **untere Halbebene**

$$\oint_{C_-} g(z) \, dz = \oint_{C_-} f(z) e^{iaz} \, dz = -2\pi i \sum_n \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z < 0} (g, z_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} \, dx$$

$$\text{mit } a < 0 \quad \Rightarrow \quad e^{iaz} = e^{i(-|a|)z} = e^{-i|a|z}$$

und in der üblichen Notation der Fourier-Transformation

$$\text{mit } k > 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-ikz} = e^{-i|k|z}$$

$$\oint_{C_-} g(z) \, dz = \oint_{C_-} f(z) e^{-ikz} \, dz = -2\pi i \sum_n \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z < 0} (g, z_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \, dx \, .$$

Aus $f(z) \cdot e^{iaz} = f(z) \cdot \cos(az) + i \cdot f(z) \cdot \sin(az)$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \cos(ax) \, dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \cdot \sum_j \operatorname{Res}(f(z) e^{iaz}, z_j) \right\} \, ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \sin(ax) \, dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \cdot \sum_j \operatorname{Res}(f(z) e^{iaz}, z_j) \right\} \, .$$

Beispiele

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx$

Dieses Beispiel nutzen wir, um die letzte Gleichung der Synopse zu verifizieren:

$$\oint_{C_+} \frac{z \cdot e^{iaz}}{z^2 + b^2} dz = \int_{-R}^R \frac{x \cdot e^{iax}}{x^2 + b^2} dx + \int_{B_+} \frac{z \cdot e^{iaz}}{z^2 + b^2} dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z > 0} \left(\frac{z \cdot e^{iaz}}{z^2 + b^2}, z_j \right). \quad (51)$$

Die Funktion $\frac{z \cdot e^{iaz}}{z^2 + b^2} = \frac{z \cdot e^{iaz}}{(z + ib)(z - ib)}$ mit $b > 0$

besitzt zwei Pole erster Ordnung an den beiden Nullstellen des Nenners $-ib$ und ib , von denen nur ib in der oberen Halbebene liegt. Das zu ib gehörende Residuum erhalten wir mit der 2. Rechenregel aus dem Abschnitt 12.2 wie folgt:

$$\operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z > 0} \left(\frac{z \cdot e^{iaz}}{(z + ib)(z - ib)}, ib \right) = \lim_{z \rightarrow ib} \left[(z - ib) \cdot \frac{z \cdot e^{iaz}}{(z + ib)(z - ib)} \right] = \frac{e^{-ab}}{2}.$$

Mit diesem Residuum ergibt (51) nach Aufteilung der Exponentialfunktion in die entsprechende Kosinus- und Sinusfunktion:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\int_{-R}^R \frac{x \cos(ax)}{x^2 + b^2} dx}_{=0, \text{ weil Integrand ungerade}} + i \int_{-R}^R \frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx \right] + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_+} \frac{z e^{iaz}}{z^2 + b^2} dz}_{=0} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ab}}{2}.$$

Nach Grenzwertbildung verbleibt nur noch

$$i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx = i \cdot \pi e^{-ab} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \sin(ax)}{x^2 + b^2} dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \cdot \operatorname{Res} \left(\frac{z \cdot e^{iaz}}{z^2 + b^2}, ib \right) \right\} = \pi e^{-ab}.$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + b^2} dx, \quad a > 0, b > 0, \quad \text{äquivalent zu} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + b^2} dx, \quad k < 0, b > 0$

Dieses Beispiel dient der Verifizierung der vorletzten Gleichung der Synopse. Außerdem ersetzen wir $a > 0$ durch $-k > 0$ und zeigen damit die Fourier-Transformation der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 + b^2}$. Dabei sei $\mathcal{F}$ das Symbol für die Fourier-Transformation und

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} \text{ bedeute } \tilde{f}(k) = \text{Fourier-Transformierte von } f(x).$$

$$\oint_{C_+} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + b^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{-ikx}}{x^2 + b^2} dx + \int_{B_+} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + b^2} dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z > 0} \left(\frac{e^{-ikz}}{z^2 + b^2}, z_j \right). \quad (52)$$

Die Funktion $\frac{e^{-ikz}}{z^2 + b^2} = \frac{e^{-ikz}}{(z + ib)(z - ib)}$ mit $b > 0$

besitzt wie das erste Beispiel zwei Pole erster Ordnung an den beiden Nullstellen des Nenners $-ib$ und ib , von denen nur ib in der oberen Halbebene liegt. Das zu ib gehörende Residuum erhalten wir wieder mit der 2. Rechenregel aus dem Abschnitt 12.2 wie folgt:

$$\operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z > 0} \left(\frac{e^{-ikz}}{(z+ib)(z-ib)}, ib \right) = \lim_{z \rightarrow ib} \left[(z - ib) \cdot \frac{e^{-ikz}}{(z + ib)(z - ib)} \right] = \frac{e^{kb}}{2ib}.$$

Mit diesem Residuum ergibt (52) nach Aufteilung der Exponentialfunktion in die entsprechende Kosinus- und Sinusfunktion:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R \frac{x \cos(-kx)}{x^2 + b^2} dx + i \underbrace{\int_{-R}^R \frac{x \sin(-kx)}{x^2 + b^2} dx}_{=0, \text{ weil Integrand ungerade}} \right] + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_+} \frac{e^{-ikz}}{z^2 + b^2} dz}_{=0} = 2\pi i \cdot \frac{e^{kb}}{2ib}.$$

Nach Grenzwertbildung verbleibt nur noch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \cos(-kx)}{x^2 + b^2} dx = \pi \cdot \frac{e^{kb}}{b} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \cos(kx)}{x^2 + b^2} dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \cdot \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-ikz}}{z^2 + b^2}, ib \right) \right\} = \frac{\pi}{b} e^{kb} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + b^2} dx}.$$

Die Fourier-Transformation der Funktion $f(x)$ liefert die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$:¹⁵

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2 + b^2}\right\} = \tilde{f}(k) = \frac{\pi}{b} e^{kb}, \quad k < 0, \quad b > 0.$$

¹⁵Zur Überprüfung dieses Ergebnisses führen wir im Anhang die Fourier-Rücktransformation durch.

14.5 Berechnung von uneigentlichen Integralen $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx$ für $f(z) e^{iaz}$ mit Pol auf der reellen Achse

In Ergänzung zu Abschnitt 14.4 betrachten wir jetzt den Fall, dass die Funktion $g(z)$, beispielsweise in der Gestalt $g(z) = f(z) \cdot e^{iaz}$, einen **Pol erster Ordnung** an der Stelle $z_0 = x_0$ (auf der reellen Achse) besitzt (s. Abb. 9). Im übrigen sollen für diesen Fall die gleichen Bedingungen gelten wie im Abschnitt 14.4. Demzufolge existieren die Kurvenintegrale längs C_1 und C_2 für $R \rightarrow \infty$ während dann das Kurvenintegral I_3 längs C_3 verschwindet. Wir müssen also klären, wie sich der Pol z_0 mit der zugehörigen Kurve C_0 für $\rho \rightarrow 0$ auf das Integral auswirkt.

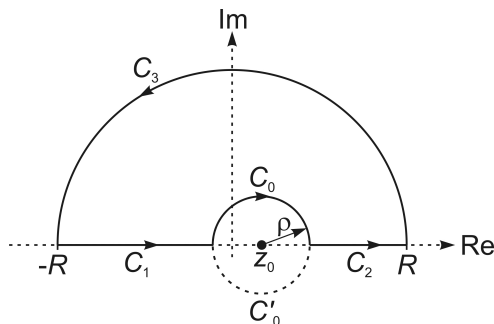


Abb. 9

Nach dem Cauchy-Integralsatz und nach dem Residuensatz gilt für die geschlossene Jordan-Kurve $C := C_0 + C_1 + C_2 + C_3$ mit den resultierenden vier Kurvenintegralen $I_k = \int_{C_k} g(z) dz$

$$\oint_C g(z) dz = \sum_{k=0}^3 \int_{C_k} g(z) dz = I_0 + I_1 + I_2 + I_3 = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z > 0} (g, z_j) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C g(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^2 \int_{C_k} g(z) dz + \underbrace{\int_{C_0} g(z) dz}_{I_0} = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{\operatorname{Im} z > 0} (g, z_j) . \quad (53)$$

Betrachten wir das Kurvenintegral I_0 . Die Kurve C_0 umläuft in *negativer* Richtung einen Halbkreis mit Radius ρ um die Polstelle z_0 . Das von C_0 und C'_0 abgeschlossene Gebiet soll hinreichend klein sein, sodass es außer z_0 keine weiteren Polstellen besitzt. Deshalb können wir nach (31) für $g(z)$

$$g(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z)$$

schreiben.¹⁶ Der Pol z_0 ist gleichzeitig der Entwicklungspunkt für die Laurent-Reihe der Funktion $g(z)$ in dem von C_0 und C'_0 eingeschlossenen Gebiet. Das bedeutet, dass $h(z)$ in der Umgebung um z_0 und in z_0 selbst holomorph bzw. stetig und beschränkt ist, sodass für alle z dieser Umgebung ein $0 \leq c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$|h(z)| \leq c .$$

¹⁶Die hier verwendete Funktion $g(z)$ ist im Kontext von (31) die Funktion $\tilde{f}(z)$.

Daraus folgt für das Integral

$$I_0 = \int_{C_0} g(z) dz = \int_{C_0} \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz + \int_{C_0} h(z) dz$$

mit der Standardabschätzung für Integrale

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{C_0} h(z) dz \leq \lim_{\varrho \rightarrow 0} \pi \varrho \cdot c = 0$$

schließlich unter Verwendung von (12)

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} I_0 = \lim_{\varrho \rightarrow 0} a_{-1} \int_{C_0} \frac{1}{z - z_0} dz = -a_{-1} \cdot \pi i .$$

Wir erhalten hier nicht $2\pi i$ wie in (12) sondern $-\pi i$, weil wir nur von π bis 0, also in negativer Richtung längs des oberen Halbkreises C_0 integrieren.

Jetzt sind wir in der Lage, mit $a_{-1} = \text{Res}(g, z_0)$ das Umlaufintegral längs C für $R \rightarrow \infty$ und $\varrho \rightarrow 0$ zu formulieren:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varrho \rightarrow 0}} \oint_C g(z) dz = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varrho \rightarrow 0}} (I_1 + I_2) + \lim_{\varrho \rightarrow 0} I_0 = 2\pi i \sum_j \text{Res}_{\text{Im } z > 0}(g, z_j) \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varrho \rightarrow 0}} \left[\int_{-R}^{x_0 - \varrho} g(x) dx + \int_{x_0 + \varrho}^R g(x) dx \right] + (-a_{-1} \cdot \pi i) = 2\pi i \sum_j \text{Res}_{\text{Im } z > 0}(g, z_j) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \varrho} f(x) e^{iax} dx + \int_{x_0 + \varrho}^{\infty} f(x) e^{iax} dx \right] = 2\pi i \sum_j \text{Res}_{\text{Im } z > 0}(g, z_j) + \pi i \cdot \text{Res}(g, z_0) .$$

(54)

Diese Formel lässt sich für den Fall verallgemeinern, dass $g(z)$ höchstens endlich viele Pole erster Ordnung auf der reellen Achse besitzt.

Beispiel

$$\bullet \quad g(z) = f(z) \cdot e^{iaz} = \frac{e^{iz}}{z} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Im} \left\{ \pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) \right\} = \text{Im}\{\pi i\} = \pi$$

Die Funktion $\frac{e^{iz}}{z}$ besitzt nur an der Stelle $z_0 = x_0 = 0$, also auf der reellen Achse einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \cdot \frac{e^{iz}}{z} \right) = 1 .$$

Damit erhält (54) die Gestalt

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varrho} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varrho}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right] = \pi i .$$

Unter Berücksichtigung der Euler-Identität können wir die Integranden umformulieren und erhalten schließlich

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{-\varrho} \frac{\cos x}{x} dx + \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx \right]}_{=0} + \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varrho} \frac{i \sin x}{x} dx + \int_{\varrho}^{\infty} \frac{i \sin x}{x} dx \right] = \pi i .$$

Weil der Integrand $\frac{\cos x}{x}$ eine ungerade Funktion ist, verschwindet die Integralsumme in der linken eckigen Klammer. Der Integrand $\frac{\sin x}{x}$ ist eine gerade Funktion und besitzt an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Singularität. Wir können deshalb für den Grenzwert der rechten eckigen Klammer zusammenfassend schreiben:

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi i \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} =: \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Si}(x)} .$$

14.6 Berechnung von uneigentlichen Integralen $\int_0^\infty x^a \cdot f(x) dx$ für $a \in \mathbb{C}$, $0 < \operatorname{Re} a < 1$

In diesem Abschnitt zeigen wir

$$\int_0^\infty g(x) dx = \int_0^\infty x^a \cdot f(x) dx = -\frac{\pi \cdot e^{-i\pi a}}{\sin(\pi a)} \cdot \sum_{z_k \in \tilde{G}} \operatorname{Res}(g, z_k) \quad (55)$$

unter den folgenden Bedingungen:

- Das Gebiet $\tilde{G} : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ sei die komplexe Zahlenebene ohne die positive reelle Achse und ohne den Koordinatenursprung. $\{z \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ beschreibt dabei einen Schnitt bzw. einen Schlitz in der komplexen Zahlenebene längs der positiven reellen Achse.

- Für die rationale Funktion $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit der **Grad-Bedingung**

$$\deg p(z) - \deg q(z) \leq -2$$

gilt im Fall hinreichend großer $|z|$ nach dem Satz über das Wachstum von rationalen Funktionen (42)

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty.$$

- Weiterhin besitze $q(z)$ keine Nullstelle und $f(z)$ keinen Pol auf der positiven reellen Achse $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Weil also $f(z)$ keinen Pol in $z = 0$ besitzt, nimmt $|f(z)|$ in $z = 0$ einen endlichen Wert an, d. h., $f(z)$ ist für $z \rightarrow 0$ beschränkt.¹⁷ Deshalb existiert eine Konstante k , mit der stets gilt:

$$|f(z)| \leq \frac{k}{|z|} \quad \text{für } z \rightarrow 0.$$

- Für den Exponenten $a \in \mathbb{R}$ gelte $0 < a < 1$.
- Die Funktion z^a besitzt folglich nur in $z = 0$ eine einfache Nullstelle aber keinen Pol. Deshalb sind die Funktionen $f(z)$ und auch $g(z)$ bis auf höchstens endlich viele Pole in $\tilde{G}$ holomorph in $\mathbb{C}$.
- Aufgrund der Grad-Bedingung existiert für $g(z)$ der Grenzwert

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^a \cdot f(z) = 0.$$

- Weil in $z = 0$ die Funktion $f(z)$ beschränkt ist und gleichzeitig die Funktion z^a verschwindet, existiert für $g(z)$ der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z^a \cdot f(z) = 0.$$

¹⁷Dieses Verfahren gilt auch für Funktionen $f(z)$ bzw. $f(x)$ mit einem einfachen Pol im Nullpunkt, wenn das Integral über f dort trotzdem konvergiert. Dass derartige Funktionen existieren, zeigen wir im Abschnitt 15.4.

Vorbetrachtungen

Der Hauptzweig bzw. der Hauptwert $\tilde{\ln}(z)$ des natürlichen Logarithmus sei wie folgt definiert:

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\ln}(z) := \ln(|z| \cdot e^{i\varphi}) = \ln|z| + i\varphi \quad \text{mit} \quad 0 < \varphi < 2\pi .$$

Damit ist $\tilde{\ln}(z)$ holomorph auf $\tilde{G}$ und folglich ist auch

$$\tilde{\ln}(z^a) \quad \text{mit} \quad z^a := (|z| \cdot e^{i\varphi})^a = (e^{\ln|z| + i\varphi})^a = e^{a \cdot \tilde{\ln}(z)}$$

holomorph auf $\tilde{G}$. Betrachten wir die Grenzen des Hauptzweiges der Logarithmus-Funktion

$$\tilde{\ln}(z) = \tilde{\ln}(x + iy) = \tilde{\ln}(x \pm i\epsilon)$$

für ein bestimmtes $x > 0$ (s. Abschn. 6):

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \tilde{\ln}(x + i\epsilon) = \ln x \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \tilde{\ln}(x - i\epsilon) = \ln x + 2\pi i \end{array} \right\} = w(z) \quad \text{für} \quad z = x > 0$$

bzw. kurz

$$\boxed{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(x - i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(x + i\epsilon) + 2\pi i = \ln x + 2\pi i} . \quad (56)$$

Daraus folgen die Grenzwerte der Funktion(en)

$$e^{a \cdot \tilde{\ln}(z)} = z^a = (x + iy)^a = (x \pm i\epsilon)^a, \quad \forall a \in \mathbb{C},$$

längs der positiven reellen Achse, d. h. längs des Schnitts bezüglich $\tilde{\ln}(z)$, für $\epsilon \rightarrow 0_+$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} e^{a \cdot \tilde{\ln}(z)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} z^a = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} (x + i\epsilon)^a = e^{a \cdot \ln x} = x^a, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} (x - i\epsilon)^a = e^{a \cdot \ln x + a \cdot 2\pi i} = x^a \cdot e^{2\pi i a} \end{cases}$$

bzw. kurz

$$\boxed{\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x - i\epsilon)^a = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x + i\epsilon)^a \cdot e^{2\pi i a} = x^a \cdot e^{2\pi i a}} . \quad (57)$$

Wir betrachten die in Abbildung 10 dargestellte geschlossene Jordan-Kurve $C := C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ für $\epsilon, \varrho, R > 0$.

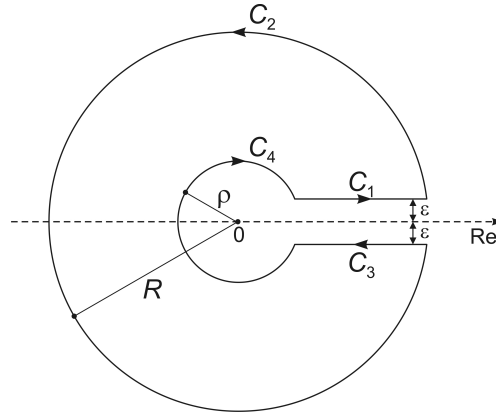


Abb. 10

Die Kurven C_1 bzw. C_3 sind Strecken auf den Geraden $\text{Im } z = \epsilon$ bzw. $\text{Im } z = -\epsilon$ und die Kurven C_2 und C_4 sind Kreisbögen. Wenn wir ϵ und ϱ so klein und R so groß wählen, dass alle Pole von $f(z)$ in dem von C umrandeten Gebiet liegen, liefert der Residuensatz das Umlaufintegral

$$\oint_C g(z) dz = \oint_C z^a \cdot f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \tilde{G}} \text{Res}(g, z_k). \quad (58)$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass die Funktion z^a in $\tilde{G}$ keine Pole besitzt, d. h. in $\tilde{G}$ holomorph ist.

Schätzen wir das Verhalten der Kurvenintegrale längs C_2 für $\epsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ und längs C_4 für $\epsilon \rightarrow 0$ und $\varrho \rightarrow 0$ mit der *Standardabschätzung für Wegintegrale* ab:

- Abschätzung des Wegintegrals $\int_{C_2} z^a f(z) dz$ mit $C_2(z) := |z| = R$ und dem Kreisumfang $2\pi R$ für $R \rightarrow \infty$:

$$\left| \int_{C_2} z^a f(z) dz \right| \leq 2\pi R \cdot \sup_{z \in C_2} |z^a f(z)| = 2\pi R \cdot \sup_{z \in C_2} |z|^a \cdot |f(z)|,$$

$$\left| \int_{C_2} z^a f(z) dz \right| \leq 2\pi \cdot R^{1+a} \cdot \sup_{z \in C_2} |f(z)|.$$

Daraus folgt im Fall hinreichend großer $|z| = R$ mit $\sup_{z \in C_2} |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} = \frac{M}{R^2}$

$$\left| \int_{C_2} z^a f(z) dz \right| \leq 2\pi \cdot R^{1+a} \cdot \frac{M}{R^2} = \frac{2\pi M}{R^{1-a}} \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} \left| \int_{C_2} z^a f(z) dz \right| = \lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} \frac{2\pi M}{R^{1-a}} = 0.$$

Das Kurvenintegral längs C_2 verschwindet im Unendlichen.

- Abschätzung des Wegintegrals $\int_{C_4} z^a f(z) dz$ mit $C_4(z) := |z| = \varrho$ und dem Kreisumfang $2\pi\varrho$ für $\varrho \rightarrow 0$ analog zur Abschätzung des Wegintegrals längs C_2 :

$$\left| \int_{C_4} z^a f(z) dz \right| \leq 2\pi\varrho \cdot \sup_{z \in C_4} |z|^a \cdot |f(z)| \leq 2\pi\varrho \cdot \varrho^a \cdot \frac{k}{\varrho}.$$

Unter der Bedingung, dass $q(z)$ in $z = 0$ keine Nullstelle und somit $f(z)$ in $z = 0$ keinen Pol besitzt, d. h. in z_0 holomorph ist, liefert die Abschätzung den Grenzwert

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \varrho \rightarrow 0}} \left| \int_{C_4} z^a f(z) dz \right| = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \varrho \rightarrow 0}} 2\pi \cdot \varrho^a \cdot k = 0.$$

Das Kurvenintegral längs C_4 verschwindet für $\varrho \rightarrow 0$.

Jetzt untersuchen wir das Verhalten der Kurvenintegrale längs C_1 und C_3 für den Grenzfall

$\epsilon \rightarrow 0, \varrho \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$:

- $C_1(z(x)) = x + i\epsilon$ für $\varrho \leq x \leq R, dz = dx$

$$\int_{C_1} z^a f(z) dz = \int_{\varrho}^R (x + i\epsilon)^a f(x + i\epsilon) dx \Rightarrow$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} z^a f(z) dz = \int_0^{\infty} z^a f(x) dx.$$

- Um unnötigen Diskussionen und Vorzeichenfehlern, die eine Parametrisierung wie z. B. $C_3(z(t)) = \varrho + R - t - i\epsilon, \varrho \leq t \leq R, dz = -dt$ evl. mit sich brächte, aus dem Weg zu gehen, bilden wir zunächst das Kurvenintegral längs $-C_3$, d. h., entgegengesetzt zu der in der Abb. 10 dargestellten Integrationsrichtung. Abschließend können wir durch Vertauschung der Integrationsgrenzen oder des Integralvorzeichens ohne Mühe wieder zur geforderten Integrationsrichtung längs C_3 zurückkehren.

$$-C_3(z(x)) = x - i\epsilon \quad \text{für} \quad \varrho \leq x \leq R, dz = dx$$

$$\int_{-C_3} z^a f(z) dz = \int_{\varrho}^R (x - i\epsilon)^a f(x - i\epsilon) dx.$$

Gemäß (57) benutzen wir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x - i\epsilon)^a = x^a \cdot e^{2\pi ia}$$

bei der folgenden Grenzwertbildung:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-C_3} z^a f(z) dz = e^{2\pi ia} \int_{\varrho}^R x^a f(x) dx \Rightarrow$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3} z^a f(z) dz = -e^{2\pi ia} \int_0^{\infty} x^a f(x) dx.$$

Weil die Kurvenintegrale längs C_2 für $R \rightarrow \infty$ und längs C_4 für $\varrho \rightarrow 0$ verschwinden, bleibt vom (gesamten) Umlaufintegral (58) nach Grenzwertbildung nur

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C z^a f(z) \, dz &= \int_0^\infty x^a f(x) \, dx - e^{2\pi i a} \int_0^\infty x^a f(x) \, dx \\
 &= (1 - e^{2\pi i a}) \int_0^\infty x^a f(x) \, dx \\
 &= 2\pi i \sum_{z_k \in \tilde{G}} \text{Res}(g, z_k) \quad \Leftrightarrow \\
 \boxed{\int_0^\infty x^a f(x) \, dx} &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_{z_k \in \tilde{G}} \text{Res}(g, z_k) \quad (59)
 \end{aligned}$$

übrig. Durch Erweitern mit $e^{-i\pi a}$ können wir den Faktor vor der Residuensumme noch etwas vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2i\pi a}} \cdot \frac{e^{-i\pi a}}{e^{-i\pi a}} = \frac{\pi e^{-i\pi a} \cdot 2i}{e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}} = -\pi e^{-i\pi a} \cdot \underbrace{\frac{2i}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}}}_{= \frac{1}{\sin(\pi a)}} \\
 &= -\frac{\pi \cdot e^{-i\pi a}}{\sin(\pi a)} .
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das oben angegebene uneigentliche Integral

$$\boxed{\int_0^\infty x^a f(x) \, dx = -\frac{\pi \cdot e^{-i\pi a}}{\sin(\pi a)} \sum_{z_k \in \tilde{G}} \text{Res}(g, z_k)} \quad . \quad \square$$

Beispiel

- $g(z) = z^a \cdot f(z) = \frac{z^a}{z^2 + 1}$ für $0 < a < 1$:

$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ besitzt keinen Pol auf der positiven reellen Achse $[0, \infty[$ und $g(z) = \frac{z^a}{z^2 + 1}$ besitzt zwei Pole in $\tilde{G}$, nämlich an den Nullstellen $z = \pm i$ von $f(z)$. Die zugehörigen Residuen in $\tilde{G}$ berechnen wir mit der 7. Regel wie folgt:

$$\text{Res}\left(\frac{z^a}{z^2 + 1}, \pm i\right) = \left.\frac{z^a}{2z}\right|_{z=\pm i} = \frac{(\pm i)^a}{\pm 2i} .$$

Wir setzen die Summe aus diesen beiden Residuen sowie $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ in (59) ein und erhalten unter Berücksichtigung von

$$+i = e^{i\pi \frac{1}{2}} , \quad -i = e^{i\pi \frac{3}{2}} = e^{i\pi(1 + \frac{1}{2})} = e^{i\pi} \cdot e^{i\pi \frac{1}{2}} :$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^a \cdot \frac{1}{x^2+1} dx &= \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi a}} \cdot \sum_{z_k \in \tilde{G}} \text{Res}(g, z_k) \\
&= \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi a}} \cdot \left[\frac{e^{i\pi a \frac{1}{2}}}{2i} - \frac{e^{i\pi a \frac{3}{2}}}{2i} \right] \\
&= \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi a}} \cdot \frac{e^{i\pi a \frac{1}{2}}(1-e^{i\pi a})}{2i} \\
&= \frac{\pi}{(1+e^{i\pi a})(1-e^{i\pi a})} \cdot e^{i\pi a \frac{1}{2}}(1-e^{i\pi a}) \\
&= \frac{\pi}{e^{i\pi a \frac{1}{2}} + e^{-i\pi a \frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi a}{2}}} .$$

Beispielsweise resultiert daraus für $a = \frac{1}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi}{4}} \approx 2,22 .$$

14.7 Berechnung von uneigentlichen Integralen $\int_0^\infty f(x) dx$

In diesem Abschnitt zeigen wir

$$\boxed{\int_0^\infty f(x) dx = - \sum_{z_k \in \tilde{G}} \text{Res}(f(z) \cdot \ln z, z_k)} \quad (60)$$

auf Grundlage der Abbildung 10 und unter den im Abschnitt 14.6 aufgeführten Bedingungen. Insbesondere sei daran erinnert, dass alle Residuen der Funktion $f(z)$ innerhalb des von C eingeschlossenen Gebietes liegen sollen, dass folglich $f(z)$ keine Singularitäten auf C selbst und auch keine Singularitäten auf der positiven reellen Achse einschließlich des Koordinatenursprungs besitzen soll.

Beginnen wir mit der Abschätzung der Wegintegrale längs der Kurven C_2 und C_4 mit Hilfe der Standardabschätzung für Wegintegrale analog zum Abschnitt 14.6. Dabei müssen wir wieder berücksichtigen, dass die Grenzwertbildung der Funktion $f(z) \cdot \ln z$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gemäß (56) bei Annäherung an die reelle Achse von oben ein anderes Ergebnis liefert als bei Annäherung von unten:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} f(x + i\varepsilon) \cdot \ln(x + i\varepsilon) = f(x) \cdot \ln x ,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} f(x - i\varepsilon) \cdot \ln(x - i\varepsilon) = f(x) \cdot (\ln x + 2\pi i) .$$

Weiterhin verwenden wir den Betrag nur vom Hauptzweig des natürlichen Logarithmus gemäß

$$\begin{aligned} |\ln z| &= |\ln(|z| \cdot e^{i\varphi})| = |\ln|z| + i\varphi| = \sqrt{(\ln|z|)^2 + \varphi^2} \\ &= \ln|z| + a \quad \text{mit} \quad 0 \leq a < 2\pi \quad \text{weil} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \Rightarrow a \leq \varphi . \end{aligned}$$

- Wegintegral längs C_2 für $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow$ Kreisumfang $2\pi R$:

$$\left| \int_{C_2} f(z) \ln z dz \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{M}{R^2} \cdot (\ln R + a) = 2\pi M \cdot \frac{\ln R + a}{R} ,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_2} f(z) \ln z dz \right| \leq 2\pi M \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln R + a}{R} = 0 .$$

Die Grenzwertbildung wird im Anhang gezeigt.

- Wegintegral längs C_4 für $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow$ Kreisumfang $2\pi \varrho$:

Entlang von C_4 gilt mit

$$0 \leq \max_{\substack{z \in C_4 \\ |z| = \varrho}} |f(z)| = b < \infty \quad \text{und} \quad \max_{\substack{z \in C_4 \\ |z| = \varrho}} (\ln|z| + \tilde{a}) = \ln \varrho + a , \quad 0 \leq a < 2\pi .$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_4} f(z) \ln z dz \right| &\leq 2\pi \varrho \cdot \max_{z \in C_4} |f(z)| \cdot \max_{|z| = \varrho} (\ln|z| + \tilde{a}) \\ &\leq 2\pi \varrho \cdot b \cdot (\ln \varrho + a) , \end{aligned}$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left| \int_{C_4} f(z) \ln z dz \right| \leq 2\pi b \cdot \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho (\ln \varrho + a) = 0 .$$

Die Grenzwertbildung wird im Anhang gezeigt.

Ausgehend vom Residuensatz mit

$$\oint_C f(z) \ln(z) \, dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \tilde{G}} \operatorname{Res}(f(z) \ln z, z_k)$$

und unter Beachtung von $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln R + a}{R} = 0$, $\lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho \cdot (\ln \varrho + a) = 0$
und weil die Wegintegrale längs C_2 bzw. C_4 für $R \rightarrow \infty$ bzw. $\varrho \rightarrow 0$ verschwinden,
resultiert daraus

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{z_k \in \tilde{G}} \operatorname{Res}(f(z) \ln z, z_k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varrho \rightarrow 0}} \left[\int_{C_1} f(z) \ln z \, dz + \int_{C_3} f(z) \ln z \, dz \right] \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varrho \rightarrow 0}} \left[\int_{\varrho}^R f(x) \ln x \, dx + \int_R^{\varrho} f(x) (\ln x + 2\pi i) \, dx \right] \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varrho \rightarrow 0}} \left[\int_{\varrho}^R f(x) \ln x \, dx - \int_{\varrho}^R f(x) \ln x \, dx - 2\pi i \int_{\varrho}^R f(x) \, dx \right], \\ -2\pi i \int_0^{\infty} f(x) \, dx &= 2\pi i \sum_{z_k \in \tilde{G}} \operatorname{Res}(f(z) \ln z, z_k) \Leftrightarrow \\ \int_0^{\infty} f(x) \, dx &= - \sum_{z_k \in \tilde{G}} \operatorname{Res}(f(z) \ln z, z_k). \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel

$$\bullet \quad f(z) = \frac{1}{z^3 + 1} \quad \Rightarrow \quad g(z) = f(z) \ln z = \frac{\ln z}{z^3 + 1} :$$

$f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}$ besitzt keinen Pol auf der positiven reellen Achse $[0, \infty[$ und $g(z)$ besitzt drei Pole in $\tilde{G}$, nämlich an den Nullstellen

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_1 = -1, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i(\frac{5\pi}{3} - 2\pi)} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

von $f(z)$, die wir im Abschnitt 15.6 bestimmen. Die zugehörigen Residuen in $\tilde{G}$ berechnen wir mit der 7. Regel und mit

$$\cos\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

wie folgt:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\ln z}{z^3 + 1}, z_k\right) = \left. \frac{\ln z}{(z^3 + 1)'} \right|_{z_k} = \frac{\ln z_k}{3(z_k)^2},$$

$$\operatorname{Res}(g, z_0) = \frac{\ln e^{\frac{i\pi}{3}}}{3(e^{\frac{i\pi}{3}})^2} = \frac{\pi i}{9} e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi i}{9} \cdot \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{Res}(g, z_1) = \frac{\ln(-1)}{3} = \frac{\pi i}{3},$$

$$\operatorname{Res}(g, z_2) = \frac{\ln e^{\frac{5i\pi}{3}}}{3(e^{-i\frac{\pi}{3}})^2} = \frac{\pi i}{9} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{5\pi i}{9} \cdot \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Die Summe der Residuen ist

$$\sum_{z_k \in \tilde{G}} \operatorname{Res}(g, z_k) = \frac{\pi i}{9} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 - \frac{5}{2} + 5i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{9} 2\sqrt{3}$$

und somit

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi.$$

14.8 Partialbruchzerlegung im Komplexen und Residuen

Die Zerlegung von komplexen Polynomfunktionen der Form

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}{z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}{(z - z_n) \cdot (z - z_{n-1}) \cdot \dots \cdot (z - z_1)},$$

$$f(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^i}{\sum_{j=0}^n b_j z^j} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^i}{\prod_{k=1}^n (z - z_k)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_k\}$$

und mit $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}$ und $\deg p(z) < \deg q(z)$ bzw. $m < n$

in Partialbrüche erfolgt auf der Grundlage des Fundamentalsatzes der Algebra und völlig analog zur Partialbruchzerlegung im Reellen. An den n Nullstellen z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) des Nenners besitzt $f(z)$ Pole.

Unter Berücksichtigung von Vielfachheiten von Nullstellen ergibt sich folgender Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} &= \frac{A_1}{z - z_a} + \frac{A_2}{(z - z_a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(z - z_a)^\alpha} \\ &+ \frac{B_1}{z - z_b} + \frac{B_2}{(z - z_b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(z - z_b)^\beta} + \dots \\ &\dots + \frac{K}{z - z_k}, \end{aligned}$$

wobei hier z_k eine einfache Nullstelle ist und die Nullstelle z_a die Vielfachheit α und die Nullstelle z_b die Vielfachheit β besitzt. K sowie die A_j und B_j sind (konstante) Koeffizienten. Warum wir zur Berücksichtigung der Nullstellen-Vielfachheiten gerade diesen Ansatz benutzen, werden wir im folgenden einfachen Beispiel erläutern.

Vor jeder Partialbruchzerlegung müssen die Nullstellen des Nennerpolynoms $q(z)$ bekannt sein. Es gibt im Prinzip drei Verfahren zur Partialbruchzerlegung: die **Einsetzmethode**, den **Koeffizientenvergleich** und die **Grenzwertmethode** bzw. Abdeckmethode.¹⁸

14.8.1 Beispiel – Partialbruchzerlegung bei Vielfachheiten von Nullstellen

Das Nennerpolynom $q(z)$ der komplexen Polynomfunktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z + 2}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2}$$

¹⁸Im Internet findet man erklärende Videos zu den Methoden der Partialbruchzerlegung, z. B. das Video „Partialbruchzerlegung im Komplexen (Folge 44)“ unter www.ingmathe.de.

besitzt die Nullstellen

$$z_1 = z_2 = 1 \text{ (Nullstelle mit Vielfachheit 2) , } z_3 = 2 \text{ (einfache Nullstelle) .}$$

Die Kenntnis dieser Nullstellen ermöglicht uns, $q(z)$ zu faktorisieren, sodass

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z+2}{(z-1)(z-1)(z-2)} .$$

Die Partialbruchzerlegung erfolgt jetzt in vier Schritten:

1. **Ansatz**

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z-1)(z-2)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} .$$

2. Wir bringen die Summanden der rechten Seite der Ansatzgleichung auf einen Nenner, den **Hauptnenner** $q(z)$:

$$\frac{z+2}{(z-1)(z-1)(z-2)} = \frac{A_1(z-1)(z-2) + A_2(z-2) + B(z-1)^2}{(z-1)^2 \cdot (z-2)}$$

Jetzt können wir erkennen, dass der verwendete Ansatz sinnvoll ist, denn er liefert als Hauptnenner die Funktion $q(z)$. Der Ansatz $\frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{B}{z-2}$ hätte als Hauptnenner $(z-1)(z-2) \neq q(z)$ erbracht, wodurch der nächste Schritt nicht durchführbar wäre.

3. Durch **Multiplikation mit $q(z)$** bilden wir die bezüglich der Koeffizienten A_1 , A_2 , B **zu lösende Gleichung**:

$$z+2 = A_1(z-1)(z-2) + A_2(z-2) + B(z-1)^2 \quad \forall z . \quad (61)$$

4. **Bestimmung der Koeffizienten**

Die Gleichung (61) gilt für beliebige bzw. *alle* z . Wenn wir also eine einfache Nullstelle für z in (61) einsetzen, erhalten wir sofort den zugehörigen Koeffizienten, weil die Terme mit den übrigen Koeffizienten verschwinden. Diese bei **einfachen Nullstellen** effektive Vorgehensweise ist die **Einsetzmethode**:

$$z_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2+2 = A_1 \underbrace{(2-1)(2-2)}_{=0} + A_2 \underbrace{(2-2)}_{=0} + B \underbrace{(2-1)^2}_{=1}$$

$$B = 4 .$$

Es verbleibt eine Gleichung mit nur noch zwei Unbekannten, den Koeffizienten A_1 und A_2 :

$$z+2 = A_1(z-1)(z-2) + A_2(z-2) + 4(z-1)^2 \quad \forall z .$$

Ausmultiplizieren und Sortieren nach Potenzen von z liefert uns die Gleichung zur Lösung bezüglich der Koeffizienten A_1 und A_2 :

$$\begin{aligned} z + 2 &= A_1(z^2 - 3z + 2) + A_2(z - 2) + 4(z^2 - 2z + 1), \\ 0 \cdot z^2 + z^1 + 2z^0 &= (A_1 + 4)z^2 + (A_2 - 3A_1 - 8)z^1 + (2A_1 - 2A_2 + 4)z^0. \end{aligned}$$

Durch **Koeffizientenvergleich** bilden wir ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\begin{aligned} z^2 &\Rightarrow \text{I)} \quad 0 = A_1 + 4 && \Leftrightarrow A_1 = -4, \\ z^1 &\Rightarrow \text{II)} \quad 1 = A_2 - 3A_1 - 8 = A_2 + 4 && \Leftrightarrow A_2 = -3. \end{aligned}$$

Zur Überprüfung bilden auch noch die dritte Gleichung bezüglich z^0 :

$$z^0 \Rightarrow \text{III)} \quad 2 = 2A_1 - 2A_2 + 4 = -8 + 6 + 4 = 2. \quad \square$$

Die Koeffizienten sind

$$A_1 = -4, \quad A_2 = -3, \quad B = 4.$$

Damit ist die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{z + 2}{z^3 - 4z^2 + 5z - 2} = \frac{-4}{z - 1} + \frac{-3}{(z - 1)^2} + \frac{4}{z - 2}.$$

Die Funktion $f(z)$, d. h., die Summe der Partialbrüche lässt sich jetzt mühelos integrieren.

14.8.2 Beispiel – Partialbruchzerlegung bei komplex konjugierten Nullstellen

Der Nenner der komplexen Polynomfunktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z + 1}{z^3 + z} = \frac{z + 1}{(z - 0)(z - i)(z + i)}$$

besitzt die einfachen Nullstellen $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, also die komplex konjugierten Nullstellen $z_2 = \overline{z_3} = i$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist damit

$$f(z) = \frac{z + 1}{(z - 0)(z - i)(z + i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - i} + \frac{C}{z + i}.$$

Die Multiplikation mit dem Nenner liefert

$$z + 1 = A(z - i)(z + i) + Bz(z + i) + Cz(z - i) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Weil der Nenner nur einfache Nullstellen besitzt, bestimmen wir hier die Koeffizienten am einfachsten mit der Einsetzmethode:

$$\begin{aligned} z_1 = 0 & \Rightarrow 0 + 1 = A(0 - i)(0 + i) = A(-i^2) & \Leftrightarrow & A = 1, \\ z_2 = i & \Rightarrow i + 1 = B i(i + i) = B(-2) & \Leftrightarrow & B = \frac{-1-i}{2}, \\ z_3 = -i & \Rightarrow -i + 1 = C(-i)(-i - i) = C(-2) & \Leftrightarrow & C = \frac{-1+i}{2}, \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 1, \quad B = \frac{-1-i}{2}, \quad C = \frac{-1+i}{2}, \quad B = \overline{C}}.$$

Wie man sieht, sind auch die zu den komplex konjugierten Nullstellen des Nenners gehörenden Koeffizienten komplex konjugiert. Die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(z)$ ist damit

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3+z} = \frac{1}{z} + \frac{\frac{-1-i}{2}}{z-i} + \frac{\frac{-1+i}{2}}{z+i}.$$

Man kann die paarweise komplex konjugierten Terme immer zusammenfassen bzw. addieren und erhält dadurch ebenfalls leicht integrierbare Terme:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{-1-i}{2}}{z-i} + \frac{\frac{-1+i}{2}}{z+i} &= \frac{\frac{1}{2}(-1-i)(z+i) + \frac{1}{2}(-1+i)(z-i)}{(z-i)(z+i)} \\ &= \frac{-z+1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2+1} - \frac{z}{z^2+1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2+1} - \frac{z}{z^2+1}}.$$

14.8.3 Zusammenhang zwischen Partialbruchzerlegung und Residuen

Falls das Nennerpolynom $q(z)$ der komplexen Polynomfunktion $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ nur einfache Nullstellen besitzt, lässt sich der Zusammenhang zwischen Partialbruchzerlegung und Residuen leicht zeigen, beispielsweise anhand der komplexen Funktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{c_1}{z-z_1} + \frac{c_2}{z-z_2}.$$

$f(z)$ besitzt an den Nennernullstellen z_1 und z_2 Pole erster Ordnung.

Die **Grenzwertmethode** zur Bestimmung der Koeffizienten c_1 und c_2 entspricht im

Fall einfacher Nennernullstellen der **2. Regel** zur Bestimmung der Residuen von $f(z)$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \cdot f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \left[\frac{c_1}{z - z_1} + \frac{c_2}{z - z_2} \right] \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - z_1) \cdot c_1}{(z - z_1)} + \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - z_1) \cdot c_2}{(z - z_2)} \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_1} c_1 + \underbrace{\frac{0 \cdot c_2}{(z_1 - z_2)}}_{=0} \Rightarrow \\
 \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \cdot f(z) &= c_1 = \text{Res}(f, z_1) .
 \end{aligned}$$

Allgemein gilt folglich für die Koeffizienten c_k

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \cdot f(z) = c_k = \text{Res}(f, z_k) \quad \text{für einfache Nullstellen } z_k$$

 .

Etwas mehr Mühe bereitet es, den Zusammenhang zwischen der Partialbruchzerlegung und den Residuen im Fall von Nennernullstellen mit Vielfachheiten > 1 zu zeigen. Wählen wir beispielsweise die Funktion

$$f(z) = \frac{3z^2 - 2z + 4}{z^4 - 5z^3 + 6z^2 + 4z - 8} = \frac{3z^2 - 2z + 4}{(z - 2)^3 \cdot (z + 1)}$$

mit den Polen von $f(z)$ an der dreifachen Nennernullstelle $z_k = z_1 = 2$ und der einfachen Nennernullstelle $z_k = z_2 = -1$. Damit ist der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{3z^2 - 2z + 4}{(z - 2)^3 \cdot (z + 1)} = \frac{c_{11}}{z - 2} + \frac{c_{12}}{(z - 2)^2} + \frac{c_{13}}{(z - 2)^3} + \frac{c_2}{z + 1}$$

mit den Koeffizienten c_{kj} ($k = 1, j = 1, 2, 3$) sowie $c_k = c_2$. Die Bestimmung der Koeffizienten c_{kj} an der Nennernullstelle $z_k = z_1 = 2$ mit der Vielfachheit $m = 3$ erfolgt nach der **Grenzwertmethode** gemäß

$$c_{kj} = \frac{1}{(m - j)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \left[\frac{d^{m-j}}{dz^{m-j}} (z - z_k)^m \cdot f(z) \right] , \quad j = 1, 2, \dots, m$$

 .

Damit können wir jetzt alle Koeffizienten unseres Beispiels berechnen:

$$\begin{aligned} c_{13} &= \frac{1}{(3-3)!} \lim_{z \rightarrow z_1=2} \left[\frac{d^{3-3}}{dz^{3-3}} (z-2)^3 \cdot \frac{3z^2 - 2z + 4}{(z-2)^3 \cdot (z+1)} \right] \quad (0. \text{ Ableitung}) \\ &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{3z^2 - 2z + 4}{z+1} = 1 \cdot \frac{3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4}{2+1} = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= \frac{1}{(3-2)!} \lim_{z \rightarrow z_1=2} \left[\frac{d^{3-2}}{dz^{3-2}} (z-2)^3 \cdot \frac{3z^2 - 2z + 4}{(z-2)^3 \cdot (z+1)} \right] \quad (1. \text{ Ableitung}) \\ &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \frac{3z^2 - 2z + 4}{z+1} = 1 \cdot \frac{3z^2 + 6z - 6}{(z+1)^2} \Big|_{z=2} = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow z_1=2} \left[\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}} (z-2)^3 \cdot \frac{3z^2 - 2z + 4}{(z-2)^3 \cdot (z+1)} \right] \quad (2. \text{ Ableitung}) \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{3z^2 - 2z + 4}{z+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{(z+1)^3} \Big|_{z=2} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z \rightarrow z_2=-1} \left[\frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} (z+1)^1 \cdot \frac{3z^2 - 2z + 4}{(z-2)^3 \cdot (z+1)} \right] \quad (0. \text{ Ableitung}) \\ &= \frac{1}{0!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{3z^2 - 2z + 4}{(z-2)^3} = 1 \cdot \frac{3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 4}{((-1)-2)^3} = -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

bzw.

$$c_2 = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot \frac{3z^2 - 2z + 4}{(z-2)^3 \cdot (z+1)} \quad (2. \text{ Regel}).$$

Mit den Koeffizienten

$$c_{11} = \frac{1}{3}, \quad c_{12} = 2, \quad c_{13} = 4, \quad c_2 = -\frac{1}{3}$$

ergibt die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{3z^2 - 2z + 4}{z^4 - 5z^3 + 6z^2 + 4z - 8} = \frac{\frac{1}{3}}{z-2} + \frac{2}{(z-2)^2} + \frac{4}{(z-2)^3} + \frac{-\frac{1}{3}}{z+1}.$$

Die Residuen von $f(z) = \frac{3z^2 - 2z + 4}{(z-2)^3 \cdot (z+1)}$ an den Polstellen $z_1 = 2$ und $z_2 = -1$ sind

$$\left. \begin{array}{l} \text{gemäß der 3. Regel :} \quad \text{Res}(f, z_1) = \frac{1}{3} = c_{11} \\ \text{gemäß der 2. Regel :} \quad \text{Res}(f, z_2) = -\frac{1}{3} = c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_k \text{Res}(f, z_k) = 0.$$

In Übereinstimmung mit der **3. Regel** zur Bestimmung von Residuen ist bei Nennernullstellen mit einer Vielfachheit $m > 1$ immer nur der Koeffizient mit $j = 1$,

d. h. der Koeffizient, der aus der Partialbruchberechnung mit der höchsten Ableitung d^{m-1}/dz^{m-1} hervorgeht, gleich dem zugehörigen Residuum. Das ist deshalb so, weil sich die Residuen und der Residuensatz auf Pole innerhalb geschlossener Jordankurven bzw. auf Umlaufintegrale beziehen. Gemäß (12) liefern nämlich Integranden bzw. Partialbrüche der Form $c/(z - z_k)^n$ für $n \neq 1$ bei Umlaufintegralen keinen Betrag.

Betrachten wir also das Umlaufintegral über unsere Funktion $f(z)$ längs einer geschlossenen Jordankurve C , die alle Pole von $f(z)$ umläuft, z. B. eine Kreislinie $C := |z| = \text{const} > 2$ (um den Koordinatenursprung):

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) dz &= \oint_C \left[\frac{\frac{1}{3}}{z-2} + \underbrace{\frac{2}{(z-2)^2} + \frac{4}{(z-2)^3}}_{\text{liefern keinen Beitrag}} + \frac{-\frac{1}{3}}{z+1} \right] dz \\ &= \frac{1}{3} \cdot \oint_C \frac{1}{z-2} dz - \frac{1}{3} \cdot \oint_C \frac{1}{z+1} dz \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\pi i - \frac{1}{3} \cdot 2\pi i = 2\pi i \cdot \sum_k \text{Res}(f, z_k) = 0 .\end{aligned}$$

Die Summe der Residuen von $f(z)$ und damit auch das Umlaufintegral längs C sind in unserem Beispiel *ausnahmsweise* gleich Null. Im Allgemeinen heben sich die Residuen in der Summe aber nicht auf, sodass das Umlaufintegral dann nicht verschwindet.

15 Anhang

15.1 Ergänzung zu Abschnitt 14.1 – Zum Satz über das Wachstum rationaler Funktionen

$$f = f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (62)$$

sei ein komplexes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit Leitkoeffizient 1. Wir zeigen, dass es für (62) ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass

$$\frac{1}{2}|z|^n \leq |f(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{|f(z)|}{|z|^n} \leq \frac{3}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |z| \geq R. \quad (63)$$

Ausgehend von der Dreiecksungleichung und mit

$$a, b, z \in \mathbb{C}, \quad m, n \in \mathbb{N}_{>0}$$

gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= a z^m + b z^n \Rightarrow \\ |\tilde{f}(z)| &= |a z^m + b z^n| \leq |a| \cdot |z|^m + |b| \cdot |z|^n = \tilde{\mathfrak{F}}(|z|). \end{aligned}$$

Dies verallgemeinernd gilt folglich auch

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0, \quad (64)$$

$$f(z) = z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right) \Rightarrow$$

$$|f(z)| \leq |z|^n + |a_{n-1}| |z|^{n-1} + |a_{n-2}| |z|^{n-2} + \dots + |a_1| |z| + |a_0|, \quad (65)$$

$$|f(z)| \leq |z|^n \left(1 + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \frac{|a_{n-2}|}{|z|^2} + \dots + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) = \mathfrak{F}(|z|). \quad (66)$$

Untersuchen wir zunächst die Ungleichung

$$|f(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^n.$$

Mit

$$\alpha = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|) > 0$$

ergibt (66) die Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \mathfrak{F}(|z|) \leq |z|^n \left(1 + \frac{\alpha}{|z|} + \frac{\alpha}{|z|^2} + \dots + \frac{\alpha}{|z|^{n-1}} + \frac{\alpha}{|z|^n} \right), \\ |f(z)| &\leq \mathfrak{F}(|z|) \leq |z|^n \left[1 + \frac{\alpha}{|z|} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|^2} + \dots + \frac{1}{|z|^{n-1}} \right)}_{\text{geometrische Reihe}} \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Einsetzen der geometrischen Reihe

$$1 + \frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|^2} + \dots + \frac{1}{|z|^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{|z|^n}}{1 - \frac{1}{|z|}} = \frac{|z|^n - 1}{|z|^n} \cdot \frac{|z|}{|z| - 1}$$

in (67) liefert

$$|f(z)| \leq \mathfrak{F}(|z|) \leq |z|^n \left[1 + \frac{\alpha}{|z|} \cdot \frac{|z|^n - 1}{|z|^n} \cdot \frac{|z|}{|z| - 1} \right],$$

$$|f(z)| \leq |z|^n \left[1 + \alpha \cdot \frac{|z|^n - 1}{|z|^n \cdot (|z| - 1)} \right].$$

Nach (63) soll aber auch

$$\frac{|f(z)|}{|z|^n} \leq \frac{3}{2}$$

gelten, sodass unter Berücksichtigung von

$$n \in \mathbb{N}_{>0} \quad \text{und} \quad \alpha > 0$$

zu zeigen ist, dass stets ein $R_\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert mit

$$1 + \alpha \cdot \frac{|z|^n - 1}{|z|^n \cdot (|z| - 1)} \leq \frac{3}{2} \quad \forall |z| \geq R_\alpha :$$

$$\frac{|z|^n - 1}{|z|^n \cdot (|z| - 1)} \leq \frac{3}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha},$$

$$|z|^n - 1 \leq \frac{|z|^n \cdot (|z| - 1)}{2\alpha},$$

$$1 - \frac{1}{|z|^n} \leq \frac{|z| - 1}{2\alpha},$$

$$(2\alpha + 1) - 2\alpha \frac{1}{|z|^n} \leq |z|.$$

Wie man sofort sieht, ist ab einem bestimmten $|z|$ aufwärts die rechte Seite dieser Ungleichung stets größer ist als die linke, sodass also ein R_α existiert. Dies zeigen wir in der Abbildung 11 an dem einfachen Beispiel $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 + 5z - 4$ für die z auf der reellen Achse, also für $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 4$.

Jetzt untersuchen wir die Ungleichung

$$\frac{1}{2} |z|^n \leq |f(z)|.$$

Leider können wir nicht analog zur Ungleichung $|f(z)| \leq \frac{3}{2} |z|^n$ vorgehen, indem wir statt mit dem Maximum α der Koeffizientenbeträge mit deren Minimum β die geometrische Reihe bilden, wodurch wir am Ende die vereinfachte Ungleichung $(1 - 2\beta) + 2\beta \frac{1}{|z|^n} \leq |z|$ erhalten würden. Der Term

$$|z|^n + \beta |z|^{n-1} + \beta |z|^{n-2} + \dots + \beta |z| + \beta = |z|^n \left(1 + \frac{\beta}{|z|} + \frac{\beta}{|z|^2} + \dots + \frac{\beta}{|z|^{n-1}} + \frac{\beta}{|z|^n} \right) = B(|z|)$$

ist nämlich *allgemein nicht kleiner* als $|f(z)|$, nur weil wir das Minimum β der Koeffizientenbeträge verwenden. Dies können wir uns wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ schnell an dem einfachen Beispiel

$$f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 + 5z - 4 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1$$

(mit reellen Koeffizienten) veranschaulichen. Betrachten wir $f(z)$ für $z = 1 = |z|$, so erhalten wir

$$\left. \begin{array}{rcl} |f(z)| & = & |1 - 2 + 1 + 5 - 4| = 1 \\ B(|z|) & = & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow B(|z|) > |f(z)|. \quad \square$$

Wenn wir jedoch $|z|$ hinreichend groß wählen, so sind z^n in (64) und $|z|^n$ in (65) die führenden Terme und es existiert ab einem bestimmten $|z|$ aufwärts ein $R_\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass

$$\frac{1}{2}|z|^n \leq |f(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |z| \geq R_\beta.$$

Auch dies zeigen wir in der Abbildung 11 an unserem Beispiel $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 + 5z - 4$ für die z auf der reellen Achse, also für $x \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 4$.

Nach (66) geht der Term in Klammern für große $|z|$ gegen 1 und folglich $|f(z)|$ wegen

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (|f(z)| - |z|^n) = 0$$

gegen $|z|^n$. Wählen wir also R hinreichend groß, so existieren gleichzeitig sowohl $R_\alpha = R$ als auch $R_\beta = R$ und der Satz (63) ist erfüllt.

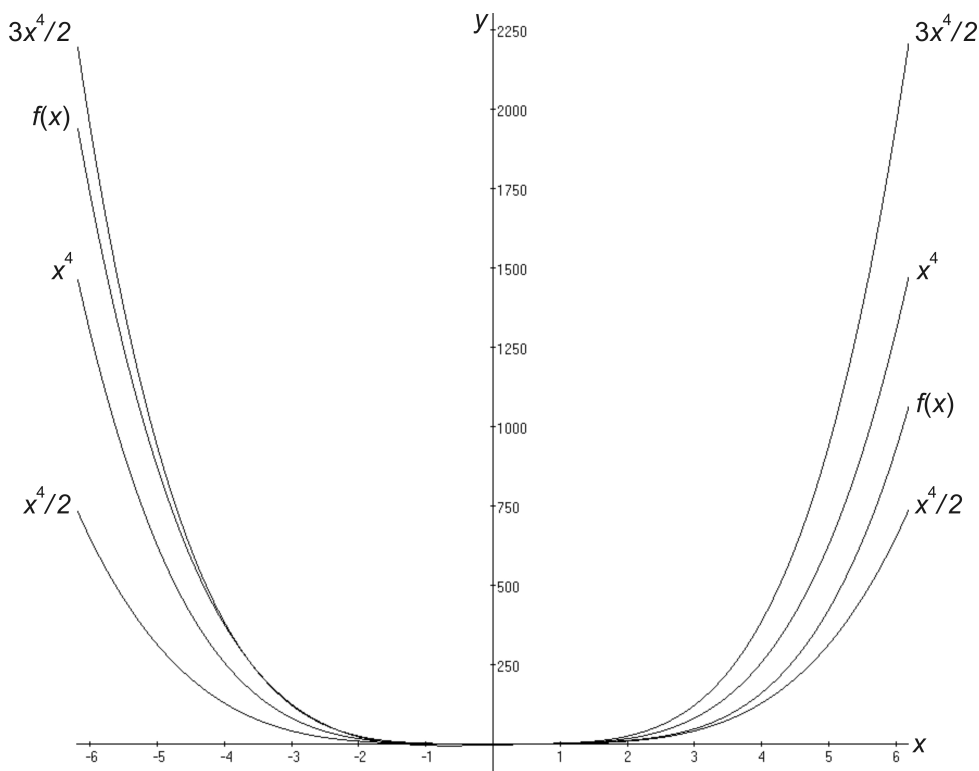


Abb. 11 Vereinfachend und o. B. d. A. betrachten wir in dieser Darstellung den Verlauf von $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 + 5z - 4$ nur über der reellen Achse, also für den Fall $\text{Im}(z) = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 4$. Über den für unsere Überlegungen relevanten Abschnitten des Definitionsbereichs ist $f(x) > 0$ und dort folglich $f(x) = |f(x)|$. Weiterhin ist stets $x^4 > 0 \Rightarrow x^4 = |x|^4$, sodass auf eine gesonderte Darstellung der Beträge von f , x^4 , $\frac{1}{2}x^4$ und $\frac{3}{2}x^4$ über x verzichtet werden konnte.

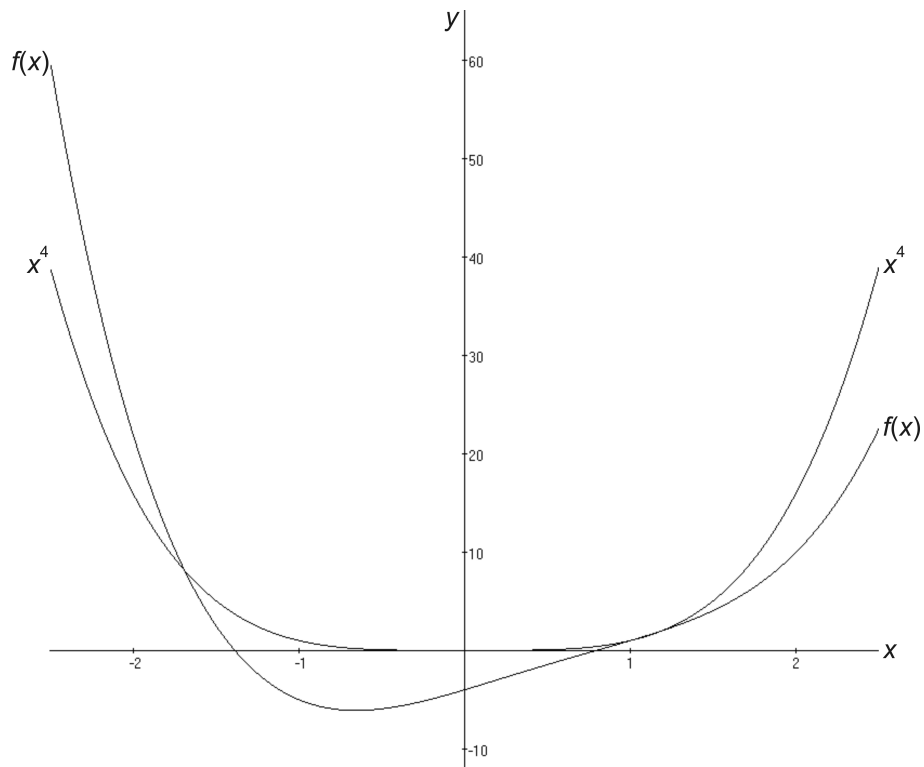


Abb. 12 Der Vollständigkeit halber zeigen wir auch noch den Verlauf der Graphen von $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 4$ und von x^4 in einer Skalierung speziell für den Bereich um $x = 0$.

15.2 Ergänzung zu Abschnitt 14.4 – Integralabschätzungen am Rechteckmodell

Als Alternative zur Abschätzung des Kreisbogen-Wegintegrals $\int_B f(z) e^{iaz} dz$ im Abschnitt 14.4 zeigen wir jetzt die entsprechenden Abschätzungen am Modell des in Abbildung 13 dargestellten **Quadrats** in der oberen Halbebene. Die Basis dieses Quadrats soll auf der reellen Achse liegen und von $x = -r_1$ nach $x = r_2$ verlaufen. Die Eckpunkte dieses Quadrats mit der Seitenlänge $s = r_1 + r_2$ sind somit r_2 , $r_2 + is$, $-r_1 + is$, $-r_1$. Dass wir ein Quadrat statt eines (allgemeinen) Rechtecks als Modell verwenden, vereinfacht die Rechnung, bedeutet aber trotzdem keine Einschränkung, weil im Grenzfall für unendlich lange Seiten Quadrate und Rechtecke ineinander übergehen.

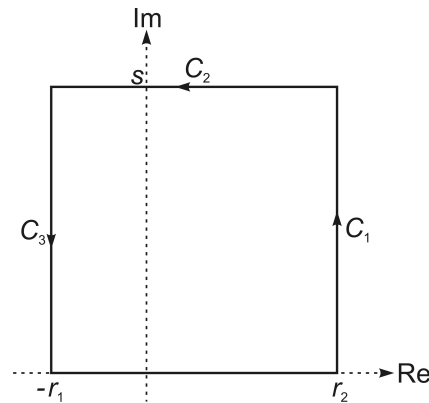


Abb. 13

Weiterhin sollen folgende Bedingungen gelten:

- Die Umlaufkurve C bestehe aus den Seiten des Quadrats, also

$$C = \overline{-r_1, r_2} + C_1 + C_2 + C_3 .$$

C soll bei der Integration in positiver Richtung umlaufen werden.

- s sei hinreichend groß, sodass alle oberhalb der reellen Achse vorhandenen Singularitäten von $g(z)$ innerhalb des von C eingeschlossenen Gebietes liegen.
- Auf C selbst sollen sich keine Singularitäten befinden. Insbesondere besitze $q(z)$ keine reellen Nullstellen, sodass der Integrand $f(z) e^{iaz}$ auf der gesamten reellen Achse definiert ist.
- Der Grad l des Nennerpolynoms $q(z)$ sei um mindestens eins höher als der Grad k des Zählerpolynoms $p(z)$, d. h.

$$\deg p(z) - \deg q(z) = k - l \leq -1 ,$$

und es soll gelten

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0 . \quad (68)$$

Warum diese Einschränkung schwächer ist als im Abschnitt 14.2, wird im Folgenden deutlich werden.

- Für $a \in \mathbb{R}$ gelte im Fall des Umlaufintegrals in der oberen Halbebene $a > 0$.

Nach dem Residuensatz liefert das Umlaufintegral über die Funktion $g(z)$ längs der Seitenstrecken des Quadrats

$$\int_{-r_1}^{r_2} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}(g, z) - \sum_{k=1}^3 \int_{C_k} f(z) e^{iaz} dz .$$

Schätzen wir jetzt wieder das Verhalten der Kurvenintegrale längs der einzelnen Seiten des Quadrats im Unendlichen ab. Dabei parametrisieren wir C_1 , C_2 und C_3 mit der Variablen t .

- $C_1 \subset \mathbb{C}$, $C_1(t) = r_2 + it$, $0 \leq t \leq s$

Die Dreiecksungleichung für Integrale

$$\left| \int_{C_1} f(z) e^{iaz} dz \right| = \left| \int_0^s f(s+it) e^{ia(s+it)} \cdot i dt \right| \leq \int_0^s |f(s+it) e^{ia(s+it)} \cdot i| dt$$

ergibt mit $|e^{ia(s+it)} \cdot i| = \underbrace{|e^{ias}|}_{=1} \cdot |e^{-at} \cdot i| = e^{-at}$

$$\left| \int_{C_1} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \int_0^s |f(s+it)| e^{-at} dt.$$

Wir schätzen weiter ab:

$$\int_0^s |f(s+it)| e^{-at} dt \leq \sup_{z \in C_1} |f(z)| \int_0^s e^{-at} dt = \sup_{z \in C_1} |f(z)| \cdot \frac{1}{a} (1 - e^{-as}).$$

Und mit $0 < e^{-as} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (1 - e^{-as}) < 1$ erhalten wir schließlich

$$\left| \int_{C_1} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{1}{a} \cdot \sup_{z \in C_1} |f(z)|.$$

- $C_2 \subset \mathbb{C}$, $C_2(t) = r_2 - r_1 - t + is$, $-r_1 \leq t \leq r_2$

In $C_2(z(t))$ ist t der Parameter des Realteils, während der Imaginärteil $\text{Im } z = s$ „festgehalten“ wird. Deshalb bietet sich hier die Standardabschätzung für Wegintegrale an mit der Kurvenlänge (von C_2) $r_1 + r_2 = s$:

$$\left| \int_{C_2} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq s \cdot \sup_{z \in C_2} |f(z) e^{iaz}| = \sup_{z \in C_2} |f(z)| \cdot s \cdot \sup_{z \in C_2} |e^{iaz}|.$$

Weiterhin gilt mit

$$|e^{iaz}| = \underbrace{|e^{iax}|}_{=1} \cdot |e^{-ay}| = e^{-a \cdot y} = e^{-a \cdot \text{Im } z} = e^{\text{Re}(iaz)}$$

für die Abschätzung des Wegintegrals längs C_2 mit festem s

$$\sup_{z \in C_2} |e^{iaz}| = \sup_{z \in C_2} e^{-a \cdot \text{Im } z} = \sup_{z \in C_2} e^{-a \cdot s} = e^{-a \cdot s} \Rightarrow$$

$$\left| \int_{C_2} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \sup_{z \in C_2} |f(z)| \cdot s \cdot e^{-a \cdot s}.$$

Für hinreichend große s wächst e^{as} viel schneller als s bzw. nimmt e^{-as} viel schneller ab als s zunimmt. Weiterhin hat der Term $s \cdot e^{-a \cdot s}$ sein Maximum bei $s = \frac{1}{a}$, wie man schnell aus $\frac{d}{ds} (s \cdot e^{-a \cdot s}) = 0$ ermitteln kann, sodass unsere Abschätzung mit $\frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{1}{a}} = \frac{1}{a \cdot e}$ schließlich die folgende Gestalt annimmt:

$$\left| \int_{C_2} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{1}{a \cdot e} \cdot \sup_{z \in C_2} |f(z)|.$$

- $C_3 \subset \mathbb{C}$, $C_3(t) = -r_1 + i(s-t)$, $0 \leq t \leq s$

Analog zur Abschätzung des Wegintegrals längs C_1 verwenden wir für das Wegintegral längs C_3 wieder die Dreiecksungleichung für Integrale:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_3} f(z) e^{iaz} dz \right| &= \left| \int_0^s f(-r_1 + i(s-t)) \cdot e^{ia[-r_1 + i(s-t)]} \cdot i dt \right| \\ &\leq \int_0^s \left| f(-r_1 + i(s-t)) \cdot e^{ia[-r_1 + i(s-t)]} \cdot i \right| dt . \end{aligned}$$

Mit der Vereinfachung

$$|e^{ia[-r_1 + i(s-t)]} \cdot i| = |e^{-iar_1}| \cdot |e^{-as}| \cdot |e^{at}| = e^{-as} \cdot e^{at}$$

resultiert daraus

$$\left| \int_{C_3} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \int_0^s \left| f(-r_1 + i(s-t)) \right| \cdot e^{-as} \cdot e^{at} dt .$$

Mit

$$\int_0^s e^{-as} \cdot e^{at} dt = e^{-as} \cdot \frac{1}{a} (e^{as} - 1) = \frac{1}{a} (1 - e^{-as})$$

erhalten wir die gleiche Abschätzung wie für das Wegintegral längs C_1 :

$$\begin{aligned} \int_0^s \left| f(-r_1 + i(s-t)) \right| \cdot e^{-as} \cdot e^{at} dt &\leq \sup_{z \in C_3} |f(z)| \int_0^s e^{-as} \cdot e^{at} dt = \\ &\sup_{z \in C_3} |f(z)| \cdot \frac{1}{a} (1 - e^{-as}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left| \int_{C_3} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{1}{a} \cdot \sup_{z \in C_3} |f(z)| .$$

Infolge der Bedingung (68) verschwindet das Supremum von $|f(z)|$ längs der Kurven C_1 , C_2 und C_3 im Unendlichen gemäß

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{r_1, r_2, s \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_k} |f(z)| = 0, \quad k = 1, 2, 3 .$$

Wir stellen fest, dass folglich auch die Beträge der Wegintegrale längs der Kurven C_1 , C_2 und C_3 und somit die Wegintegrale selbst im Unendlichen verschwinden:

$$\begin{aligned} \lim_{r_1, r_2, s \rightarrow \infty} \int_{C_k} f(z) e^{iaz} dz &= \lim_{r_1, r_2, s \rightarrow \infty} \left| \int_{C_k} f(z) e^{iaz} dz \right| = \lim_{r_1, r_2, s \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_k} b_k |f(z)| = 0 \\ \text{mit } k &= 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad b_k \in \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{a \cdot e} \right\} . \end{aligned}$$

15.3 Ergänzung zum 2. Beispiel des Abschnitts 14.4 – Fourier-Rücktransformation

Fourier-Rücktransformation der Funktion $\tilde{f}(k) = \frac{\pi}{b} e^{-|k|b} = \frac{\pi}{b} e^{kb}$, $k \leq 0$, $b > 0$:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(k)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \cdot e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{b} e^{-|k|b} \cdot e^{ikx} dk \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{2b} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{-|k|b} \cdot e^{ikx} dk}_{I_-} + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-|k|b} \cdot e^{ikx} dk}_{I_+} \right].$$

Integral I_- :

I_- ist das Teilintegral längs der negativen k -Achse und läuft von $-\infty$ nach 0. Wegen der Symmetrie der Funktion $\tilde{f}(k)$ können wir das Integral I_- so umschreiben, dass die Integration auf der positiven Achse von $+\infty$ nach 0, also in entgegengesetzter Richtung läuft. Dafür müssen wir die Vorzeichen anpassen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 dk &\longrightarrow \int_{+\infty}^0 -dk = \int_0^{\infty} dk, \\ e^{ikx} &\longrightarrow e^{-ikx} \quad (\text{Umkehrung der Integrationsrichtung}), \\ e^{-|k|b} &\longrightarrow e^{-kb}, \quad \text{weil } k \leq 0 \text{ für } \tilde{f}(k). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_- : \int_{-\infty}^0 e^{-|k|b} \cdot e^{ikx} dk &= \int_0^{\infty} e^{-kb} \cdot e^{-ikx} dk = \int_0^{\infty} e^{-k(b+ix)} dk = \left. \frac{e^{-k(b+ix)}}{-(b+ix)} \right|_{k=0}^{\infty} \\ &= \frac{-1}{-(b+ix)} = \frac{1}{b+ix}. \end{aligned}$$

Integral I_+ :

I_+ ist das Teilintegral längs der positiven k -Achse und läuft von 0 nach ∞ . Wir brauchen es nicht umzuschreiben, sondern müssen nur $e^{-|k|b} \longrightarrow e^{-kb}$ berücksichtigen, denn für die Funktion $\tilde{f}(k)$ gilt $k \leq 0$:

$$\begin{aligned} I_+ : \int_0^{\infty} e^{-|k|b} \cdot e^{ikx} dk &= \int_0^{\infty} e^{-kb} \cdot e^{ikx} dk = \int_0^{\infty} e^{-k(b-ix)} dk = \left. \frac{e^{-k(b-ix)}}{-(b-ix)} \right|_{k=0}^{\infty} \\ &= \frac{-1}{-(b-ix)} = \frac{1}{b-ix}. \end{aligned}$$

Mit den Teilintegralen I_- und I_+ erhalten wir schließlich die Fourier-Rücktransformierte

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(k)\} = f(x) = \frac{1}{2b} \left[\frac{1}{b+ix} + \frac{1}{b-ix} \right] = \frac{1}{2b} \cdot \frac{b-ix+b+ix}{(b+ix)(b-ix)} = \frac{1}{x^2+b^2}. \quad \square$$

Da im Integrationsbereich $-\infty < k \leq 0$ für die Funktion $\tilde{f}(k)$ von vornherein $e^{-|k|b} = e^{kb}$ gilt, hätten wir das Integral I_- wesentlich einfacher lösen können:

$$I_- : \int_{-\infty}^0 e^{-|k|b} \cdot e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^0 e^{kb} \cdot e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^0 e^{k(b+ix)} dk = \left. \frac{e^{k(b+ix)}}{b+ix} \right|_{-\infty}^{k=0} = \frac{1}{b+ix}.$$

15.4 Ergänzung zu Abschnitt 14.6 – Integral der Funktion $\ln(x)$

$$f(x) = \ln(x), \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ist ein Standardbeispiel für eine Funktion, deren Integral bei Null konvergiert, obwohl die Funktion selbst, d. h. der Integrand, dort divergiert:

Die Entwicklung von $\ln(x)$ um $x = x_0 = 1$ mit $\ln(1) = 0$ ist

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n, \quad \text{Konvergenzbereich } 0 < x \leq 2. \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-1)^n = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \dots = -\infty. \end{aligned}$$

Das unbestimmte Integral von $\ln(x)$ ist

$$\int \ln(x) \, dx = x \cdot \ln(x) - x + C.$$

Für $C = 0$ folgt daraus

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot \ln(x) - x] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \right] = \text{„} \frac{-\infty}{\infty} \text{“}$$

und mit der Regel von L'Hospital schließlich

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0. \quad \square$$

15.5 Ergänzung zu Abschnitt 14.7 – Grenzwertbildungen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + a}{x} = \text{„} \frac{\infty}{\infty} \text{“} \quad \Rightarrow$$

$$\text{L'Hospital : } \frac{(\ln x + a)'}{x'} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + a}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot (\ln x + a) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x + a}{\frac{1}{x}} = \text{„} \frac{-\infty}{\infty} \text{“} \quad \Rightarrow$$

$$\text{L'Hospital : } \frac{(\ln x + a)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot (\ln x + a) = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0.$$

15.6 Potenzfunktion – Lösungen der Gleichung $w^n = z$

Wir betrachten die komplexe Potenzfunktion

$$w^n = z \Leftrightarrow w^n - z = 0, \quad w, z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N},$$

d.h. die Umkehrfunktion der im Abschnitt 5.2 dargestellten komplexen Wurzelfunktion. Aus der 2π -Periodizität der Kosinus- und Sinusfunktion und damit auch der komplexen Exponentialfunktion gemäß

$$\begin{aligned} (w_k)^n &= z_k = |z_k| \cdot e^{i(\varphi+k \cdot 2\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \underbrace{|z| e^{i\varphi}}_{z_0} \cdot e^{ik \cdot 2\pi} \\ (w_k)^n &= z_0 \cdot e^{ik \cdot 2\pi} \Rightarrow (w_0)^n = z_0 = |z| e^{i\varphi} \end{aligned}$$

folgt mit (4)

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[n]{z_k} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{\varphi+k \cdot 2\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \\ &= \underbrace{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\varphi}{n}}}_{w_0} \cdot e^{i \frac{k \cdot 2\pi}{n}}, \end{aligned}$$

$$w_k = w_0 \cdot e^{i \frac{k \cdot 2\pi}{n}}, \quad w_0 = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i \frac{\varphi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (69)$$

Dabei haben wir stillschweigend berücksichtigt, dass $|z|$ unabhängig von k ist und folglich $|z_k| = |z|$ gilt. Weiterhin erlaubt uns die 2π -Periodizität, auch negative k -Werte zu verwenden, was wir zur Vereinfachung des Ergebnisses im folgenden Beispiel zeigen werden. Die Gleichung $w^n - z = 0$ besitzt nämlich immer n verschiedene Lösungen w_k mit fortlaufenden (benachbarten) k -Werten. Wenn wir also eine Lösung w_k gefunden haben, können wir wegen der 2π -Periodizität mit (69) mühelos die restlichen $n-1$ Lösungen bestimmen.

Beispiel

Die Nullstellen der Funktion $f(w) = w^3 + 1$, $w \in \mathbb{C}$, sind die drei verschiedenen Lösungen der Gleichung $w^3 + 1 = 0$ bzw. $w^3 = -1$. Wir finden sofort als Lösung $w_\alpha = -1$, denn $(-1)^3 = -1$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} w_\alpha &= -1 = e^{i\pi} = e^{i\frac{3}{3}\pi} \quad \text{für } k = 0, \\ w_\beta &= w_\alpha \cdot e^{i\frac{-1 \cdot 2\pi}{3}} = e^{i\frac{3}{3}\pi} \cdot e^{-\frac{2}{3}\pi} = e^{i\frac{1}{3}\pi} \quad \text{für } k = -1, \\ w_\gamma &= w_\alpha \cdot e^{i\frac{+1 \cdot 2\pi}{3}} = e^{i\frac{3}{3}\pi} \cdot e^{+\frac{2}{3}\pi} = e^{i\frac{5}{3}\pi} \quad \text{für } k = 1. \end{aligned}$$

Wir nehmen eine Umbenennung der Indizes α, β, γ vor und gehen von w_β als w_0 aus. Dann erhalten wir mit (69) die drei Lösungen bzw. Nullstellen

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{i\frac{1}{3}\pi}, & \text{für } k &= 0, \\ w_1 &= e^{i\frac{3}{3}\pi} = -1, & \text{für } k &= 1, \\ w_2 &= e^{i\frac{5}{3}\pi}, & \text{für } k &= 2. \end{aligned}$$