

Reinhard Weiß

Grundlegendes zur Elektrodynamik und
Quantenmechanik –
Herleitungen und Erläuterungen

07.10.2023

Inhaltsverzeichnis

I	Grundlegendes zur Elektrodynamik	5
1	Der Plattenkondensator	7
1.1	Arbeit, Spannung, Potential	7
1.2	Plattenkondensator als Modell	9
1.3	Felder im Plattenkondensator	11
1.3.1	Isolierter Plattenkondensator	11
1.3.2	Plattenkondensator mit konstanter Spannung	16
1.4	\vec{D} -Feld und der Unterschied zwischen \vec{E} -Feld und \vec{D} -Feld	18
1.5	Die Energie im Plattenkondensator	19
1.6	Die Kraft des Plattenkondensators auf ein Dielektrikum	23
1.7	Bilanzierung der Kondensatorenergie	24
1.7.1	Isolierter Kondensator mit $Q_{\text{frei}} = \text{const}$ (abgeschlossenes System)	24
1.7.2	Kondensator mit $U = \text{const}$ (offenes System)	25
1.8	Zusammenfassung und Anschluss an die Elektrodynamik	26
2	Drehmoment und magnetisches Moment einer stromdurchflossenen Leiterschleife	28
3	Zusammenhang zwischen magnetischem Dipolmoment und Drehimpuls eines Kreisstroms	32
4	Taylor-Entwicklung eines skalaren Feldes	34
5	Dirac'sche delta-Funktion	38
5.1	Definition der δ -Funktion	38
5.2	Faltungsintegral mit der δ -Funktion	40
5.3	Eigenschaften der δ -Funktion – Rechenregeln	42
5.4	Fourier-Transformation und δ -Funktion	52
5.5	Die δ -Funktion in Kugelkoordinaten	54
5.6	Verallgemeinerung für das Ersetzen der kartesischen Koordinaten in der δ -Funktion (Koordinaten-Transformation)	55
5.7	Herleitung von $\Delta \frac{1}{ \vec{r}-\vec{r}' } = -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}')$	56
5.7.1	Betrachtungen für $\vec{r} \neq \vec{r}'$	57
5.7.2	Betrachtungen unter Einschluss von $\vec{r} = \vec{r}'$	63
5.8	Herleitung von $(\Delta + k^2) \frac{\exp(\pm ikr)}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}')$	65
5.9	Die δ -Funktion in der Elektrostatik	67
6	Das Coulomb-Feld als Lösung von $\text{div } \vec{D} = \rho$	68

7	Selbstwechselwirkung, Selbstkraft, Selbstenergie, Energieinhalt einer Ladungsverteilung	72
8	Maxwell'sche Gleichungen, Lorentz-Kraft, Induktionsgesetz	80
8.1	Induktionsgesetz bei Relativbewegung zwischen Leiter und Magnet . . .	84
8.2	Kraft durch elektrischen Strom	93
9	Elektrodynamische Potentiale und Eichungen	96
9.1	Maxwell'sche Gleichungen und elektrodynamische Potentiale	96
9.1.1	Plausibilisierung des Potentialansatzes	99
9.1.2	Zusammenfassung	102
9.2	Die Coulomb-Eichung in der Elektro- und Magnetostatik	104
9.3	Plausibilisierung der Lorenz-Eichung	104
10	Lösungen der Wellengleichungen	106
10.1	Lösung der homogenen Wellengleichung	106
10.2	Partikuläre Lösung der inhomogenen Wellengleichung	109
11	Die Lorentz-Transformation von \vec{E}- und \vec{B}-Feld	113
12	Das elektromagnetische Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten Punktladung	119
13	Kovariante Darstellung der Elektrodynamik	125
II	Grundlegendes zur Quantenmechanik	145
1	Axiome der Quantentheorie	147
2	Rechnen mit komplexen Vektoren und Matrizen bzw. Operatoren	149
2.1	Veranschaulichung des komplexen Standardskalarprodukts und der Multiplikation komplexer Vektoren mit komplexen Matrizen	149
2.2	Rechenregeln	152
2.3	Matrixdarstellung von Operatoren	159
3	Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	162
3.1	Eigenwertgleichung einer 2-reihigen reellen Matrix	162
3.2	Verallgemeinerungen für n -reihige Matrizen	166
4	Entartung von Eigenwerten	167
5	Hilbertraum, Hermitesche Matrizen (Operatoren) und ihre Eigenschaften	170
6	Unitäre Matrizen (Operatoren)	173
6.1	Eigenschaften unitärer Matrizen (Operatoren)	173
6.2	Unitäre Transformation	174
6.3	Diagonalisierung von Matrizen (Operatoren)	176

7	Spur einer Matrix	180
8	Tabelle: Quadratische Matrizen	182
9	Messen und Messproblem in der Quantenmechanik	183
9.1	Observable, Messvorgang, Erwartungswert	183
9.2	Gemischte Zustände	187
9.3	Der statistische Operator (Dichtematrix)	188
10	Dirac-Formalismus	192
10.1	Übergang Hilbert-Vektor – Dirac-Vektor	192
10.2	Entwicklungssatz, Orthonormalität, Vollständigkeit und Skalarprodukt in kontinuierlicher Basis	195
10.3	Darstellung des formalen Dirac-Vektors in kontinuierlicher Basis und sein Eigendifferential	197
10.4	Darstellung von Zustandsvektoren und Operatoren in einer kontinuierlichen Basis	198
10.4.1	Ortsdarstellung der Impulseigenzustände	201
10.4.2	Impulsdarstellung der Ortseigenzustände	204
11	Fourier-Transformation der Impuls- und Ortseigenfunktionen	205
12	Zusammenfassung Dirac-Formalismus	208
13	Produktansatz bzw. Separationsansatz	214
14	Randbedingungen	216

Teil I

Grundlegendes zur Elektrodynamik

1 Der Plattenkondensator

Siehe auch:

- Wolfgang Demtröder, Springer-Lehrbuch, *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*, 3. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 22 bis Seite 30,
- Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, *Feynman Vorlesungen über Physik, Band II: Elektromagnetismus und Struktur der Materie*, 3. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, 2001, Seite 149, Seite 186 bis Seite 198,
- Christian Gerthsen, Helmut Vogel, Springer-Lehrbuch, *Gerthsen Physik*, 20. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999, Seite 293 bis Seite 315,
- Paul A. Tipler, *Physik*, 1. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 2000, Kapitel 18 bis Kapitel 21, Seite 617 bis Seite 746.

1.1 Arbeit, Spannung, Potential

Elektrische Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes bzw. \vec{E} -Feldes. $\vec{E}(\vec{r})$ ist die elektrische Feldstärke. Die Feldlinien des elektrischen Feldes beginnen an den positiven und enden an den negativen Ladungen. Die Feldlinien sind also definitionsgemäß von den positiven zu den negativen Ladungen gerichtet. Auf eine *positive* Probeladung q übt das \vec{E} -Feld die Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ aus, sodass sich die Ladung q in Richtung der Feldlinien bewegt und dabei auf dem Weg s von a nach b ohne Einwirkung (zusätzlicher) äußerer Kräfte die Arbeit

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \, d\vec{s} = q \int_a^b \vec{E} \, d\vec{s}$$

verrichtet. Gleichzeitig ändert sich auf dem Weg von a nach b die potentielle Energie von q gemäß

$$\Delta W_{\text{pot}} = -W_{ab} = -q \int_a^b \vec{E} \, d\vec{s} = q \int_a^b -\vec{E} \, d\vec{s}.$$

Im Gegensatz dazu bewegt sich eine negative Probeladung $-q$ ohne (zusätzliche) äußere Kräfte entgegengesetzt zum \vec{E} -Feld, sodass dann mit $\vec{F} = -q\vec{E}$ gilt:

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \, d\vec{s} = -q \int_a^b \vec{E} \, d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \Delta W_{\text{pot}} = q \int_a^b \vec{E} \, d\vec{s} = -q \int_a^b -\vec{E} \, d\vec{s}.$$

„Definition der Spannung

Elektrische Spannung, U , zwischen zwei Punkten a und b , die Arbeit, die die Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ bei der Verschiebung einer Probeladung q längs eines stetigen Weges s von Punkt a nach b verrichtet, dividiert durch die Probeladung q ...¹ Es ist also

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Probeladung}} .$$

Für die *positive* Probeladung q gilt damit

$$U_{ab} = \frac{W_{ab}}{q} = \frac{q \int_a^b \vec{E} \, d\vec{s}}{q} = \int_a^b \vec{E} \, d\vec{s}$$

und für die *negative* Probeladung $-q$

$$U_{ab} = \frac{W_{ab}}{-q} = \frac{-q \int_a^b \vec{E} \, d\vec{s}}{-q} = \int_a^b \vec{E} \, d\vec{s} ,$$

sodass

$$\boxed{U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \, d\vec{s}} . \quad (1.1)$$

Analog zur Spannung gilt sinngemäß

$$\text{Potential} = \frac{\text{potentielle Energie}}{\text{Probeladung}} .$$

Für die *positive* Probeladung q ist damit die Potentialdifferenz

$$\phi_{ab} = \frac{\Delta W_{\text{pot}}}{q} = \frac{q \int_a^b -\vec{E} \, d\vec{s}}{q} = \int_a^b -\vec{E} \, d\vec{s}$$

und für die *negative* Probeladung $-q$

$$\phi_{ab} = \frac{\Delta W_{\text{pot}}}{-q} = \frac{-q \int_a^b -\vec{E} \, d\vec{s}}{-q} = \int_a^b -\vec{E} \, d\vec{s} ,$$

sodass

$$\boxed{\phi_{ab} = \int_a^b -\vec{E} \, d\vec{s} = \phi(b) - \phi(a)} . \quad (1.2)$$

¹Zitiert aus: Horst Stöcker, *Taschenbuch der Physik – Formeln Tabellen Übersichten*, 5. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2004, Seite 411. Dabei haben wir für die zwei Punkte die Kleinbuchstaben a und b verwendet und für die Probeladung nicht Q sondern q geschrieben.

Der Vergleich zwischen (1.2) und (1.1) zeigt

$$\begin{aligned} \text{Potentialdifferenz } \phi_{ab} = -U_{ab} & \Leftrightarrow \\ U_{ab} := -\phi_{ab} = -[\phi(b) - \phi(a)] & = \phi(a) - \phi(b) \end{aligned} .$$

Wie wir sehen, hängen Spannung und Potentialdifferenz nicht von der Probeladung ab, sondern nur vom \vec{E} -Feld und den Raumpunkten a und b . Wenn wir die Betrachtungsrichtung wechseln, d. h. a und b vertauschen, wechseln sowohl Spannung als auch Potentialdifferenz ihr Vorzeichen. Allgemein gilt

$$\vec{E} = -\nabla\phi .$$

Die Potentiale ϕ eines \vec{E} -Feldes bilden ein (skalares) Potentialfeld $\phi(\vec{r})$, das nur durch die Ladungsverteilung im Raum bestimmt wird. Als Beispiel zeigen wir, wie im Fall des zentralsymmetrischen \vec{E} -Feldes einer positiven Punktladung Q das Potentialfeld gebildet wird. Dabei verwenden wir die Änderung der potentiellen Energie ΔW_{pot} , die eine positive Probeladung q auf ihrem Weg vom Abstand $r_1 \rightarrow \infty$ von Q bis zum Abstand r_2 von Q erfährt:

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{\Delta W_{\text{pot}}}{q} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r} \Big|_{r_1 \rightarrow \infty}^{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_2} = \phi(r_2) ,$$

Umbenennung $r_2 \rightarrow r \Rightarrow$

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \geq 0 .$$

1.2 Plattenkondensator als Modell

Wir gehen davon aus, dass die Platten des als Modell verwendeten Plattenkondensators planparallel sein sollen. Ihr Abstand sei d , ihr Flächeninhalt sei A und die Kantenlängen der Platten seien viel größer als d , sodass wir das elektrische bzw. \vec{E} -Feld im Innern des Kondensators als nahezu homogen betrachten dürfen. Unter Verwendung des Gauß'schen Gesetzes²

$$\int \vec{E} \, d\vec{A} = |\vec{E}| \cdot |\vec{A}| = E \cdot A = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad \Leftrightarrow \quad Q = \epsilon_0 \cdot E \cdot A$$

gilt dann für diesen Plattenkondensator

$$Q = C \cdot U$$

²Im Gauß'schen Gesetz erscheint eine Naturkonstante, die elektrische Feldkonstante oder Vakuum-Dielektrizitätskonstante $\epsilon_0 = 8,854\,187\,817 \dots \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

mit der Proportionalitätskonstanten C , der Kapazität³

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{E \cdot \varepsilon_0 A}{E \cdot d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Wir können jetzt zwei Fälle unterscheiden. Im ersten Fall bildet der aufgeladene Plattenkondensator ein abgeschlossenes System, d. h. er ist isoliert. Die freie Ladung auf seinen Platten kann sich folglich nicht verändern, sodass

$$Q = \text{const} \quad \Rightarrow \quad C \propto \frac{1}{U}.$$

Im zweiten Fall bildet der aufgeladene Kondensator ein offenes System und ist an eine konstant gehaltene Spannungsquelle mit nahezu unerschöpflichem Energieinhalt bzw. Ladungsvorrat angeschlossen. Die Spannung zwischen den Platten kann sich folglich nicht verändern, sodass

$$U = \text{const} \quad \Rightarrow \quad C \propto Q.$$

Das \vec{E} -Feld zwischen den Platten wird von dem dort befindlichen Medium beeinflusst. Das Ausmaß dieses Einflusses wird beschrieben von einer dimensionslosen physikalischen Größe, der relativen Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_r = 1 + \chi$. Sie ist material- bzw. stoffspezifisch und beinhaltet die dielektrische Suszeptibilität χ .

Die Kondensatorplatten sind elektrische Leiter. Wird der Kondensator aufgeladen, sind seine Platten nicht mehr elektrisch neutral und es befindet sich in oder besser auf ihnen die *freie* Ladung Q .⁴ Diese freie Ladung generiert ein homogenes \vec{E} -Feld zwischen den Platten. Wird in den Zwischenraum des aufgeladenen Kondensators ein Dielektrikum (Nichtleiter) eingebracht, wird dieses in \vec{E} -Feldrichtung polarisiert. Dabei werden schon vorhandene permanente Dipolmoleküle durch *Orientierungspolarisation* ausgerichtet. Stets aber werden durch *Influenz* die negativen Ladungen der Moleküle zur positiven Kondensatorplatte hin gezogen und die positiven Ladungen zur negativen Kondensatorplatte. Die Moleküle werden also in Feldrichtung zu kleinen elektrischen Dipolen gestreckt und ausgerichtet. Dieser Vorgang heißt *Verschiebungspolarisation*. Die permanenten und die vom \vec{E} -Feld induzierten Dipole besitzen das elektrische Dipolmoment

$$\vec{p}_{\text{el}} = q \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad p_{\text{el}} = q \cdot a,$$

wobei q die positive Ladung und $|\vec{a}| = a$ der Abstand zwischen der negativen und der positiven Ladung des Dipols ist.

Der elektrische Dipolvektor \vec{p}_{el} zeigt definitionsgemäß von der negativen zur positiven Dipolladung.

Demzufolge sind das \vec{E} -Feld und die von ihm im Dielektrikum induzierten elektrischen Dipole (Dipolmomente) im Allgemeinen gleichsinnig ausgerichtet, wie wir der Abbildung 1.1 entnehmen können. Das elektrische Feld der Dipole jedoch ist zu ihrem

³Jeder Kondensator besitzt seine gerätespezifische Kapazität, abhängig z. B. von der Gestalt seiner Elektroden, ihrem Abstand und vom Medium zwischen ihnen.

⁴Die freie Ladungsmenge Q besteht aus freien bzw. im elektrischen Leiter frei beweglichen Ladungsträgern, den freien Elektronen (Leitungselektronen).

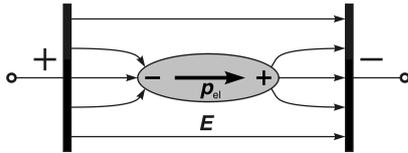


Abb. 1.1 Schematische Darstellung zur Ausrichtung eines elektrischen Dipols \vec{p}_{el} in einem homogenen \vec{E} -Feld.

Erzeugerfeld, dem \vec{E} -Feld des Kondensators, entgegengerichtet. Das durch Polarisierung des Dielektrikums entstandene (elektrische) Polarisationsfeld ist also ein Gegenfeld zum ursprünglichen Vakuum-Kondensatorfeld \vec{E}_0 und schwächt bzw. schirmt dieses folglich ab zum resultierenden Feld im Innern des Dielektrikums mit der elektrischen Feldstärke \vec{E}_D . Die Ursache dafür ist das Bestreben physikalischer Systeme, in den Zustand des kleinsten Potentials bzw. der niedrigsten potentiellen Energie zu gelangen.⁵ Dieser Zustand ist im Fall des Plattenkondensators mit einem Dielektrikum schließlich erreicht, wenn sich alle negativen Ladungsträger so weit wie möglich den positiven Ladungsträgern genähert haben bzw. umgekehrt. Das Dielektrikum ist dann, wie in Abbildung 1.1 schematisch dargestellt, vollständig polarisiert.

Die Vektorsumme aller Dipolmomente in einem Dielektrikum dividiert durch sein Volumen ist die vektorielle Größe *dielektrische Polarisation*

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_{eli}}{V} = \frac{\text{(mittleres) Dipolmoment}}{\text{Volumen(einheit)}}.$$

Manchmal wird die dielektrische Polarisation auch als ortsabhängige, lokale Größe, also als Dipolmomentdichte wie folgt angegeben:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}_{el}}{dV}.$$

Durch die Polarisation des Dielektrikums resultieren *Polarisationsladungen*, die die Flächenladungsdichte σ_{pol} an den Stirnseiten des Dielektrikums bilden, die den Kondensatorplatten gegenüberliegen. Wir werden später zeigen, dass

$$\sigma_{pol} = |\vec{P}|.$$

1.3 Felder im Plattenkondensator

1.3.1 Isolierter Plattenkondensator

Gehen wir vom ersten Fall aus, dem isolierten Plattenkondensator, so gilt

$$Q = const \quad \Rightarrow \quad C \propto \frac{1}{U} \propto \frac{1}{E}.$$

Der Abstand zwischen den Kondensatorplatten beträgt d . Die Spannung U im Plattenkondensator können wir uns veranschaulichen durch die Arbeit, die eine positive Probe-Einheitsladung q auf dem Weg der Länge d von der positiv geladenen zur negativ geladenen Kondensatorplatte, also von A nach B , verrichtet, wenn wir dabei bedenken, dass die Spannung die Arbeit der Probeladung dividiert durch diese Probeladung ist.

⁵Eine anschauliche Darstellung dieses Sachverhalts findet man in: Paul A. Tipler, *Physik*, 1. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 2000, Abschnitt 18.7 *Elektrische Dipole in elektrischen Feldern*, Seite 636 bis Seite 638.

Kondensator mit Vakuum zwischen den Platten (Abb. 1.2)

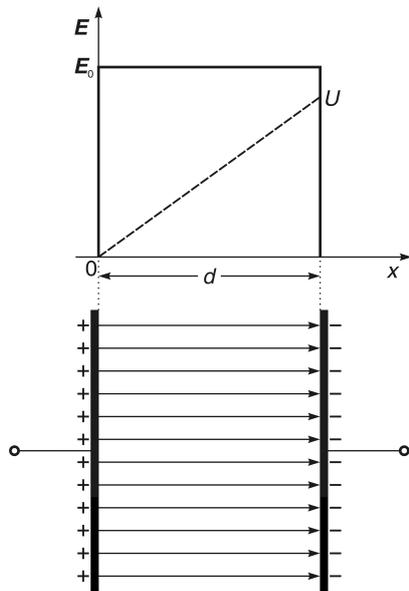


Abb. 1.2 Die Ladungsmengen $+Q$ auf der linken und $-Q$ auf der rechten Platte des Plattenkondensators erzeugen im Vakuum zwischen den Platten das homogene elektrische Feld der Stärke \vec{E}_0 . Die Spannung bei $x = d$ beträgt $U = E_0 \cdot d$ bezüglich $x = 0$.

Das \vec{E} -Feld im Vakuum bezeichnen wir mit \vec{E}_0 . Somit ist das homogene \vec{E} -Feld im Innern des Kondensators mit einem Vakuum zwischen seinen Platten \vec{E}_0 . Das Vakuum besitzt die relative Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r = 1$, muss also als Faktor nicht angeschrieben werden. Die Spannung zwischen den beiden Kondensatorplatten ist

$$U = E_0 \cdot d$$

und die Kapazität des Kondensators ist

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E_0 \cdot d}.$$

Kondensator mit elektrischem Leiter zwischen den Platten (Abb. 1.3)

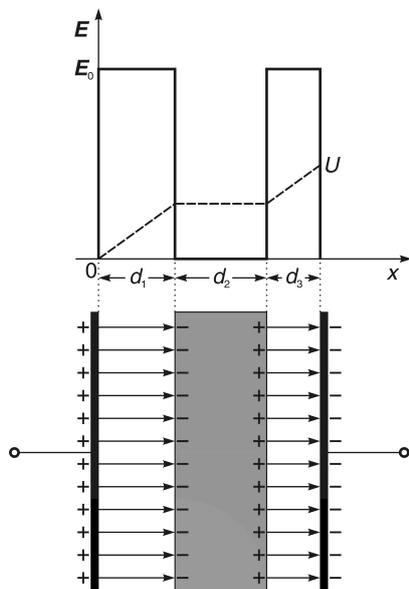


Abb. 1.3 Die Ladungsmengen $+Q$ auf der linken und $-Q$ auf der rechten Platte des Plattenkondensators erzeugen im Vakuum zu beiden Seiten des Leiters das homogene elektrische Feld der Stärke \vec{E}_0 . Innerhalb des elektrischen Leiters verschwindet das elektrische Feld gemäß $\vec{E} = 0$. Die Spannung bei $x = d$ beträgt deshalb nur $U = E_0 \cdot (d_1 + d_3)$ bezüglich $x = 0$.

Jetzt schieben wir eine Leiterplatte der Dicke d_2 zwischen die Kondensatorplatten, sodass der Abstand zwischen Leiterplatte und Kondensatorplatte auf der einen Seite d_1 und auf der anderen Seite d_3 beträgt. Es ist folglich

$$d_1 + d_2 + d_3 = d .$$

Auf den Leiterstirnflächen, die den Kondensatorplatten gegenüberliegen, werden „Spiegeladungen“ zu allen Kondensatorplattenladungen induziert, sodass die Flächenladungsdichten auf den Kondensatorplatten und den Leiterstirnseiten betragsgleich sind aber unterschiedliche Vorzeichen besitzen. Die elektrische Feldstärke in den beiden Vakuumbereichen zwischen Kondensatorplatten und Leiter ist deshalb die gleiche wie beim Kondensator mit einem Vakuum zwischen den Platten, also \vec{E}_0 . Innerhalb der eingeschobenen Leiterplatte ist die elektrische Feldstärke $\vec{E} = 0$ und somit das Potential konstant. Jetzt können wir die Spannung zwischen den beiden Kondensatorplatten angeben:

$$U = E_0 \cdot d_1 + 0 \cdot d_2 + E_0 \cdot d_3 ,$$

$$U = E_0 \cdot (d_1 + d_3) .$$

Wegen $d_1 + d_3 < d$ wird die Spannung des Kondensators kleiner, wenn man einen elektrischen Leiter zwischen die Kondensatorplatten schiebt, und wegen $C = Q/U$ bei $Q = \text{const}$ wird dann die Kapazität des Kondensators größer:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E_0 \cdot (d_1 + d_3)} .$$

Kondensator mit Dielektrikum zwischen den Platten (Abb. 1.4)

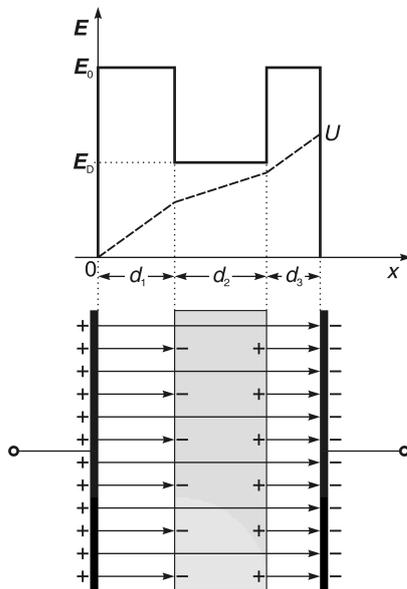


Abb. 1.4 Die Ladungsmengen $+Q$ auf der linken und $-Q$ auf der rechten Platte des Plattenkondensators erzeugen im Vakuum zu beiden Seiten des Dielektrikums das homogene elektrische Feld der Stärke \vec{E}_0 . Das elektrische Feld \vec{E}_D innerhalb des Dielektrikums ist im Vergleich zum elektrischen Vakuumfeld \vec{E}_0 gemäß $\vec{E}_D < \vec{E}_0$ abgeschwächt. Die Spannung bei $x = d$ beträgt deshalb $U = E_0 \cdot (d_1 + d_3) + E_D \cdot d_2$ bezüglich $x = 0$.

Das \vec{E} -Feld innerhalb eines Dielektrikums bezeichnen wir mit \vec{E}_D . Schieben wir jetzt zwischen die Platten unseres Kondensators an Stelle des elektrischen Leiters eine Platte gleicher Dicke d_2 aus einem Dielektrikum, so wird die Spannung am Kondensator ebenfalls kleiner. Allerdings ist diese Spannungsabnahme nicht so ausgeprägt, wie im

Fall der Leiterplatte. Wir können daraus schließen, dass das \vec{E} -Feld das Dielektrikum zu einem gewissen Teil durchdringt und dabei das Dielektrikum polarisiert. Im Vergleich zur elektrischen Feldstärke \vec{E}_0 im Vakuumbereich zu beiden Seiten der Dielektrikumplatte ist also die elektrische Feldstärke \vec{E}_D im Innern des Dielektrikums um den Faktor $1/\epsilon_r$ abgeschwächt:

$$\begin{aligned}\vec{E}_D &= \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}, \quad \epsilon_r = 1 + \chi, \\ \Leftrightarrow \vec{E}_0 &= \epsilon_r \vec{E}_D.\end{aligned}$$

Aus der Polarisation \vec{P} resultiert auch auf den Flächen der Dielektrikumplatte eine Flächenladungsdichte $\sigma = |\vec{P}|$, die aber im Vergleich zur Leiterplatte kleiner ist. Das Gauß'sche Gesetz

$$\int \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

liefert für die Polarisationsladung Q_{pol} auf den Flächen des Dielektrikums im homogenen elektrischen Feld des Plattenkondensators

$$E_{\text{pol}} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_{\text{pol}}}{A} = \frac{\sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0}$$

und für die freie Ladung Q_{frei} auf den Kondensatorplatten

$$E_{\text{frei}} = E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_{\text{frei}}}{A} = \frac{\sigma_{\text{frei}}}{\epsilon_0}.$$

Im Innern des Dielektrikums überlagern sich das äußere Feld E_0 und das durch die Polarisation entstandene, entgegengerichtete Feld E_{pol} , sodass wir für die elektrische Feldstärke im Dielektrikum

$$E_D = \frac{\sigma_{\text{frei}}}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0}, \quad \sigma_{\text{frei}} > \sigma_{\text{pol}} \quad (1.3)$$

erhalten. Mit dem Abstand $|\vec{a}| = a$ zwischen den Ladungsschwerpunkten in den elektrischen Dipolen bzw. der Verschiebung zwischen positivem und negativem Ladungsschwerpunkt in den Molekülen des Dielektrikums bei der Polarisation und mit der Dipoldichte (Teilchendichte) $N/V = n$ ist die Polarisation

$$|\vec{P}| = P = \frac{N \cdot p_{\text{el}}}{V} = n \cdot p_{\text{el}} = n \cdot qa.$$

Die zugehörige Flächenladungsdichte ist

$$\sigma_{\text{pol}} = \frac{Q_{\text{pol}}}{A} = \frac{Nq}{A} \cdot \frac{aA}{V} = \frac{Nq}{V} \cdot \frac{aA}{A} = n \cdot qa.$$

Wie wir sehen, ist die Flächenladungsdichte tatsächlich gleich der Polarisation im Innern des Dielektrikums:

$$\sigma_{\text{pol}} = P.$$

Dabei haben wir angenommen, dass a die Dicke und folglich $a \cdot A$ das Volumen jeder Dipolschicht im Dielektrikum ist. Wir hatten bereits festgestellt, dass die Vektoren \vec{E}_0 , \vec{E}_D und \vec{P} zueinander gleichsinnig parallel sind. Deshalb ergeben sich aus

(1.3) die folgenden Beziehungen zwischen der elektrischen Feldstärke \vec{E}_0 außerhalb des Dielektrikums, der elektrischen Feldstärke \vec{E}_D innerhalb des Dielektrikums und der Polarisation \vec{P} :

$$\vec{E}_D = \vec{E}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}_0 = \vec{E}_D + \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} .$$

Mit der Ladungsdichte $\Delta Q/\Delta V$ bzw. $dQ/dV = \rho$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Gauß'sches Gesetz} \quad \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \Delta Q \\ &= \int_V \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \, dV \end{aligned}$$

$$\text{Gauß'scher Satz} \quad \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{E} \, dV ,$$

$$\Rightarrow \text{Poisson-Gleichung} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho .$$

Damit ist die Poisson-Gleichungen für das elektrische Feld \vec{E}_0 außerhalb des Dielektrikums:

$$\text{div } \vec{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{\text{frei}} .$$

Analog dazu erhalten wir die Poisson-Gleichung bezüglich der Polarisation wie folgt:

$$\Delta Q_{\text{pol}} = \int_V \rho_{\text{pol}} \, dV = \int_S \sigma_{\text{pol}} \cdot \vec{n}^0 \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{P} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{P} \, dV \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \text{div } \vec{P} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{\text{pol}} .$$

Die Poisson-Gleichung der elektrischen Feldstärke \vec{E}_D innerhalb des Dielektrikums ist schließlich

$$\text{div } \vec{E}_D = \text{div} \left(\vec{E}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{frei}} - \rho_{\text{pol}}) . \quad (1.4)$$

Die Spannung zwischen den Kondensatorplatten bei Anwesenheit eines Dielektrikums der Dicke d_2 ist

$$U = E_0 \cdot d_1 + E_D \cdot d_2 + E_0 \cdot d_3 ,$$

$$U = E_0 \cdot (d_1 + d_3) + E_D \cdot d_2$$

und die Kapazität des Kondensators ist

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{E_0 \cdot (d_1 + d_3) + E_D \cdot d_2} .$$

Wir stellen fest, dass die Kapazität eines Kondensators zunimmt, wenn wir zwischen seine Platten ein Dielektrikum schieben, weil das \vec{E}_0 -Feld des Kondensators im Innern des Dielektrikums um den Faktor $1/\varepsilon_r$, $\varepsilon_r > 1$, abgeschwächt wird, sodass

$$\vec{E}_D = \frac{1}{\varepsilon_r} \vec{E}_0 . \quad (1.5)$$

Die stärkste Zunahme der Kapazität des Kondensators beobachten wir beim Einschleiben eines elektrischen Leiters, weil dann das elektrische Feld im Innern des Leiters verschwindet. Bezüglich (1.5) heißt das:

$$\frac{1}{\varepsilon_r} \vec{E}_0 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r (\text{el. Leiter}) \rightarrow \infty .$$

Schließlich vergleichen wir einen isolierten „Vakuum-Plattenkondensator“ mit einem isolierten Plattenkondensator, dessen Zwischenraum *vollständig* mit einem Dielektrikum ausgefüllt ist. Für beide gilt

$$Q = Q_{\text{frei}} = \text{const} .$$

Wenn wir berücksichtigen, dass für das Vakuum $\varepsilon_r = 1$ ist, können wir für die freie Flächenladungsdichte auf den Platten des Kondensators verallgemeinernd

$$\sigma_{\text{frei}} = \frac{Q_{\text{frei}}}{A} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r E = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \frac{U}{d}$$

schreiben, denn

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r E = \begin{cases} \varepsilon_0 \cdot E = \varepsilon_0 \cdot E_0 & \text{für } \varepsilon_r = 1 \text{ (Vakuum) ,} \\ \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r E = \varepsilon_0 \cdot E_D & \text{für } \varepsilon_r > 1 \text{ (Dielektrikum) .} \end{cases}$$

Damit ist die freie Ladung auf den Platten des isolierten Plattenkondensators

$$Q_{\text{frei}}(\varepsilon_r, U) = \sigma_{\text{frei}} \cdot A = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \frac{U}{d} \cdot A = \text{const} . \quad (1.6)$$

1.3.2 Plattenkondensator mit konstanter Spannung

Gehen wir vom zweiten Fall aus, dem Kondensator als offenem System, so ist der Kondensator an eine Spannungsquelle angeschlossen, die eine stets konstante Spannung U am Kondensator gewährleistet, sodass

$$U = \text{const} \quad \Rightarrow \quad Q \propto C .$$

Schieben wir jetzt ein Dielektrikum oder einen elektrischen Leiter zwischen die Kondensatorplatten, so nimmt die Kapazität des Kondensators zu und es wird die dann fehlende Ladung von der Spannungsquelle in die Kondensatorplatten transportiert, bis sich ein neues Gleichgewicht gemäß $Q = C \cdot U$ eingestellt hat. In diesem neuen Gleichgewicht gelten dann die gleichen Beziehungen zwischen elektrischem Feld,

Spannung und Energie wie beim (isolierten) Kondensator als abgeschlossenem System (s. Abschn. 1.3.1). Eine weitere Diskussion des Plattenkondensators mit konstanter Spannung erübrigt sich deshalb.

Trotzdem wollen wir abschließend zeigen, dass sich in einem Plattenkondensator die elektrische Feldstärke nicht ändert, wenn bei *konstant gehaltener Spannung* das Vakuum zwischen seinen Platten *vollständig* durch ein Dielektrikum ersetzt wird. Dieses Argument werden wir bei der Untersuchung der elektrischen Feldenergie verwenden. Soweit erforderlich, werden wir dafür die physikalischen Größen bezüglich des Kondensators mit einem Vakuum mit 0 indizieren und die Größen bezüglich des Kondensators mit einem Dielektrikum mit D. Weiterhin berücksichtigen wir, dass sich die „Vakuum-Kapazität“ C_0 des Plattenkondensators beim Ausfüllen des Zwischenraums durch ein Dielektrikum gemäß

$$C_D = \varepsilon_r C_0$$

ändert. Dies sieht man wie folgt:

$$Q = Q_0 = \text{const} \quad \text{und} \quad E_D = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \quad \Rightarrow \quad U_D = E_D \cdot d = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \cdot d = \frac{Q_0}{C_D}$$

$$\Leftrightarrow C_D = \frac{Q_0}{U_D} = Q_0 \frac{\varepsilon_r}{E_0 \cdot d} = \varepsilon_r \frac{Q_0}{U_0} = \varepsilon_r C_0 \quad \square$$

Wenn wir jetzt die Spannung gemäß

$$U_D = U_0 = U$$

konstant halten, resultiert

$$C_D = \frac{Q_D}{U_D} = \frac{Q_D}{U_0} = \frac{Q_D}{E_D \cdot d}$$

$$= \varepsilon_r C_0 = \frac{\varepsilon_r Q_0}{U_0} = \frac{Q_D}{U_0} = \frac{Q_D}{E_0 \cdot d}.$$

Wie wir sehen, muss tatsächlich

$$E_D = E_0 = E$$

gelten, wenn bei $U = \text{const}$ das Vakuum im Plattenkondensator durch ein Dielektrikum ersetzt wird. Weil sich dann die Kapazität des Kondensators um den Faktor ε_r vergrößert, muss bei konstanter Spannung am Kondensator auch seine Ladung um den gleichen Faktor zunehmen, sodass

$$Q_D = \varepsilon_r Q_0 = Q_{\text{frei}}.$$

Im Vergleich zum isolierten Plattenkondensator ist im offenen System „Kondensator mit konstanter Spannung“ folglich die freie Ladung $Q = Q_{\text{frei}}$ auf den Platten nur noch abhängig vom Dielektrikum und somit selbst nicht mehr konstant, sodass (1.6) die folgende Form erhält:

$$Q_{\text{frei}}(\varepsilon_r) = \varepsilon_r \cdot Q_0 = \sigma_{\text{frei}} \cdot A = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \frac{U}{d} \cdot A, \quad U = \text{const} \quad (1.7)$$

1.4 \vec{D} -Feld und der Unterschied zwischen \vec{E} -Feld und \vec{D} -Feld

Prüfer zum Studenten: „Was ist ein D-Feld?“
 Student: „Keine Ahnung.“
 Prüfer: „Und was ist ein E-Feld?“
 Student: „Weiß ich auch nicht.“
 Prüfer – stirnrunzelnd: „So, ich gebe Ihnen noch eine letzte Chance:
 Was ist der Unterschied zwischen D-Feld und E-Feld?“
 Zitiert nach www.mikrocontroller.net/topic/169050

Zur Vertiefung dieses Themas ist die Vorlesung *PH II – 10 Dielektrische Verschiebung* von Prof. Paul Wagner an der Fakultät für Physik der Universität Wien sehr zu empfehlen und zu finden unter

<https://www.youtube.com/watch?v=Wcs1p6WJIFw>

Beginnen wir diesen Abschnitt mit einem Zitat⁶ aus Feynmans Vorlesungen über Physik:

„In den frühen Zeiten der Elektrizität war der atomare Mechanismus der Polarisation unbekannt und die Existenz von ρ_{pol} wurde nicht wichtig genommen. Man betrachtete die Ladung ρ_{frei} als die gesamte Ladungsdichte. Um die Maxwell'schen Gleichungen in eine einfache Form zu bringen, definierte man einen neuen Vektor \mathbf{D} als eine Linearkombination aus \mathbf{E} und \mathbf{P} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} .“$$

Das Vektorfeld \vec{D} ist die **dielektrische Verschiebung**⁷ und \vec{E} und \vec{P} sind in dieser Definition die elektrische Feldstärke und die Polarisation im betrachteten Medium. Die freien Ladungen (Index „frei“) sind die Ladungen auf den Kondensatorplatten. Sie sind zu unterscheiden von den Polarisationsladungen (Index „pol“) im Dielektrikum. Weil im Vakuum $\vec{P} = \vec{0}$ ist, erhält diese Definition von \vec{D} in unserer Notation die Form

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \sigma_{\text{frei}} \cdot \vec{n}^0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 && \text{im Vakuum mit } \epsilon_r = 1 , \\ \vec{D} &= \sigma_{\text{frei}} \cdot \vec{n}^0 = \epsilon_0 \vec{E}_D + \vec{P} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \vec{E}_D && \text{im Dielektrikum .} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \vec{E}_D = \epsilon_0 \vec{E}_0 \quad : \quad \vec{D} \text{ ist der } \mathbf{Repräsentant des Vakuumfeldes} .$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \vec{E}_D = \epsilon \vec{E}_D \quad \text{ist die } \mathbf{Materialgleichung} .$$

ϵ heißt Dielektrizitätskonstante oder auch Permittivität. Die Äquivalenzumformung von (1.4) ergibt

$$\text{div } \vec{E}_0 = \text{div } \vec{E}_D + \text{div } \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{frei}}$$

und nach Multiplikation mit ϵ_0

$$\begin{aligned} \text{div } (\epsilon_0 \vec{E}_0) &= \text{div } \epsilon_0 \vec{E}_D + \text{div } \vec{P} = \rho_{\text{frei}} , \\ \text{div } \vec{D} &= \rho_{\text{frei}} . \end{aligned}$$

⁶Zitiert aus: Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, *Feynman Vorlesungen über Physik, Band II: Elektromagnetismus und Struktur der Materie*, 3. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, 2001, Seite 194.

⁷Die dielektrische Verschiebung \vec{D} wird auch elektrische Verschiebung, Verschiebungsdichte, Verschiebungsflussdichte, elektrische Flussdichte oder elektrische Erregung genannt.

Die dielektrische Verschiebung \vec{D} bezieht sich also nur auf die freien Ladungen (auf den Kondensatorplatten) und nicht auf die Polarisationsladungen im Dielektrikum. \vec{D} repräsentiert folglich das Vakuumfeld. Das \vec{D} -Feld ist also unabhängig vom Medium zwischen den Kondensatorplatten. Deshalb ist die Normalkomponente von \vec{D} an den Grenzschichten zwischen verschiedenen Dielektrika stetig, nicht jedoch ihre Tangentialkomponente. Beim \vec{E} -Feld ist dies genau umgekehrt. Wie man sieht und in Übereinstimmung mit (1.3), ist der Betrag der dielektrischen Verschiebung gleich der Flächendichte der freien Ladungen auf den Kondensatorplatten gemäß

$$|\vec{D}| = \sigma_{\text{frei}} . \quad (1.8)$$

Entsprechend hat \vec{D} genau wie die Polarisation \vec{P} die Dimension Ladung pro Fläche, also $\text{As}/\text{m}^2 = \text{C}/\text{m}^2$, die elektrische Feldstärke \vec{E} jedoch die Dimension Spannung pro Länge, also V/m .

Bei der Betrachtung der energetischen Verhältnisse im Plattenkondensator werden wir die Beziehung zwischen der Polarisation und dem elektrischen Feld innerhalb des Dielektrikums benötigen. Wir zeigen sie deshalb bereits an dieser Stelle:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}_D = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}_D - \varepsilon_0 \vec{E}_D$$

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}_D} . \quad (1.9)$$

1.5 Die Energie im Plattenkondensator

Wir gehen wieder aus vom Plattenkondensator mit einem Vakuum zwischen den Platten. Beim Aufladen dieses Kondensators wird die positive Ladungsmenge $+Q$ der einen Platte um die Strecke d getrennt von der negativen Ladungsmenge $-Q$ der anderen Platte und es entsteht das elektrische Feld zwischen den Platten. Für diesen *Prozess* ist Energie erforderlich, die sich schließlich als elektrische Feldenergie W_{el} manifestiert. Das \vec{E} -Feld „verkörpert“ also die potentielle Energie zwischen den getrennten Ladungen $+Q$ und $-Q$. Wird dann der Kondensator entladen, verschwindet das \vec{E} -Feld und verrichtet dabei über den Ladungsrücktransport die Arbeit W_{el} . Die elektrische Feldenergie W_{el} ist gleich der Arbeit, welche die felderzeugenden Ladungen verrichten können.

Betrachten wir also den Aufladungsprozess des Kondensators hinsichtlich der dafür erforderlichen Energie. Wenn wir in einem Plattenkondensator bei der Spannung

$$U_i = \frac{Q_i}{C}$$

die vergleichsweise kleine Ladungsmenge ΔQ_i von der einen zur anderen Platte transportieren, bewirkt das die Änderung der elektrischen Feldenergie

$$\Delta W_{\text{el}i} = U_i \cdot \Delta Q_i = \frac{1}{C} Q_i \cdot \Delta Q_i .$$

Man kann sich den gesamten Aufladungsprozess beginnend bei $Q = C \cdot U = 0 \Rightarrow U = 0$ als eine Reihe von derartigen Aufladungsteilprozessen vorstellen, bis schließlich die endgültige Spannung U mit der zugehörigen Ladung $Q = C \cdot U$ erreicht ist:

$$W_{\text{el}} = \sum_i \Delta W_{\text{el}i} \approx \sum_i \frac{1}{C} Q_i \cdot \Delta Q_i \Rightarrow$$

$$W_{\text{el}} = \int dW_{\text{el}} = \int_{Q=0}^Q \frac{1}{C} Q \, dQ$$

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot U^2 .$$

Für den Plattenkondensator mit Vakuum zwischen den Platten hatten wir

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}, \quad U = E \cdot d ,$$

festgestellt, sodass

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 V = \frac{1}{2} DE \cdot V .$$

Die daraus folgende *Energiedichte* des elektrischen Feldes im Plattenkondensator ist

$$w_{\text{el}} = \frac{W_{\text{el}}}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} DE . \quad (1.10)$$

Die Energiedichte w_{el} des Plattenkondensators hängt allein vom Betrag der elektrischen Feldstärke und nicht von den Parametern des Kondensators ab. Diese Tatsache legt nahe, dass (1.10) für das elektrische Feld allgemein gilt.

Plattenkondensator mit konstant gehaltener Spannung U

Weil wir jetzt vom „Vakuum-Plattenkondensator“ zum „Dielektrikum-Plattenkondensator“ bei *konstant gehaltener Spannung* übergehen, verwenden wir zur besseren Unterscheidung wieder, wenn erforderlich, den Index 0 für Vakuum und den Index D für Dielektrikum, sodass u. a.

$$U = U_0 = U_D = \text{const} ,$$

$$E = E_0 = E_D = \text{const} ,$$

$$D = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 E_D = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 E ,$$

$$D_0 = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 E .$$

Für den „Vakuum-Plattenkondensator“ mit $\varepsilon_r = 1$ gilt damit

$$W_{\text{el}0} = \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot V$$

$$W_{\text{el}0} = \frac{1}{2} D_0 E \cdot V$$

und für den „Dielektrikum-Plattenkondensator“ erhalten wir mit $C_0 = \varepsilon_0 A/d$ und $U = E \cdot d$

$$\begin{aligned} W_{\text{elD}} &= \frac{1}{2} C_D U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 U^2 \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \cdot E^2 d^2 \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 \cdot V \\ W_{\text{elD}} &= \frac{1}{2} \varepsilon_r D_0 E \cdot V = \frac{1}{2} DE \cdot V . \end{aligned}$$

Tatsächlich ist die elektrische Feldenergie des „Dielektrikum-Kondensators“ unter der Bedingung $U = \text{const}$ um den Faktor ε_r größer als die des „Vakuum-Kondensators“. Es gilt dann nämlich bei der Ladungsänderung des Kondensators

$$\begin{aligned} W_{\text{el}} &= \frac{1}{2} \frac{Q}{C} \cdot Q = \frac{1}{2} U \cdot Q \quad \Rightarrow \\ W_{\text{el}} &\propto Q , \end{aligned}$$

obwohl die elektrische Feldstärke \vec{E} gemäß $U = E \cdot d = \text{const}$ ebenfalls konstant ist. Wir zeigen jetzt, dass die Differenzenergie

$$W_{\text{elD}} - W_{\text{el0}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2 \cdot V ,$$

auch gleich der Polarisationsenergie

$$W_{\text{pol}} = \frac{1}{2} (\varepsilon_r - 1) C_0 U^2 , \quad U = \text{const} \tag{1.11}$$

des Dielektrikums ist. Dafür brauchen wir nur zu untersuchen, welche Energie zur Polarisation des Dielektrikums in einem homogenen \vec{E} -Feld erforderlich ist.

Für die Induktion der elektrischen Dipole im Dielektrikum, das von dem homogenen elektrischen Feld $\vec{E}_D = \vec{E}$ durchflutet wird, nehmen wir an, dass die Rückstellkraft \vec{F} zwischen den Ladungen q in jedem Dipolmoment \vec{p}_{el} gemäß

$$F = -k x$$

proportional ist zur Auslenkung x von der Lage bei $x = 0$ ohne \vec{E} -Feld. Im Gleichgewicht zwischen der Kraft $q \cdot E$, mit der das (äußere) \vec{E} -Feld auf den einzelnen Dipol wirkt, und der Rückstellkraft $-k x = -k a$ gilt

$$-k a + q E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k a = q E \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{q E}{k} . \tag{1.12}$$

Der Betrag der einzelnen Dipolmomente ist aber

$$p_{\text{el}} = a \cdot q \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{p_{\text{el}}}{q} ,$$

sodass mit (1.12)

$$p_{\text{el}} = \frac{q^2}{k} \cdot E = \alpha \cdot E \quad \Rightarrow \quad k = \frac{q^2}{\alpha} .$$

Der Proportionalitätsfaktor α ist eine materialspezifische Konstante, die *Polarisierbarkeit* des Dielektrikums. Die potentielle Energie bzw. Polarisationsenergie $\widetilde{W}_{\text{pol}}$ eines einzelnen Dipols mit dem Dipolmoment p_{el} ist

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\text{pol}} &= \int_0^a -F \, dx = \int_0^a k x \, dx = \frac{1}{2} k x^2 \Big|_{x=0}^a \\ &= \frac{1}{2} k a^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\alpha} \frac{p_{\text{el}}^2}{q^2} = \frac{1}{2} \frac{p_{\text{el}}^2}{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 E^2}{\alpha} = \frac{1}{2} \alpha E \cdot E \end{aligned}$$

$$\widetilde{W}_{\text{pol}} = \frac{1}{2} p_{\text{el}} \cdot E .$$

Unter Verwendung von (1.9) finden wir für den Betrag der Polarisation \vec{P} :

$$\begin{aligned} P &= \frac{N \cdot p_{\text{el}}}{V} = n \cdot p_{\text{el}} = \underbrace{n \cdot \alpha}_{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)} \cdot E \\ &= \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \cdot E . \end{aligned}$$

Die Polarisationsenergie aller N Dipole des Dielektrikums ist schließlich

$$\begin{aligned} W_{\text{pol}} &= N \cdot \widetilde{W}_{\text{pol}} = \frac{1}{2} \underbrace{N \cdot p_{\text{el}}}_{\vec{P} \cdot V} \cdot E \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\vec{P} \cdot V}_{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \cdot E \cdot V} \cdot E , \\ W_{\text{pol}} &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2 \cdot V . \quad \square \end{aligned}$$

Wir stellen fest:

Im Fall $U = \text{const}$ ist die Gesamtenergie des Kondensators die Summe aus der elektrischen Feldenergie W_{elD} mit Dielektrikum und aus der Polarisationsenergie W_{pol} , die im Dielektrikum steckt:

$$W_{\text{ges}} = W_{\text{elD}} + W_{\text{pol}} , \quad U = \text{const} .$$

Isolierter Plattenkondensator mit konstanter freier Ladung Q

Für das abgeschlossene System des isolierten und mit der (freien) Ladung Q besetzten Plattenkondensators gilt

$$\begin{aligned} Q &= \text{const} \quad \Rightarrow \\ D &= \varepsilon_0 \cdot E_0 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r E = \text{const} , \\ E &= \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot E_0 = E_{\text{D}} \quad \text{für} \quad \varepsilon_r > 1 . \end{aligned}$$

Die elektrische Feldenergie des isolierten „Vakuumkondensators“ beträgt damit

$$W_{\text{el}0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cdot V ,$$

$$W_{\text{el}0} = \frac{1}{2} D E_0 \cdot V .$$

Für die elektrische Feldenergie nach vollständiger Füllung des Kondensators mit einem Dielektrikum erhalten wir

$$W_{\text{elD}} = \frac{1}{2} D \frac{1}{\varepsilon_r} E_0 \cdot V = \frac{1}{2 \varepsilon_r} \varepsilon_0 E_0^2 \cdot V$$

$$W_{\text{elD}} = \frac{1}{2} D E \cdot V ,$$

$$W_{\text{elD}} = \frac{1}{2 \varepsilon_r} D E_0 \cdot V .$$

Wie zu erwarten war, nimmt die elektrische Feldenergie des isolierten Plattenkondensators bei vollständiger Füllung mit einem Dielektrikum um den Faktor $1/\varepsilon_r$ ab. Weil es sich hier um ein abgeschlossenes System handelt, kann die dabei resultierende Differenzenergie nur als Polarisationsenergie in das Dielektrikum übergegangen sein:

$$W_{\text{pol}} = W_{\text{el}0} - W_{\text{elD}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \varepsilon_0 E_0^2 \cdot V$$

$$= \frac{1}{2 \varepsilon_r} (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 E_0^2 \cdot V ,$$

$$W_{\text{pol}} = \frac{1}{2 \varepsilon_r} (\varepsilon_r - 1) D E_0 \cdot V .$$

Wir stellen fest:

Im Fall $Q = \text{const}$ verteilt sich die elektrische Feldenergie $W_{\text{el}0}$ des „Vakuum-Kondensators“ im Einklang mit dem Energiesatz auf die Polarisationsenergie W_{pol} des Dielektrikums und auf die durch das Dielektrikum reduzierte elektrische Feldenergie W_{elD} , sodass

$$W_{\text{el}0} = W_{\text{elD}} + W_{\text{pol}} , \quad Q = \text{const} .$$

1.6 Die Kraft des Plattenkondensators auf ein Dielektrikum

Wir betrachten einen Plattenkondensator mit den folgenden Abmessungen:

- L Länge der Platten in x -Richtung,
- b Breite der Platten in y -Richtung,
- d Abstand zwischen den Platten und Dicke des Dielektrikums,
- x Länge der Strecke, die das Dielektrikum in x -Richtung in den Plattenzwischenraum hineinreicht,
- $L - x$ Länge der Strecke mit einem Vakuum zwischen den Platten.

Die am Kondensator anliegende Spannung sei $U = \text{const}$. Gemäß (1.7) ist dann die Gesamtladung auf den Kondensatorplatten

$$Q = \sigma_{\text{frei}} \cdot A = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \frac{U}{d} \cdot bx + \varepsilon_0 \frac{U}{d} \cdot b(L - x)$$

und die Kapazität des Kondensators ist damit

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 b}{d} (\varepsilon_r x + L - x) = C(x) .$$

Aus $\vec{F} = -\nabla W_{\text{pot}}$ bzw. $F_x = -\frac{\partial}{\partial x} W_{\text{pot}}(\vec{r})$ folgt mit

$$W_{\text{pot}} = W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

schließlich

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} \right] = -\frac{Q^2}{2} \left(-\frac{1}{C^2} \right) \cdot \frac{\partial C(x)}{\partial x} ,$$

$$F_x = +\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \cdot \frac{\partial C(x)}{\partial x} .$$

Wir ersetzen C in Q^2/C^2 durch Q/U , sodass

$$F_x = \frac{1}{2} U^2 \cdot \frac{\partial C(x)}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2} U^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\varepsilon_0 b}{d} (\varepsilon_r x + L - x) \right] ,$$

$$F_x = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 b}{d} \cdot U^2 (\varepsilon_r - 1) , \quad U = \text{const} .$$

F_x ist die Kraft, mit der das Dielektrikum in den aufgeladenen Plattenkondensator bei konstanter Spannung U hineingezogen wird.

1.7 Bilanzierung der Kondensatorenergie

1.7.1 Isolierter Kondensator mit $Q_{\text{frei}} = \text{const}$ (abgeschlossenes System)

Im Verlauf des Prozesses des Hineinbringens des Dielektrikums in den isolierten Plattenkondensator nimmt dessen elektrische Feldenergie um $W_{\text{el}0} - W_{\text{elD}}$ ab. Wegen der Energieerhaltung im abgeschlossenen System des isolierten Kondensators muss diese Differenzenergie in das Dielektrikum übergehen in Form der Polarisationsenergie W_{pol} bzw. als kinetische Energie. Ursache dieser kinetischen Energie ist die Kraft, mit der das Dielektrikum in den Kondensator gezogen wird, bis es schließlich den Kondensator vollständig ausfüllt.

Für den isolierten Kondensator mit $Q_{\text{frei}} = Q = \text{const}$ gilt folglich

$$W_{\text{ges}} = W_{\text{el}0} = W_{\text{elD}} + W_{\text{pol}} .$$

1.7.2 Kondensator mit $U = const$ (offenes System)

Wenn ein Dielektrikum den Raum zwischen den Kondensatorplatten vollständig ausfüllt, ist die freie Ladung auf den Kondensatorplatten bei konstant gehaltener Spannung, d. h. bei $U = const$

$$Q_D = \varepsilon_r \cdot Q_0$$

und die Ladungsdifferenz zwischen Q_D und Q_0 ist

$$\Delta Q = Q_D - Q_0 = \varepsilon_r \cdot Q_0 - Q_0 = (\varepsilon_r - 1) Q_0 .$$

Bei der Nachladung des Kondensators von Q_0 auf Q_D gegen die konstant gehaltene Spannung U während des Hineinbringens des Dielektrikums wird die Energie

$$\begin{aligned} W_{\text{Akku}} &= \Delta Q \cdot U = (\varepsilon_r - 1) \cdot Q_0 \cdot U \\ &= (\varepsilon_r - 1) \cdot C_0 U \cdot U , \end{aligned}$$

$$W_{\text{Akku}} = (\varepsilon_r - 1) C_0 U^2 , \quad U = const$$

von der Spannungsquelle, z. B. einem elektrochemischen Akkumulator, in den Kondensator übertragen. Der Vergleich mit (1.11) zeigt, dass die Energie für diesen Prozess der Nachladung exakt doppelt so groß ist wie der gesamte Energiezuwachs im Kondensator, der aus dem Vergleich resultiert zwischen dem Anfangszustand des Kondensators (ohne Dielektrikum) und seinem Endzustand (mit Dielektrikum). Folglich geht die eine Hälfte von W_{Akku} über in die Polarisationsenergie W_{pol} bzw. in kinetische Energie des Dielektrikums und die andere Hälfte $W_{\text{elD}} - W_{\text{el0}}$ dient der Konstanthaltung der elektrischen Feldstärke $E_0 = E_D = E = const$ im Kondensator beim Hineinbringen des Dielektrikums. Beim Hineinbringen des Dielektrikums wird nämlich die Kapazität des Kondensators größer, sodass dann ohne Nachladung, d. h. beim isolierten Kondensator, die elektrische Feldstärke und damit auch die elektrische Feldenergie wegen $Q = C \cdot U = C \cdot Ed$ absinken würde. Die Ursache der kinetischen Energie ist die im Abschnitt 1.6 für $U = const$ hergeleitete Kraft F_x , mit der das Dielektrikum in den Kondensator gezogen wird, bis es schließlich im Kondensator ruht, ihn vollständig ausfüllt und die volle Polarisationsenergie W_{pol} besitzt.

Für den Kondensator mit $U = const$ gilt folglich

$$W_{\text{ges}} = W_{\text{el0}} + \underbrace{(W_{\text{elD}} - W_{\text{el0}})}_{W_{\text{Akku}}} + W_{\text{pol}} ,$$

sodass

$$\begin{aligned} W_{\text{ges}} &= W_{\text{el0}} + W_{\text{Akku}} , \\ W_{\text{ges}} &= W_{\text{elD}} + W_{\text{pol}} . \end{aligned}$$

Weiterhin hatten wir für W_{Akku} festgestellt, dass

$$W_{\text{elD}} - W_{\text{el0}} = W_{\text{pol}} .$$

1.8 Zusammenfassung und Anschluss an die Elektrodynamik

Mit dem folgenden Zitat fassen wir die sich aus dem Modell des Plattenkondensators ergebenden physikalisch-relevanten Gedanken kurz zusammen und deuten ihren Zusammenhang mit der Elektrodynamik an:

„Da auch im Plattenkondensator mit Vakuum als „Dielektrikum“, also mit $\varepsilon_r = 1$ ein E -Feld herrscht, gibt es also auch im leeren Raum eine Ladungsverschiebung, offenbar in diesem Fall von gar nicht vorhandenen, also fehlenden Ladungen.

Befindet sich in einem aufgeladenen Plattenkondensator ein Dielektrikum, wird durch Polarisation im Dielektrikum ein Gegenfeld erzeugt, das das von außen angelegte Feld schwächt. Das von außen angelegte Feld ist das D -Feld und wird von allen Ladungen auf den Kondensatorplatten erzeugt. Das geschwächte Feld im Inneren des Dielektrikum dagegen ist das E -Feld. Es gilt

$$D = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot E = \varepsilon_0 \cdot E + P .$$

D , E und P sind Vektoren, P ist die dielektrische Polarisation des Dielektrikum. Es existiert im Vakuum ein Strom; die Ladungen fehlen hingegen. Es handelt sich dabei um den sogenannten Verschiebestrom. Der Verschiebestrom schließt den Stromkreis im Bereich zwischen den Platten des Kondensators. Es gilt

Verschiebestrom = zeitliche Ableitung des D -Feldes mal Querschnittsfläche bzw.

$$I_v = \iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A} .$$

Der Verschiebestrom tritt in den Maxwellgleichungen (Durchflutungssatz) gleichberechtigt mit den Leiterströmen auf. Er erzeugt somit auch ein H -Feld entsprechend

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{ext}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} .$$

Die wesentliche Eigenschaft des Verschiebestroms besteht darin, dass er auch auftreten kann, wenn sich gar keine Ladungen mehr in der Nähe befinden. Wenn man elektromagnetische Wellen mit einer Antenne abstrahlt, so befinden sich in der Antenne zwar noch Ladungen, doch nachdem die Welle sich von der Antenne gelöst hat und sich von ihr wegbewegt, spielen diese Ladungen für das weitere Geschehen keine Rolle mehr. In der Welle passiert folgendes:

- 1) B -Änderungen erzeugen E -Felder (Induktionsgesetz),
- 2) E -Felder gehen mit D -Feldern einher (ε_r),
- 3) D -Änderungen erzeugen H -Felder (Durchflutungsgesetz),
- 4) H -Felder gehen mit B -Feldern einher (μ_r),
- 5) weiter mit 1.

Der Unterschied zwischen B - und H -Feldern ist ganz ähnlich wie zwischen E - und D -Feldern. B -Felder berücksichtigen alle Ströme, also auch die inneratomaren Ströme, H -Felder enthalten nur freie Ströme.

Für elektrotechnische Überlegungen ist es wichtig zu wissen, welche elektrischen Größen zu welchen magnetischen Größen gehören. Beim Transformator mit nichtlinearem

Kern macht man sich beispielsweise vieles einfacher, wenn man von Anfang an berücksichtigt:

U gehört zur Flußdichte (B -Feld), I gehört zur Feldstärke (H -Feld).

Die Größen Induktivität L bzw. Gegeninduktivität M stammen aus Überlegungen, bei denen man die Materialgleichungen ($B = \mu H$ u. ä.) schon mit eingerechnet hat.“⁸

⁸Mit kleinen Veränderungen zitiert aus: www.mikrocontroller.net/topic/169050
Autoren: Michael Lenz, Kai Klaas.

2 Drehmoment und magnetisches Moment einer stromdurchflossenen Leiterschleife

Es ist Konvention, hinsichtlich der Richtungsbeziehungen der vektoriellen Größen in der Elektrodynamik vom Verhalten der *positiven* elektrischen Ladung auszugehen. So gilt z. B. im Fall der magnetischen Kraft \vec{F}_B die Rechte-Hand-Regel nur für die Bewegung positiver Ladungen q mit der Driftgeschwindigkeit \vec{v} im \vec{B} -Feld gemäß $\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. In metallischen elektrischen Leitern wird der elektrische Strom mit der Driftgeschwindigkeit \vec{v} jedoch von den (freien) Leitungselektronen mit der negativen Ladung $-q$ gebildet, sodass sich dann wegen $\vec{F}_B = -q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ die Richtung der magnetischen Kraft \vec{F}_B umkehrt.¹ Um Verwirrung zu vermeiden und im Einklang mit den gängigen Lehrbüchern werden wir in den folgenden Herleitungen nur elektrische Ströme *positiver* Ladungsträger betrachten.

Eine *Punktladung* q bewege sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} im Magnetfeld \vec{B} bzw. befinde sich im elektrischen Feld \vec{E} . Aus der kinetischen bzw. magnetischen Kraft \vec{F}_B und der elektrostatischen Kraft \vec{F}_E sowie den zugehörigen Drehmomenten \vec{D} ergeben sich mit der Punktladung q das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ und das elektrische Dipolmoment \vec{p}_E wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= q \cdot \vec{v} \times \vec{B} & \vec{F}_E &= q \cdot \vec{E} \\ \vec{D} &= \vec{r} \times \vec{F} & \vec{D} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times (q\vec{v} \times \vec{B}) & &= \vec{r} \times q\vec{E} \\ &= \underbrace{(q\vec{r} \times \vec{v})}_{\vec{\mu}} \times \vec{B} & &= q\vec{r} \times \vec{E} \\ \vec{D} &= \vec{\mu} \times \vec{B} & \vec{D} &= \vec{p}_E \times \vec{E} \\ \vec{\mu} &= q\vec{r} \times \vec{v} & \vec{p}_E &= q\vec{r} \end{aligned}$$

Allgemein ist $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$. Wie wir im Folgenden zeigen werden, gilt $\vec{D} = (q\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{B}$ aber für den speziellen Fall, dass q einen ebenen Stromkreis, z. B. einen Kreisstrom, mit dem Flächenvektor \vec{A} bildet, der sich in einem homogenen \vec{B} -Feld befindet. Vereinfachend kann man nämlich in diesem Fall das orthogonale Koordinatensystem so legen, dass \vec{A} und \vec{B} in der von zwei Koordinatenachsen aufgespannten Ebene liegen und gleichzeitig die Drehachse für \vec{D} mit der dritten Koordinatenachse zusammenfällt. An einem einfachen Beispiel veranschaulichen wir jetzt das Drehmoment und das magnetische Dipolmoment von stromdurchflossenen Leiterschleifen:²

¹Für negative Ladungsträger könnte man eine „Linke-Hand-Regel“ einführen. Andererseits ist aber ein Strom negativer Ladungsträger mit der Driftgeschwindigkeit \vec{v} äquivalent zu einem (virtuellen) Strom positiver Ladungsträger mit der Driftgeschwindigkeit $-\vec{v}$.

²Vergleiche: *Gerthsen Physik*, Springer-Lehrbuch, 20. Auflage, 1999, Abschnitt 7.1.2 *Lorentz-Kraft und Magnetfeld* sowie Abschnitt 7.1.3 *Kräfte auf Ströme im Magnetfeld*, S.354–S.356 und Demtröder, *Experimentalphysik 2, Elektrizität und Optik*, 3. Auflage, Springer 2004, Abschnitt 3.5.1 *Magnetische Dipole*, S.105–S.106.

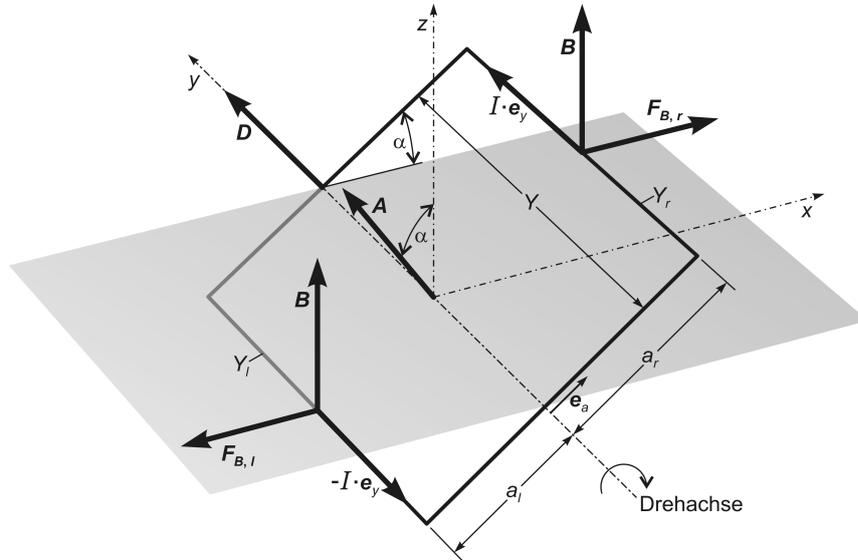


Abb. 2.1 Eine vom elektrischen Strom der Stärke I durchflossene rechteckige Leiterschleife befindet sich derart in einem homogenen \vec{B} -Feld, dass \vec{B} stets senkrecht auf den Leiterstücken Y_l und Y_r der Länge Y steht. Diese Leiterstücke verlaufen parallel zur Drehachse. Folglich bilden die Driftgeschwindigkeit \vec{v} der Ladungsträger entsprechend $-I \cdot \vec{e}_y$ bzw. $I \cdot \vec{e}_y$, der Feldvektor \vec{B} und die magnetischen Kräfte $\vec{F}_{B,l}$ bzw. $\vec{F}_{B,r} = -\vec{F}_{B,l}$ jeweils ein rechtshändiges und rechtwinkliges Dreiein. Zur leichteren Orientierung wurde die (x, y) -Ebene des orthogonalen (x, y, z) -Koordinatensystems eingezeichnet. Die Drehachse der Rechteckschleife fällt mit der y -Achse zusammen und das homogene \vec{B} -Feld zeigt in die Richtung der z -Achse.

Berechnen wir also das Drehmoment, das ein homogenes \vec{B} -Feld auf eine stromdurchflossene Rechteckschleife ausübt (s. Abb. 2.1). Die Drehachse soll parallel zu den Seiten Y_l und Y_r der Länge Y durch das Rechteck verlaufen. Zur Vereinfachung positionieren wir die Rechteckschleife so, dass ihre Drehachse mit der y -Achse des rechtwinkligen x, y, z -Koordinatensystems zusammenfällt und dass \vec{B} in die Richtung der z -Achse zeigt, also stets senkrecht auf den Leiterstücken Y_l und Y_r steht. Die in den senkrecht zur Drehachse verlaufenden Leiterstücken entstehenden magnetischen Kräfte können nicht zum Drehmoment beitragen, weil sie stets parallel zur Drehachse gerichtet sind. Unser gesuchtes Drehmoment \vec{D} bezüglich der Drehachse der Rechteckschleife resultiert also allein aus den in den Leiterstücken Y_l und Y_r entstehenden magnetischen Kräften $\vec{F}_{B,l}$ und $\vec{F}_{B,r}$ mit den zugehörigen Hebelarmen $a_l \cdot (-\vec{e}_a) = -a_l \vec{e}_a$ und $a_r \vec{e}_a$. Hierbei ist \vec{e}_a der Einheitsvektor, der die Richtung der Leiterstücke senkrecht zur Drehachse hat. Wir setzen $a_l + a_r = a$, sodass die Rechteckschleife den Flächenvektor

$$\vec{A} = a \vec{e}_a \times Y \vec{e}_y = a \vec{e}_a \times \vec{Y} = a \cdot Y \cdot \vec{n}^0$$

und den Flächeninhalt $A = a \cdot Y$ hat. Mit der Ladungsträgerdichte (Anzahldichte) n , der Ladungsträgergeschwindigkeit $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_y$ und dem Leitungsquerschnitt S erhalten wir die Stromdichte $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} = qn \cdot \vec{v}$ und daraus die Stromstärke

$$\vec{j} \cdot S = \underbrace{qn \cdot S \cdot v}_{I} \cdot \vec{e}_y = I \cdot \vec{e}_y.$$

Im Leiterstück Y_r der Länge Y befinden sich $n \cdot Y \cdot S$ Ladungsträger mit der Ladung q , die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_r = v \cdot \vec{e}_y$ bewegen. Auf jeden einzelnen dieser

Ladungsträger wirkt das \vec{B} -Feld durch die magnetische Kraft

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} ,$$

sodass insgesamt die magnetische Kraft

$$\begin{aligned} \vec{F}_{B,r} &= nYS \cdot q\vec{v}_r \times \vec{B} \\ &= qnSv \cdot Y \cdot \vec{e}_y \times \vec{B} \\ \vec{F}_{B,r} &= I \cdot \vec{Y} \times \vec{B} \end{aligned}$$

auf das Leiterstück Y_r wirkt. Im gegenüberliegenden Leiterstück Y_l der Länge Y bewegen sich die Ladungsträger mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_l = -v \cdot \vec{e}_y$, sodass wir dort in analoger Weise insgesamt die Kraft

$$\vec{F}_{B,l} = -I \cdot \vec{Y} \times \vec{B} = -\vec{F}_{B,r}$$

erhalten. Dieses Kräftepaar liefert das Drehmoment

$$\begin{aligned} \vec{D} &= -a_l \vec{e}_a \times \vec{F}_{B,l} + a_r \vec{e}_a \times \vec{F}_{B,r} \\ &= -a_l \vec{e}_a \times (-I \cdot \vec{Y} \times \vec{B}) + a_r \vec{e}_a \times (I \cdot \vec{Y} \times \vec{B}) \\ &= a_l \vec{e}_a \times (I \cdot \vec{Y} \times \vec{B}) + a_r \vec{e}_a \times (I \cdot \vec{Y} \times \vec{B}) \\ \vec{D} &= I \cdot a \vec{e}_a \times (\vec{Y} \times \vec{B}) . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Weil

$$Y \vec{e}_y = \vec{Y} \perp \vec{B} = B \vec{e}_z$$

gilt, zeigt $\vec{F}_{B,r} = I \cdot \vec{Y} \times \vec{B} = F_{B,r} \cdot \vec{e}_x$ in die Richtung der x -Achse, sodass

$$\vec{F}_{B,r} = IY \cdot B \cdot \vec{e}_x .$$

Die Vektoren $a \vec{e}_a$ und \vec{A} liegen stets in der (z, x) -Ebene. Deshalb zeigt das Drehmoment \vec{D} in die Richtung der y -Achse bzw. des Einheitsvektors \vec{e}_y . Mit dem Winkel

$$\alpha = \sphericalangle(a \vec{e}_a, F_{B,r} \vec{e}_x) = \sphericalangle(\vec{e}_a, \vec{e}_x) = \sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}) = \sphericalangle(\vec{A}, B \vec{e}_z)$$

dürfen wir für (2.1) schreiben:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= a \vec{e}_a \times \vec{F}_{B,r} = a \vec{e}_a \times IY \cdot B \cdot \vec{e}_x \\ &= I \cdot \underbrace{aY}_{A} \cdot B \cdot \vec{e}_a \times \vec{e}_x \\ &= I \cdot A \cdot B \cdot \sin \sphericalangle(\vec{e}_a, \vec{e}_x) \\ &= I \cdot A \cdot B \cdot \sin \sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{D} = I \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B} = IA \cdot \vec{n}^0 \times \vec{B}} ,$$

$$D = IA \cdot B \cdot \sin \sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}) = \mu \cdot B \cdot \sin \sphericalangle(\vec{A}, \vec{B}) .$$

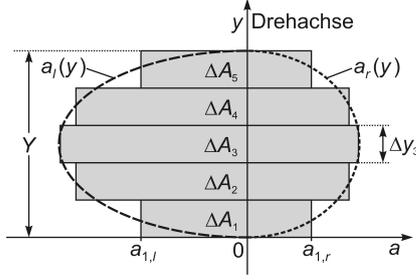


Abb. 2.2 Aufteilung einer unsymmetrisch-ovalen Leiterschleife in fünf, senkrecht zur Dreh- bzw. y -Achse ausgerichtete kleine Rechtecke mit den Flächeninhalten ΔA_1 bis ΔA_5 .

Wir stellen fest, dass das magnetische Dipolmoment einer stromdurchflossenen Leiterschleife (hier einer Rechteckschleife) mit der eingeschlossenen Fläche $\vec{A} = A \cdot \vec{n}^0$

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A} \quad \Rightarrow \quad |\vec{\mu}| = \mu = I \cdot A$$

ist. Dies gilt unabhängig von der Form der Flächenbegrenzung durch die Leiterschleife (s. Abb. 2.2). Wir können nämlich jede Fläche in kleine Rechteckstreifen $\Delta \vec{A}_i$ senkrecht zur Drehachse aufteilen, die durch Summation

$$\sum_i I \cdot \Delta \vec{A}_i \times \vec{B} \approx I \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \vec{D} \quad (2.2)$$

ergeben. Für den Übergang zum Integral stellen wir uns in Anlehnung an die Abbildung 2.1 vor, dass die Leiterschleife in der Ebene liegt, die von der a -Achse und der senkrecht dazu verlaufenden y -Achse aufgespannt wird. Die Drehachse der Leiterschleife falle mit der y -Achse zusammen, laufe also senkrecht durch $a = 0$. Aus (2.2) erhalten wir dann das Integral für das Drehmoment dieser stromdurchflossenen Leiterschleife wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{D} &\approx \sum_i I \cdot \Delta \vec{A}_i \times \vec{B} = I \cdot \vec{n}^0 \times \vec{B} \cdot \sum_i \Delta A_i \quad \Rightarrow \\ \vec{D} &= I \cdot \vec{n}^0 \times \vec{B} \cdot \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i \Delta A_i \\ &= I \cdot \vec{n}^0 \times \vec{B} \cdot \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i \Delta y_i \cdot \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_j \Delta a_{i,j} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\vec{D} = I \cdot \vec{n}^0 \times \vec{B} \cdot \int_{y=0}^Y dy \int_{a_l(y)}^{a_r(y)} da$$

Dabei haben wir die Integrationsgrenzen so gewählt und bezeichnet, dass sich der Flächeninhalt der Rechteckschleife von Abbildung 2.1 aus dem Flächenintegral sofort mit $[a_r(y) - a_l(y)] \cdot Y = (a_r + a_l) \cdot Y = a \cdot Y = A$ ergibt. $a_l(y) = -a_l$ ist dabei die linke, im negativen Bereich liegende Begrenzung und $a_r(y) = a_r$ ist die rechte Begrenzung der Rechteckschleife. Der „Durchmesser“ der Rechteckschleife in y -Richtung beträgt Y , wobei wir die untere Begrenzung auf die a -Achse gelegt haben.

3 Zusammenhang zwischen magnetischem Dipolmoment und Drehimpuls eines Kreisstroms

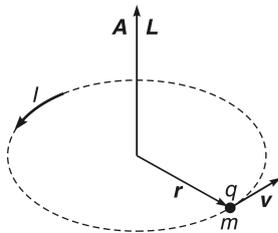


Abb. 3.1 Wenn sich eine Menge von Ladungsträgern mit der Gesamtladung q und der Gesamtmasse m auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt, erzeugt sie dabei den elektrischen Kreisstrom der Stärke I . Gleiches gilt aber auch für eine Punktladung q mit der Masse m auf dieser Kreisbahn. \vec{L} ist der resultierende Drehimpuls der Ladungsträger und \vec{A} der Flächenvektor des Flächenstücks, das vom Kreisstrom eingeschlossen wird.

Berechnen wir zunächst den Drehimpuls und dann das magnetische Dipolmoment für einen elektrischen Strom auf einer Kreisbahn (Kreisstrom) mit dem Radius $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$. Dabei nehmen wir an, dass sich die Ladungsträger gleichförmig mit der Bahngeschwindigkeit $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_\varphi$ bewegen, also eine gleichförmige Kreisbewegung ausführen. Die Gesamtladung der Ladungsträger sei q und ihre Gesamtmasse sei m . Für einen Umlauf der Länge $2\pi r$ benötigen die Ladungsträger die Zeit T , sodass ihre Bahngeschwindigkeit den Betrag $v = 2\pi r/T$ besitzt. Dieser entspricht einer Umlauffrequenz von $f = 1/T = v/(2\pi r)$ und der Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f = v/r .$$

Damit erhalten wir die Stromstärke

$$I = \frac{q}{T} = q \frac{v}{2\pi r} .$$

$\vec{A} = A \cdot \vec{n}^0$ sei der Flächenvektor der Kreisfläche und stehe senkrecht auf ihr. In die gleiche Richtung wie der Normaleneinheitsvektor \vec{n}^0 zeigt auch der Kreisfrequenzvektor $\vec{\omega}$. Der Gesamtdrehimpuls aller Ladungsträger ist

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) . \quad (3.1)$$

Wegen

$$\vec{n}^0 \uparrow\uparrow \vec{\omega}$$

und wegen

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\omega} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r}, \quad \vec{L} \parallel \vec{\omega} \quad (3.2)$$

vereinfachen sich unsere Betrachtungen und wir erhalten schließlich für das magnetische Dipolmoment

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= I \cdot \vec{A} = q \frac{v}{2\pi r} \cdot \vec{A} \\ &= q \frac{v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 \cdot \vec{n}^0 = \frac{1}{2} qvr \cdot \vec{n}^0 \\ &= q \frac{\vec{\omega}r}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} q \cdot r^2 \vec{\omega} . \end{aligned}$$

Aus (3.1) und (3.2) folgt für den Drehimpuls

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad r^2\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{m} .$$

Dies liefert uns den Zusammenhang zwischen dem magnetischen Dipolmoment und dem Drehimpuls eines Kreisstroms aus Ladungsträgern der Gesamtmasse m :

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} qvr \cdot \vec{n}^0 = \frac{q}{2m} \vec{L} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{L} = rmv \cdot \vec{n}^0 .$$

Für ein einzelnes Elektron mit der Ladung $q = -e$ und mit der Masse m_e auf einer Kreisbahn gilt damit

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} .$$

Wir sehen, dass das magnetische Dipolmoment im Fall negativer Ladungen entgegengesetzt zum Drehimpuls gerichtet ist.

4 Taylor-Entwicklung eines skalaren Feldes

Siehe auch:

Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3, Elektrodynamik*, 7. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Abschnitt 1.2 *Taylor-Entwicklung*, Seite 8 bis Seite 13,

Siegfried Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, 8. Auflage, Teubner-Verlag, Stuttgart, Leipzig, 2000, Abschnitt 3.3.5. *Taylorentwicklung für Felder*, Seite 113 bis Seite 116.

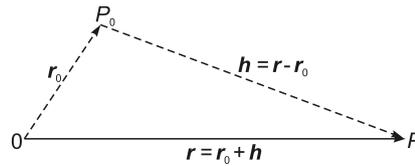


Abb. 4.1 Das skalare Feld Φ wird entwickelt um den Punkt P_0 , d. h. an der Stelle \vec{r}_0 , für den Aufpunkt P , d. h. für den Ort $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{h}$.

In Analogie zur Taylor-Entwicklung

$$f(x) = f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \Big|_{x_0} \cdot h^n, \quad h = x - x_0$$

an der Stelle x_0 , also für $h \rightarrow 0$, entwickeln wir die skalare Feldfunktion

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_0 + \vec{h}) = \Phi(x_{10} + h_1, x_{20} + h_2, x_{30} + h_3)$$

gemäß Abbildung 4.1 an der Stelle \vec{r}_0 mit Hilfe eines Tricks, indem wir

$$\tilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}(\vec{r}_0 + \vec{h} \cdot t) = \tilde{\Phi}(x_{10} + h_1 t, x_{20} + h_2 t, x_{30} + h_3 t)$$

definieren, sodass

$$\tilde{\Phi}(t=1) \equiv \Phi(\vec{r}_0 + \vec{h}) = \Phi(\vec{r}), \quad \tilde{\Phi}(t=0) = \tilde{\Phi}(0) \equiv \Phi(\vec{r}_0). \quad (4.1)$$

Die Entwicklung von $\tilde{\Phi}(t)$ an der Stelle $t=0$ ist dann

$$\tilde{\Phi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{\Phi}^{(n)} \Big|_{t=0} \cdot t^n.$$

Darin enthalten sind:¹

$$\boxed{\tilde{\Phi}^{(0)}(t) \Big|_{t=0} = \tilde{\Phi}(0) = \Phi(\vec{r}_0)},$$

¹Wegen $\partial x_{i0} = \partial x_i \Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$ dürfen wir schreiben:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(\vec{r}_0 + \vec{h}t)}{\partial (x_{i0} + h_i t)} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \tilde{\Phi}(\vec{r}_0)}{\partial x_{i0}} = \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial x_i} \Big|_{\vec{r}_0}.$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}^{(1)}(t)\Big|_{t=0} &= \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}(\vec{r}_0 + \vec{h}t)}{\partial(x_{10} + h_1t)} \frac{d}{dt}(x_{10} + h_1t) \right]_{t=0} \\
&+ \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}(\vec{r}_0 + \vec{h}t)}{\partial(x_{20} + h_2t)} \frac{d}{dt}(x_{20} + h_2t) \right]_{t=0} \\
&+ \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}(\vec{r}_0 + \vec{h}t)}{\partial(x_{30} + h_3t)} \frac{d}{dt}(x_{30} + h_3t) \right]_{t=0} \\
&= \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial x_1} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_1 + \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial x_2} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_2 + \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial x_3} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_3 ,
\end{aligned}$$

$$\boxed{\tilde{\Phi}^{(1)}(t)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial x_i} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_i} ,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}^{(2)}(t)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}(\vec{r}_0 + \vec{h}t)}{\partial(x_{10} + h_1t)} \frac{d}{dt}(x_{10} + h_1t) \right]_{t=0} \\
&+ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}(\vec{r}_0 + \vec{h}t)}{\partial(x_{20} + h_2t)} \frac{d}{dt}(x_{20} + h_2t) \right]_{t=0} \\
&+ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}(\vec{r}_0 + \vec{h}t)}{\partial(x_{30} + h_3t)} \frac{d}{dt}(x_{30} + h_3t) \right]_{t=0} \\
&= h_1 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r})}{\partial x_1 \partial x_1} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_1 + h_1 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r})}{\partial x_1 \partial x_2} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_2 + h_1 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r})}{\partial x_1 \partial x_3} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_3 \\
&+ h_2 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r})}{\partial x_2 \partial x_1} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_1 + h_2 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r})}{\partial x_2 \partial x_2} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_2 + h_2 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r})}{\partial x_2 \partial x_3} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_3 \\
&+ h_3 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r})}{\partial x_3 \partial x_1} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_1 + h_3 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r})}{\partial x_3 \partial x_2} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_2 + h_3 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r})}{\partial x_3 \partial x_3} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_3
\end{aligned}$$

$$\tilde{\Phi}^{(2)}(t)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r})}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\vec{r}_0} \cdot h_i h_j = \left(\sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0} ,$$

⋮

$$\boxed{\tilde{\Phi}^{(n)}(t)\Big|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0}} .$$

Folglich ist die Taylor-Entwicklung von $\tilde{\Phi}(t)$ an der Stelle $t = 0$

$$\tilde{\Phi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0} \cdot t^n . \tag{4.2}$$

Schließlich erhalten wir aus der Entwicklung (4.2) und unter Berücksichtigung von (4.1) für $t = 1$ die Taylor-Entwicklung der skalaren Feldfunktion $\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_0 + \vec{h})$ an der Stelle \vec{r}_0 wie folgt:

$$\tilde{\Phi}(t = 1) = \Phi(\vec{r}_0 + \vec{h}) = \Phi(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n \Phi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}_0}. \quad (4.3)$$

Schreibt man vereinfachend \vec{r} für \vec{r}_0 , erhält die Taylor-Entwicklung (4.3) schließlich die Form

$$\Phi(\vec{r} + \vec{h}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^3 h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n \Phi(\vec{r}).$$

Als Beispiel betrachten wir das Potential φ einer Punktladung q :

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{\alpha}{h} = \varphi(h), \quad \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}.$$

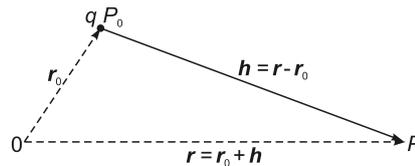


Abb. 4.2 Entwicklung des Coulomb-Potentialfeldes an der Stelle $\vec{r} = \vec{0}$ für den Aufpunkt P .

Konventionsgemäß und wie in Abbildung 4.2 dargestellt, ist q im Punkt $P_0 := \vec{r}_0$ lokalisiert, sodass der Aufpunkt (Messpunkt) $P := \vec{r}$ für das Potential den Abstand $h = |\vec{h}| = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ von q besitzt. Tatsächlich also ist φ direkt abhängig vom Betrag des Abstandsvektors $\vec{h} = \vec{r} - \vec{r}_0$ und nicht von \vec{r} . Die Entwicklung an der Stelle $P_0 := \vec{r}_0$ mit $\vec{h} = \vec{0} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0$ ist wegen

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_0|}$$

nicht definiert. Wir entwickeln deshalb nicht an der Stelle $\vec{h} = \vec{0}$ sondern betrachten \vec{r} statt \vec{h} als die unabhängige Variable und entwickeln an der Stelle $\vec{r} = \vec{0}$ bzw. $x_i = 0$. Die Rolle von \vec{h} in (4.3) wird folglich in diesem Fall übernommen von \vec{r} . Weiterhin verwenden wir die geläufige Notation $|\vec{r} - \vec{r}_0| = |\vec{r}_0| = r_0$.

Taylor-Entwicklung von $\varphi(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ bis zur zweiten Ordnung:

$n = 0$:

$$\Rightarrow \text{Glied 0. Ordnung: } \varphi(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} = \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} = \frac{\alpha}{|\vec{r}_0|} = \frac{\alpha}{r_0}.$$

$n = 1 :$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x_i} \right|_{\vec{r}=\vec{0}} &= \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right|_{\vec{r}=\vec{0}} \\ &= \alpha \left. \frac{\partial}{\partial x_i} [(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2]^{-\frac{1}{2}} \right|_{\vec{r}=\vec{0}} \\ &= \alpha \left(-\frac{1}{2} \right) \left. \frac{2(x_i - x_{i0})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right|_{\vec{r}=\vec{0}} = \alpha \frac{x_{i0}}{r_0^3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Glied 1. Ordnung: } \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x_i} \right|_{\vec{r}=\vec{0}} \cdot x_i = \alpha \sum_{i=1}^3 \frac{x_{i0}}{r_0^3} \cdot x_i = \alpha \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r_0^3} .$$

$n = 2 :$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{r}=\vec{0}} &= -\alpha \left. \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i - x_{i0}) \cdot [(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2]^{-\frac{3}{2}} \right|_{\vec{r}=\vec{0}} \\ &= -\alpha \left[\frac{\delta_{ij}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{3(x_i - x_{i0})(x_j - x_{j0})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^5} \right] \Big|_{\vec{r}=\vec{0}} \\ &= \alpha \left(\frac{3 x_{i0} x_{j0}}{r_0^5} - \frac{\delta_{ij}}{r_0^3} \right) \end{aligned}$$

\Rightarrow Glied 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left. \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{r}=\vec{0}} \cdot x_i x_j &= \alpha \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{3 x_{i0} x_{j0}}{r_0^5} - \frac{\delta_{ij}}{r_0^3} \right) \cdot x_i x_j \\ &= \alpha \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{3 x_{i0} x_{j0} \cdot x_i x_j - r_0^2 \delta_{ij} \cdot x_i x_j}{r_0^5} = \alpha \frac{1}{2} \cdot \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}_0)^2 - r^2 r_0^2}{r_0^5} . \end{aligned}$$

Die Taylor-Entwicklung des Potentialfeldes einer Punktladung ist somit

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n \varphi(\vec{r} = \vec{0}) \\ &= \alpha \left[\frac{1}{r_0} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r_0^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}_0)^2 - r^2 r_0^2}{r_0^5} + \dots \right] . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Wir haben in (4.4) $\varphi(\vec{r} = \vec{0})$ geschrieben, weil die Ableitungen von $\varphi(\vec{r})$ an der Stelle $\vec{r} = \vec{0}$ genommen werden sollen.

5 Dirac'sche delta-Funktion

Siehe auch:

Christian B. Lang und Norbert Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*, Spektrum, Heidelberg, Berlin, 1998, Abschnitt 13.4 *Die Diracsche Deltafunktion*, Seite 403 bis Seite 408,

Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3, Elektrodynamik*, 7. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Abschnitt 1.1 *Diracsche δ -Funktion*, Seite 3 bis Seite 8,

Torsten Fließbach, *Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik II*, 4. Auflage, Elsevier-Spektrum, München, 2005, Kapitel 3 *Distributionen*, Seite 21 bis Seite 24,

Gero Hillebrandt und Matthias Köhler, *Die Dirac'sche δ -Funktion*, 20. Oktober 2013, www.physik.uni-halle.de/~tpobx/deltafkt.pdf

5.1 Definition der δ -Funktion

Die Dirac'sche delta-Funktion (δ -Funktion) ist eine „uneigentliche“ Funktion, gehört zu den Distributionen und sollte deshalb korrekt als Dirac'sches δ -Funktional bezeichnet werden. Wie im physikalischen Sprachgebrauch üblich, werden wir sie aber dennoch kurz δ -Funktion nennen. Distribution bedeutet Verteilung. Schauen wir uns also zunächst eine kontinuierliche Verteilung an, die Gauß'sche Normalverteilung, auch Gauß'sche Glockenkurve genannt:

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(x) dx = 1, \quad \sigma > 0.$$

Der Parameter σ ist die Standardabweichung und bestimmt Breite und Höhe der Glockenkurve. Je größer σ ist, desto höher liegt das Maximum und desto steiler verläuft die Kurve. Der Parameter x_0 ist die Stelle des Maximums. Die Gauß'sche Normalverteilung nennt man im Fall $x_0 = 0$ und $\sigma = 1$ Standardnormalverteilung. Wie man sieht, ist die *Gauß'sche Normalverteilung* auf 1 normiert. deshalb kann man $g_\sigma(x)$ als *Wahrscheinlichkeitsdichte* interpretieren.

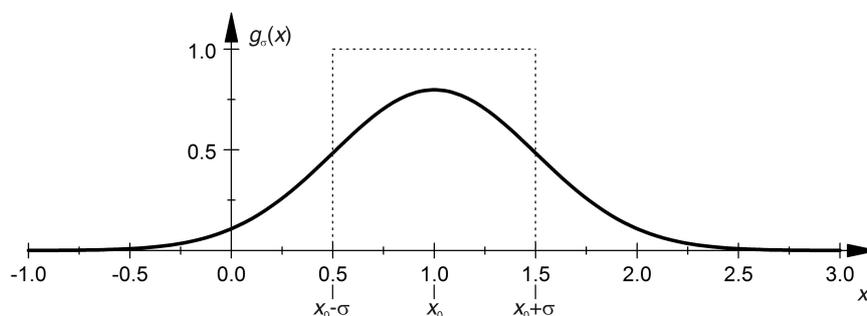


Abb. 5.1 Gauß'sche Normalverteilung $g_\sigma(x)$ für $\sigma = 0,5$ und $x_0 = 1$. Der Flächeninhalt des von den punktierten Linien und der x -Achse eingeschlossenen Quadrats ist gleich 1 und somit gleich dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen $g_\sigma(x)$ und der x -Achse.

Analog zur Gauß'schen Normalverteilung gelte für eine Verteilungsdichtefunktion $d_\sigma(x - x_0)$:

- Aus $y = x - x_0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = dx$ und mit $f(y) \equiv d_\sigma(x - x_0)$ resultiert

$$\int f(y) dy = \int d_\sigma(x - x_0) dx .$$

$d_\sigma(x - x_0)$ ist gegenüber $d_\sigma(x)$ um x_0 längs der x -Achse verschoben, und zwar bei $x_0 > 0$ nach rechts und bei $x_0 < 0$ nach links.

- $d_\sigma(x - x_0)$ sei stets positiv, also $d_\sigma(x - x_0) \stackrel{!}{>} 0$.
(Die Herleitung mit einer stets negativen Verteilungsdichtefunktion ist ebenfalls möglich.)
- $d_\sigma(x - x_0)$ sei eine gerade Funktion und symmetrisch zu x_0 .
- $d_\sigma(x - x_0)$ sei auf 1 normiert, d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\sigma(x - x_0) dx = 1 . \quad (5.1)$$

Dafür muss $d_\sigma(x - x_0)$ zu beiden Seiten von x_0 hinreichend schnell abfallen, also hinreichend schnell gegen Null gehen.

Eine solche Funktion ist beispielsweise auch die sehr einfache, in einem Bereich der Größe σ um $x = x_0$ lokalisierte, diskrete Verteilungsdichtefunktion (Rechteckfunktion)

$$d_\sigma(x - x_0) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} & \text{für } x_0 - \frac{\sigma}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\sigma}{2} , \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases} \quad (5.2)$$

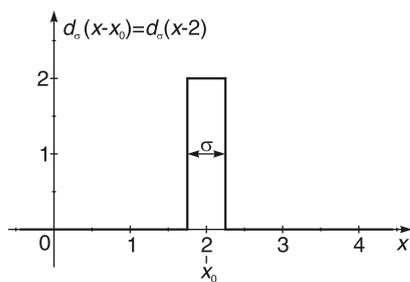


Abb. 5.2 Die Rechteckfunktion $d_\sigma(x - x_0)$ für $\sigma = 0,5$ und $x_0 = 2$. Der vom Rechteck eingeschlossene Flächeninhalt ist gleich 1.

Wie gefordert, ergibt diese Verteilungsdichtefunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\sigma(x) dx = \int_{x_0 - \frac{\sigma}{2}}^{x_0 + \frac{\sigma}{2}} \frac{1}{\sigma} dx = \frac{1}{\sigma} \cdot x \Big|_{x_0 - \frac{\sigma}{2}}^{x_0 + \frac{\sigma}{2}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \right) = 1 .$$

Aus der Verteilungsdichtefunktion $d_\sigma(x - x_0)$ erhalten wir die δ -Funktion durch Grenzwertbildung:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} d_\sigma(x - x_0) = \delta(x - x_0) .$$

Auch im Limes soll gelten:

$$\boxed{\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\sigma}(x - x_0) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \, dx = 1} . \quad (5.3)$$

Die δ -Funktion ist also u. a. dadurch definiert, dass sie unter dem Integral den Wert 1 liefert. Wie man sieht, ist dabei zuerst das Integral und danach der Grenzwert zu bilden.

Anschaulich wird die Verteilungsdichtefunktion $d_{\sigma}(x - x_0)$ bei der Grenzwertbildung für $\sigma \rightarrow 0$ immer schmaler und höher bzw. ihre Breite geht gegen Null und ihre Höhe gegen Unendlich, wobei der Flächeninhalt unter dem Graphen von $d_{\sigma}(x - x_0)$ stets gleich 1 ist, also erhalten bleibt. Das Ergebnis dieser Grenzwertbildung ist die δ -Funktion, eine Funktion mit verschwindender Breite, unendlicher Höhe und dem Flächeninhalt 1 unter ihrem Graphen. Mit anderen Worten, die δ -Funktion liefert nur einen Beitrag an der Stelle $x = x_0$ und ist sonst gleich Null:

$$\delta(x - x_0) \begin{cases} \rightarrow \infty, & x = x_0, \\ = 0, & x \neq x_0. \end{cases}$$

bzw.

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0) \, dx = \begin{cases} 1, & x_0 \in]x_1, x_2[, \\ 0, & x_0 \notin]x_1, x_2[. \end{cases}$$

Für $x_0 = 0$ erhält die δ -Funktion die einfache Form

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta(x - x_0) = \delta(x) .$$

5.2 Faltungsintegral mit der δ -Funktion

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \, d\tau \quad (5.4)$$

ist die Definition für die Faltung $(f * g)(t)$ der beiden absolut integrierbaren Funktionen $f(\tau)$ und $g(\tau)$ sowie des zugehörigen Faltungsintegrals. Die δ -Funktion ist gerade und symmetrisch zu x_0 . Deshalb gilt

$$\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x) ,$$

sodass wir analog zu (5.4) für die Faltung der δ -Funktion mit einer Funktion $f(x)$ folgendes schreiben können:

$$\begin{aligned} (f * \delta)(x_0) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x_0 - x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_0) \, dx \\ (f * \delta)(x_0) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \cdot f(x) \, dx . \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x)$ wird in diesem Zusammenhang auch als Testfunktion bezeichnet.

Bei der Grenzwertbildung für $\sigma \rightarrow 0$ in (5.3) wird der Bereich $\Delta x = x_2 - x_1 = (x_2 - x_0) - (x_1 - x_0)$, der zum Integral beiträgt, immer kleiner und verschwindet schließlich. Insofern sind hierbei die Schreibweisen $\sigma \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ und $x_{\pm} \rightarrow x_0$ gleichbedeutend. Diese Argumentation werden wir im Folgenden verwenden.

Wir zeigen jetzt, wie sich die Grenzwertbildung $\sigma \rightarrow 0$ auf die Faltung unserer als Beispiel verwendeten Verteilungsdichtefunktion (5.2) mit einer beliebigen absolut integrierbaren Testfunktion $f(x)$ auswirkt. *Dabei ist zu beachten, dass wir zuerst das Faltungsintegral und danach den Grenzwert bilden:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_{\sigma}(x - x_0) \cdot f(x) dx = \int_{x_0 - \frac{\sigma}{2}}^{x_0 + \frac{\sigma}{2}} \frac{1}{\sigma} \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sigma} \int_{x_0 - \frac{\sigma}{2}}^{x_0 + \frac{\sigma}{2}} f(x) dx . \quad (5.5)$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &= (x_2 - x_1) \cdot f(\bar{x}) = \\ \Delta F &= \Delta x \cdot f(\bar{x}) \\ \Leftrightarrow f(\bar{x}) &= \frac{\Delta F}{\Delta x} \end{aligned}$$

erhalten wir aus (5.5)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\sigma}(x - x_0) \cdot f(x) dx &= \frac{1}{\sigma} \cdot \left[\left(x_0 + \frac{\sigma}{2} \right) - \left(x_0 - \frac{\sigma}{2} \right) \right] \cdot f(\bar{x}) \\ &= \frac{1}{\sigma} \cdot \sigma \cdot f(\bar{x}) \\ &= \frac{\Delta F}{\Delta x} . \end{aligned}$$

Abschließend bilden wir den Grenzwert für $\sigma \rightarrow 0$ bzw. $\Delta x \rightarrow 0$ und $x_{\pm} \rightarrow x_0$:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\sigma}(x - x_0) \cdot f(x) dx = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ x_{\pm} \rightarrow x_0}} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_0} = f(x_0) . \quad (5.6)$$

Für (5.6) kann man in Analogie zu (5.3) mit der δ -Funktion abgekürzt und verallgemeinernd schreiben:

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\sigma}(x - x_0) \cdot f(x) dx = \\ \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot f(x) dx = f(x_0)} . \quad (5.7) \end{aligned}$$

Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot f(x_0) \, dx = f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \, dx = f(x_0) ,$$

sodass

$$\delta(x - x_0) \cdot f(x) = \delta(x - x_0) \cdot f(x_0) .$$

Wie man sieht, liefert das Faltungsintegral der δ -Funktion $\delta(x - x_0)$ mit einer absolut integrierbaren Funktion $f(x)$ den Funktionswert dieser Funktion an der Stelle x_0 , also $f(x_0)$. Diese Eigenschaft der δ -Funktion kann man im Umgang mit Punktgrößen wie z. B. der Punktladung nutzen.

5.3 Eigenschaften der δ -Funktion – Rechenregeln

- Die δ -Funktion ist symmetrisch zu x_0 und gerade:

$$\delta(x - x_0) = \delta[-(x - x_0)] = \delta(x_0 - x) .$$

- Verschiebung der δ -Funktion:

$$\delta(x - x_0) \tag{5.8}$$

ist gegenüber $\delta(x)$ um $|x_0|$ längs der x -Achse nach rechts verschoben.

$$\delta(x + x_0) \tag{5.9}$$

ist gegenüber $\delta(x)$ um $|x_0|$ längs der x -Achse nach links verschoben. Diese Verschiebung nach links ergibt sich, wenn wir in $\delta(x - x_0)$ ein $x_0 < 0$ einsetzen.

- Die δ -Funktion ist definitionsgemäß auf 1 normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \, dx = 1 .$$

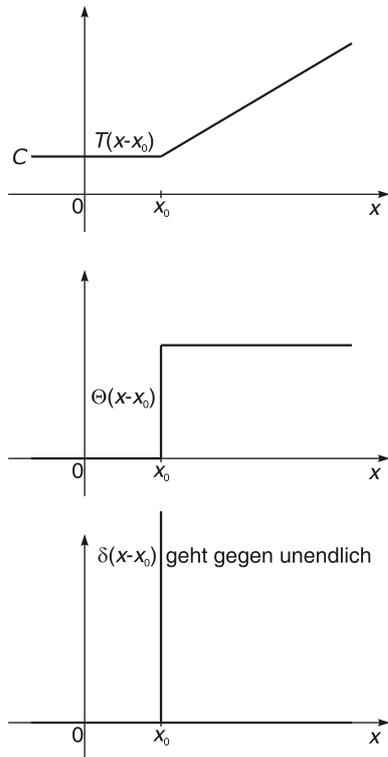


Abb. 5.3 Die Ableitung der oben dargestellten Funktion $T(x - x_0)$ ist die Θ -Funktion (mittig) und die Ableitung der Θ -Funktion ist die δ -Funktion (unten).

- Die δ -Funktion ist die Ableitung der Einheitssprungfunktion¹:
Um dies zu zeigen, gehen wir aus von der stetigen Funktion

$$T(x - x_0) = \begin{cases} C, & x \leq x_0, \\ x - x_0 + C, & x \geq x_0. \end{cases}$$

Wie wir in der Abbildung 5.3 erkennen können, ist die Ableitung der Funktion $T(x - x_0)$ nach x die Θ -Funktion

$$T'(x - x_0) = \Theta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ 1, & x > x_0 \end{cases}$$

und die Ableitung der Θ -Funktion nach x ist die δ -Funktion

$$T''(x - x_0) = \Theta'(x - x_0) = \delta(x - x_0).$$

Dass die Funktion $\delta(x - x_0)$ die Ableitung der Einheitssprungfunktion

$$\Theta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ 1, & x > x_0 \end{cases}$$

¹Die Einheitssprungfunktion wird auch als Stufenfunktion, Θ -Funktion oder Heaviside-Funktion bezeichnet.

ist, lässt sich auch folgendermaßen zeigen:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \Theta'(x - x_0) f(x) dx &= \\
 &\stackrel{\text{p.I.}}{=} \Theta'(x - x_0) \cdot f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x - x_0) f'(x) dx \\
 &= 1 \cdot f(\infty) - 0 \cdot f(-\infty) - \int_{x_0}^{\infty} f'(x) dx \\
 &= f(\infty) - f(\infty) + f(x_0) \\
 &= f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx \\
 &\Rightarrow \Theta'(x - x_0) = \delta(x - x_0) . \quad \square
 \end{aligned}$$

Die Θ -Funktion ist ungerade, die δ -Funktion ist gerade und folglich ist die Ableitung der δ -Funktion wieder eine ungerade Funktion gemäß

$$\delta'(x - x_0) = -\delta'(x_0 - x) .$$

- Deshalb verschwindet das Integral über die Ableitung der δ -Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - x_0) dx = 0 .$$

Dies lässt sich durch die Faltung von $\delta'(x - x_0)$ mit einer Testfunktion $f(x)$ zeigen. Dabei berücksichtigen wir in der partiellen Integration (p.I.), dass $\delta(x - x_0) = 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - x_0) \cdot f(x) dx \\
 &\stackrel{\text{p.I.}}{=} \underbrace{\delta(x - x_0) \cdot f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot f'(x) dx = -f'(x_0) .
 \end{aligned}$$

Als Testfunktion verwenden wir jetzt $f(x) \equiv 1 \Rightarrow f'(x) \equiv 0$ und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - x_0) \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0) = 0 . \quad \square$$

- Ist die δ -Funktion die Funktion eines Vektors, z. B. des Ortsvektors $\vec{r} = (x, y, z)$, so erhält sie die Form²

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0) \quad \Rightarrow$$

²Werden die Integrationsgrenzen nicht angegeben, so ist üblicherweise die Integration von $-\infty$ bis ∞ oder über den ganzen (unendlich ausgedehnten) Raum gemeint.

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3r = \underbrace{\int \delta(x - x_0) dx}_{=1} \cdot \underbrace{\int \delta(y - y_0) dy}_{=1} \cdot \underbrace{\int \delta(z - z_0) dz}_{=1} = 1 .$$

Allgemein kann man dafür schreiben

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_0) = \prod_i \delta(x_i - x_{i0}) \Rightarrow \prod_i \int \delta(x_i - x_{i0}) dx_i = 1 .$$

- Das auf 1 normierte Integral über die δ -Funktion ist dimensionslos. Deshalb besitzt die δ -Funktion die Maßeinheit des Kehrwerts der Größe, von der sie abhängt. Ist die δ -Funktion z. B. vom Ortsvektor abhängig, so gilt

$$\begin{aligned} [\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)] &= [\delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0)] \\ &= \frac{1}{\text{m}} \cdot \frac{1}{\text{m}} \cdot \frac{1}{\text{m}} = \frac{1}{\text{m}^3} = \left[\frac{1}{V} \right] . \end{aligned}$$

- Beschreibung von Punktgrößen mit Hilfe der δ -Funktion am Beispiel der Punktmasse:

$$\varrho(\vec{r}) = m \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

sei die Massendichte eines Partikels im Raumpunkt \vec{r}_0 .³ Das Integral über einen Raumbereich ΔV liefert dann die Punktmasse wie folgt:

$$\int_{\Delta V} \varrho(\vec{r}) d^3r = \int_{\Delta V} m \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3r = \begin{cases} m & \text{bei } \vec{r}_0 \text{ wenn } \vec{r}_0 \in \Delta V , \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

- Herleitung von

$$\boxed{\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)} :$$

Dies gilt nur für $x_0 = 0$. Wir machen eine Fallunterscheidung.

Für $a > 0$ verwenden wir die Substitution

$$ax = |a|x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{|a|}, \quad dx = \frac{1}{|a|} dy ,$$

die Integrationsgrenzen

$$x \rightarrow \pm \infty \Rightarrow y \rightarrow \pm \infty ,$$

³Man beachte, dass $m \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ tatsächlich die Maßeinheit (physikalische Dimension) $\text{g} \cdot \frac{1}{\text{m}^3} = \text{g m}^{-3}$ der Massendichte besitzt.

die Beziehung

$$f\left(\frac{y}{|a|}\right)\Big|_{y=0} = f(x)\Big|_{x=0} = f(0)$$

und bilden damit das entsprechende Faltungsintegral:

$$\begin{aligned} \int_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} \delta(ax) f(x) \, dx &= \int_{y \rightarrow -\infty}^{y \rightarrow +\infty} \delta(y) f\left(\frac{y}{|a|}\right) \cdot \frac{1}{|a|} \, dy \\ &= \frac{1}{|a|} \int \delta(y) f\left(\frac{y}{|a|}\right) \cdot dy \\ &= \frac{1}{|a|} f(0) = \frac{1}{|a|} \int \delta(x) f(x) \, dx \\ &= \int \frac{1}{|a|} \delta(x) f(x) \, dx \\ \Rightarrow \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x) . \end{aligned}$$

Für $a < 0$ verwenden wir die Substitution

$$ax = -|a|x = y \Leftrightarrow x = -\frac{y}{|a|}, \quad dx = -\frac{1}{|a|} dy ,$$

die Integrationsgrenzen

$$x \rightarrow \pm \infty \quad \Rightarrow \quad y \rightarrow \mp \infty ,$$

die Beziehung

$$f\left(-\frac{y}{|a|}\right)\Big|_{y=0} = f(x)\Big|_{x=0} = f(0)$$

und bilden damit das entsprechende Faltungsintegral:

$$\begin{aligned} \int_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} \delta(ax) f(x) \, dx &= \int_{y \rightarrow +\infty}^{y \rightarrow -\infty} \delta(y) f\left(-\frac{y}{|a|}\right) \cdot \left(-\frac{1}{|a|}\right) \, dy \\ &= -\frac{1}{|a|} \int_{y \rightarrow +\infty}^{y \rightarrow -\infty} \delta(y) f\left(-\frac{y}{|a|}\right) \cdot dy \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{y \rightarrow -\infty}^{y \rightarrow +\infty} \delta(y) f\left(-\frac{y}{|a|}\right) \cdot dy \\ &= \frac{1}{|a|} f(0) = \frac{1}{|a|} \int \delta(x) f(x) \, dx \\ &= \int \frac{1}{|a|} \delta(x) f(x) \, dx \\ \Rightarrow \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x) . \quad \square \end{aligned}$$

- Herleitung von

$$\boxed{\delta(x^2 - x_0^2) = \frac{\delta(x + x_0) + \delta(x - x_0)}{|2x_0|}} \quad (5.10)$$

Die Funktion $x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0) = y(x)$ hat die Nullstellen bei $x = |x_0|$ entsprechend $x_0 > 0$ und bei $x = -|x_0|$ entsprechend $x_0 < 0$. An diesen Nullstellen befinden sich aber auch die Peaks der δ -Funktion (5.15). Jeder dieser beiden Peaks bzw. jede dieser beiden δ -Funktionen liefert im Faltungsintegral mit einer Funktion $f(x)$ seinen eigenständigen Beitrag wie folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - x_0^2) \cdot f(x) \, dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 \delta(x^2 - x_0^2) \cdot f(x) \, dx}_{x_0 < 0} + \underbrace{\int_0^{\infty} \delta(x^2 - x_0^2) \cdot f(x) \, dx}_{x_0 > 0} . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Mit der Substitution

$$x^2 - x_0^2 = y(x) \Rightarrow x = \begin{cases} -\sqrt{y + x_0^2} & \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow x_0 < 0, \\ +\sqrt{y + x_0^2} & \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow x_0 > 0, \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x = \begin{cases} -2\sqrt{y + x_0^2} \Rightarrow dx = \frac{1}{-2\sqrt{y + x_0^2}} dy & \text{für } x_0 < 0, \\ +2\sqrt{y + x_0^2} \Rightarrow dx = \frac{1}{+2\sqrt{y + x_0^2}} dy & \text{für } x_0 > 0 \end{cases}$$

und den Grenzen

$$\begin{aligned} x \rightarrow -\infty & \Rightarrow y \rightarrow \infty, \\ x = 0 & \Rightarrow y = -x_0^2, \\ x \rightarrow +\infty & \Rightarrow y \rightarrow \infty, \\ -\infty < x < \infty & \Rightarrow -x_0^2 < y < \infty \end{aligned}$$

erhalten wir aus (5.11)

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - x_0^2) \cdot f(x) \, dx \\
&= \int_{-\infty}^{-x_0^2} \delta(y) \cdot f\left(-\sqrt{y+x_0^2}\right) \cdot \frac{1}{-2\sqrt{y+x_0^2}} \, dy \\
&\quad + \int_{-x_0^2}^{\infty} \delta(y) \cdot f\left(\sqrt{y+x_0^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+x_0^2}} \, dy \\
&= \int_{-x_0^2}^{\infty} \delta(y) \cdot f\left(-\sqrt{y+x_0^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+x_0^2}} \, dy \\
&\quad + \int_{-x_0^2}^{\infty} \delta(y) \cdot f\left(\sqrt{y+x_0^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+x_0^2}} \, dy .
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Weil der Integrationsbereich $-\infty < y \leq -x_0^2$ keinen Beitrag liefert, dürfen wir die untere Integrationsgrenze auf $-\infty$ herabsetzen. Außerdem verwenden wir in (5.12)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{y+x_0^2}} \cdot f\left(-\sqrt{y+x_0^2}\right) &= \tilde{\Phi}(y) \quad \text{für } x_0 < 0 , \\
\frac{1}{2\sqrt{y+x_0^2}} \cdot f\left(\sqrt{y+x_0^2}\right) &= \Phi(y) \quad \text{für } x_0 > 0 ,
\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - x_0^2) \cdot f(x) \, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \cdot \tilde{\Phi}(y) \, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \cdot \Phi(y) \, dy \\
&= \tilde{\Phi}(0) + \Phi(0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0^2}} \cdot f\left(-\sqrt{x_0^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x_0^2}} \cdot f\left(\sqrt{x_0^2}\right) \\
&= \frac{1}{|2x_0|} \cdot f(-|x_0|) + \frac{1}{|2x_0|} \cdot f(|x_0|) \\
&= \frac{1}{|2x_0|} \cdot \left\{ \underbrace{f(-|x_0|)}_{x_0 < 0} + \underbrace{f(|x_0|)}_{x_0 > 0} \right\} .
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Unter Berücksichtigung von (5.7), (5.8) und (5.9) gilt aber

$$x_0 < 0 : \quad f(-|x_0|) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x + x_0) \cdot f(x) \, dx ,$$

$$x_0 > 0 : \quad f(+|x_0|) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot f(x) \, dx .$$

Wenn wir dies in (5.13) einsetzen, resultiert schließlich

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - x_0^2) \cdot f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{|2x_0|} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x + x_0) \cdot f(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \cdot f(x) \, dx \right\} , \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - x_0^2) \cdot f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x + x_0) + \delta(x - x_0)}{|2x_0|} \cdot f(x) \, dx . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Der Vergleich der beiden Seiten von Gleichung (5.14) zeigt

$$\delta(x^2 - x_0^2) = \frac{\delta(x + x_0) + \delta(x - x_0)}{|2x_0|} \quad \text{mit} \quad |x_0| = |y'(x_0)| . \quad \square$$

- Herleitung der allgemeinen Formel⁴

$$\boxed{\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|}} : \quad (5.15)$$

x_n seien die Nullstellen n der Funktion $g(x)$, sodass gilt

$$\delta(g(x)) = 0 \quad \text{für} \quad g(x) \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{für} \quad x \neq x_n$$

und folglich

$$\sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|} = 0 \quad \forall x \neq x_n \quad \text{bzw.} \quad \text{für} \quad g(x) \neq 0 .$$

Mit anderen Worten, $\delta(g(x))$ liefert nur einen Beitrag (Peak) an den Nullstellen x_n der Funktion $g(x)$.

⁴Diese Herleitung ist teilweise zitiert aus: Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3, Elektrodynamik*, 7. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, *Lösung zu Aufgabe 1.7.3*, Seite 371 und Seite 372.

Wir gehen aus vom Faltungsintegral

$$\mathcal{I} \equiv \int_{\alpha}^{\beta} dx \delta(g(x)) \cdot f(x) = \sum_n^{\alpha < x_n < \beta} \int_{x_n - \epsilon}^{x_n + \epsilon} dx \delta(g(x)) \cdot f(x), \quad (5.16)$$

wobei in den jeweiligen Integrationsbereichen von $x_n - \epsilon$ bis $x_n + \epsilon$ immer nur eine Nullstelle, und zwar die Nullstelle n liegen soll.

Die Taylor-Entwicklung von $g(x)$ an den Nullstellen x_n ist

$$g(x) = \underbrace{g(x_n)}_{=0} + g'(x_n) \cdot (x - x_n) + \frac{1}{2} g''(x_n) \cdot (x - x_n)^2 + \dots .$$

Wenn wir davon ausgehen, dass die Summanden in der Taylor-Entwicklung voneinander unabhängig sind, müssen an den Nullstellen x_n alle Summanden verschwinden, sodass

$$g(x_n) = 0 = \underbrace{g(x_n)}_{=0} + \underbrace{g'(x_n) \cdot (x - x_n)}_{=0 \text{ für } x=x_n} + \underbrace{\frac{1}{2} g''(x_n) \cdot (x - x_n)^2}_{=0 \text{ für } x=x_n} + 0 ,$$

$$g(x_n) = 0 = g'(x_n) \cdot (x - x_n) .$$

Nach Voraussetzung können $\delta(g(x))$ und folglich auch \mathcal{I} nur an den Stellen x_n , also für $g(x_n)$, einen Beitrag liefern. Diesen Sachverhalt berücksichtigen wir jetzt bei der Ersetzung von $g(x)$ in der δ -Funktion $\delta(g(x))$ von (5.16). Es gilt dann dort nämlich exakt

$$g(x) = g'(x_n) \cdot (x - x_n) ,$$

sodass

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \sum_n^{\alpha < x_n < \beta} \int_{x_n - \epsilon}^{x_n + \epsilon} dx \delta(g'(x_n) \cdot (x - x_n)) \cdot f(x) \\ \mathcal{I} &= \int_{\alpha}^{\beta} dx \sum_n \delta(g'(x_n) \cdot (x - x_n)) \cdot f(x) . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Mit der Substitution

$$g'(x_n) x_n = z_n , \quad g'(x_n) x = z \Leftrightarrow x = \frac{1}{g'(x_n)} z \Rightarrow dx = \frac{1}{g'(x_n)} dz$$

erhalten wir aus (5.17) für

$g'(x_n) > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \sum_n \int_{g'(x_n)\alpha}^{g'(x_n)\beta} dz \frac{1}{g'(x_n)} \delta(z - z_n) \cdot f\left(\frac{z}{g'(x_n)}\right) \\
&= \sum_n \frac{1}{g'(x_n)} \cdot f\left(\frac{z_n}{g'(x_n)}\right) \\
&= \sum_n \frac{1}{g'(x_n)} \cdot f(x_n) \\
\mathcal{I} &= \int_{\alpha}^{\beta} dx \sum_n \frac{1}{g'(x_n)} \delta(x - x_n) \cdot f(x) .
\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (5.17) zeigt

$$\begin{aligned}
\delta(g'(x_n) \cdot (x - x_n)) &= \delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{g'(x_n)} \delta(x - x_n) \\
&= \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n) .
\end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir aus (5.17) für

$g'(x_n) < 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= - \sum_n \int_{-|g'(x_n)|\alpha}^{-|g'(x_n)|\beta} dz \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(z - z_n) \cdot f\left(\frac{z}{g'(x_n)}\right) \\
&= + \sum_n \int_{-|g'(x_n)|\beta}^{-|g'(x_n)|\alpha} dz \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(z - z_n) \cdot f\left(\frac{z}{g'(x_n)}\right) \\
&= \sum_n^{\substack{-|g'|\alpha > z_n > -|g'|\beta}} \frac{1}{|g'(x_n)|} \cdot f\left(\frac{z_n}{g'(x_n)}\right) \\
&= \sum_n^{\alpha < x_n < \beta} \frac{1}{|g'(x_n)|} \cdot f(x_n) \\
\mathcal{I} &= \int_{\alpha}^{\beta} dx \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n) \cdot f(x) .
\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (5.17) zeigt wieder

$$\delta(g'(x_n) \cdot (x - x_n)) = \delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n) . \quad \square$$

5.4 Fourier-Transformation und δ -Funktion

Die Fourier-Transformation bezeichnen wir mit \mathcal{F} und ihre Umkehrung, die inverse Fourier-Transformation, mit \mathcal{F}^{-1} .

Konvention⁵:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx = \tilde{f}(\xi),$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\xi)\} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\xi) e^{i2\pi\xi x} d\xi = f(x)$$

mit dem Normierungsfaktor $\frac{1}{2\pi}$. Die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(\xi)$ heißt auch Spektralfunktion der Funktion $f(x)$. $2\pi\xi$ kann z. B. die

$$\text{Ortsfrequenz } k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\xi \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \frac{1}{\lambda}$$

oder auch die

$$\text{Zeitfrequenz } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\xi \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \frac{1}{T} = \nu$$

sein. An die Stelle der Funktion $f(x)$ setzen wir jetzt die δ -Funktion, verwenden also

$$f(x) \equiv \delta(x - x_0).$$

Die Fourier-Transformation von $\delta(x - x_0)$ ist dann

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta(x - x_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) e^{-i2\pi\xi x} dx = \tilde{f}(\xi) \\ &= e^{-i2\pi\xi x_0}. \end{aligned}$$

Für die Fourier-Transformation von $\delta(x)$ gemäß $x_0 = 0$ gilt also

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i2\pi\xi x} dx = \tilde{f}(\xi) \\ &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

Durch die Umkehroperation, d. h. durch die inverse Fourier-Transformation von $\tilde{f}(\xi) = e^{-i2\pi\xi x_0}$ erhalten wir die Darstellung der δ -Funktion als Fourier-Transformierte von $\tilde{f}(\xi)$ wie folgt:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\xi)\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-i2\pi\xi x_0}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\xi x_0} \cdot e^{i2\pi\xi x} d\xi =$$

⁵Die Zuordnung und eventuelle Aufteilung des Normierungsfaktors $\frac{1}{2\pi}$ sowie die Zuordnung des Vorzeichens im Exponenten der e -Funktion sind Konvention.

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\xi(x-x_0)} d\xi .$$

Die Darstellung der δ -Funktion mit Hilfe der Fourier-Transformation lässt sich auch auf andere Weise zeigen:

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx_0} , \quad \tilde{f}(k) = \int_{x=-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} .$$

$f(x)$ sei stetig und quadratintegabel. Wir setzen $\tilde{f}(k)$ in $f(x_0)$ ein:

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{\infty} dk \left\{ \int_{x=-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \right\} e^{ikx_0} .$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge liefert

$$f(x_0) = \int_{x=-\infty}^{\infty} dx f(x) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x_0-x)}}_{=\delta(x_0-x) = \delta(x-x_0)} \tag{5.18}$$

$$f(x_0) = \int_{x=-\infty}^{\infty} dx f(x) \cdot \delta(x - x_0) . \tag{5.19}$$

Der Vergleich von (5.19) mit (5.18) zeigt

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{k=-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x_0)} . \tag{5.20}$$

5.5 Die δ -Funktion in Kugelkoordinaten

Wir ersetzen die kartesischen Koordinaten in

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3\vec{r} = \int \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') dx dy dz$$

durch Kugelkoordinaten und verwenden dabei

$$d^3\vec{r} = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = r^2 dr d \cos \vartheta d\varphi ,$$

weil $\sin \vartheta d\vartheta = -d \cos \vartheta$ ist, aber hinsichtlich des Vorzeichens bei Berücksichtigung der Integrationsgrenzen unter dem Integral

$$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = \int_{\cos(0)=1}^{\cos(\pi)=-1} -d \cos \vartheta = -\cos \vartheta \Big|_{+1}^{-1} = \int_{-1}^1 d \cos \vartheta = \cos \vartheta \Big|_{-1}^{+1}$$

gilt. Mit

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{r^2} \delta(r - r') r^2 dr &= \int \delta(r - r') dr = 1 , \\ \int \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') d \cos \vartheta &= 1 , \\ \int \delta(\varphi - \varphi') d\varphi &= 1 \end{aligned}$$

erhalten wir dann

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3\vec{r} = \int \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') \underbrace{r^2 dr d \cos \vartheta d\varphi}_{= d^3\vec{r}} = 1 ,$$

sodass

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') .$$

5.6 Verallgemeinerung für das Ersetzen der kartesischen Koordinaten in der δ -Funktion (Koordinaten-Transformation)

Wir ersetzen die kartesischen Koordinaten x, y, z durch die Koordinaten u, v, w . Für das Volumenelement gilt dann

$$d\vec{r} = dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

mit der *Funktionaldeterminante*

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

und die δ -Funktion erhält dann die Form

$$\begin{aligned} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) &= \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0) \\ &= \gamma(u, v, w) \cdot \delta(u - u_0) \cdot \delta(v - v_0) \cdot \delta(w - w_0), \end{aligned}$$

wobei γ ein noch zu bestimmender Faktor ist. Weil aber

$$\begin{aligned} &\int \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot d^3\vec{r} = \\ &= \int \gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0) \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \\ &= \int \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0) \cdot du dv dw = 1 \end{aligned}$$

ist, muss

$$\gamma(u, v, w) \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(u, v, w) = \frac{1}{\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|}$$

und folglich

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|} \cdot \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0)$$

gelten. Beispielsweise ist damit die δ -Funktion in Zylinderkoordinaten

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\varrho} \delta(\varrho - \varrho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0),$$

weil im Volumenelement $\varrho d\varrho d\varphi dz$ in Zylinderkoordinaten der **Betrag der Funktionaldeterminante** gleich ϱ ist.

5.7 Herleitung von $\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}')$

Vergleiche: Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3, Elektrodynamik*, 7. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 34 und Seite 35.

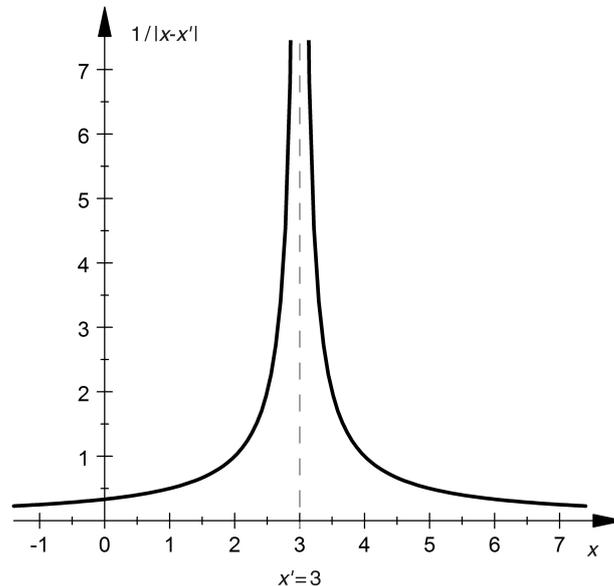


Abb. 5.4 Die Funktion $1/|x-x'| = 1/|x-3|$, also für $x' = 3$. Zur Vereinfachung von $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ wurden die y - und die z -Achse unterdrückt.

In dieser Herleitung werden wir die folgende Notation verwenden:

$$\begin{aligned}\vec{r}-\vec{r}' &= \tilde{\vec{r}}, \\ x-x' &= \tilde{x}, \\ |\vec{r}-\vec{r}'| &= |\tilde{\vec{r}}| = \tilde{r}.\end{aligned}$$

Die gerade und stets positive Funktion $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ besteht aus zwei Ästen, die symmetrisch liegen zu ihrer Polstelle bei $\vec{r}=\vec{r}'$ (vgl. Abb. 5.4). Die Funktion $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ ist folglich an der Stelle $\vec{r}-\vec{r}'=0$ nicht definiert und nicht differenzierbar. Die feste Größe \vec{r}' in $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ bewirkt nur eine Verschiebung längs der Achsen der variablen Größe. Wenn wir die y - und die z -Achse unterdrücken und nur die x -Achse betrachten, ergeben sich durch *Fallunterscheidung*, wie in Abbildung 5.4 beispielsweise für $x' = 3$ dargestellt, die beiden Äste

$$\frac{1}{|x-x'|} = \begin{cases} -\frac{1}{x-x'} & \text{für } x < x', \\ +\frac{1}{x-x'} & \text{für } x > x'. \end{cases} \quad (5.21)$$

Weiterhin stellen wir fest, dass x' eine Verschiebung der Funktionsäste längs der x -Achse bewirkt, und zwar

- bei $x' > 0$ nach rechts,
- bei $x' < 0$ nach links.

5.7.1 Betrachtungen für $\vec{r} \neq \vec{r}'$

Betrachten wir den Gradienten von $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ für $\vec{r} \neq \vec{r}'$:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \nabla_{\vec{r}} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{1}{2} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 2(x - x') \\ 2(y - y') \\ 2(z - z') \end{pmatrix}, \\
 &= - \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} (x - x') \\ (y - y') \\ (z - z') \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\boxed{\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{-\vec{e}_{\vec{r}}}{\tilde{r}^2} \quad \forall \vec{r} \neq \vec{r}'}, \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= -\frac{1}{2} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -2(x - x') \\ -2(y - y') \\ -2(z - z') \end{pmatrix} \\
 &= + \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} (x - x') \\ (y - y') \\ (z - z') \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\boxed{\nabla_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = +\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{+\vec{e}_{\vec{r}}}{\tilde{r}^2} \quad \forall \vec{r} \neq \vec{r}'}.$$

Jetzt wenden wir den Laplace-Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \text{div grad}$ auf die Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ für $\vec{r} \neq \vec{r}'$ an und gehen dabei von (5.22) aus. Zur Vereinfachung leiten wir zunächst nur die x -Komponente

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -(x - x') \cdot \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

von (5.22) nach x ab:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\
& = - \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} + \\
& \quad \frac{3}{2} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{5}{2}} \cdot 2(x - x')^2 \quad (5.25) \\
& = - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{3(x - x')^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \\
& = \frac{3(x - x')^2 - \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5}.
\end{aligned}$$

Analog erhält man die Ableitung der y -Komponente von (5.22) nach y und die Ableitung der z -Komponente von (5.22) nach z . Die Summe dieser drei Ableitungen liefert schließlich

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\
& = \frac{3(x - x')^2 + 3(y - y')^2 + 3(z - z')^2 - 3 \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \\
& = 0. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Aus (5.24) bzw. aus

$$\frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = + (x - x') \cdot \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}}$$

erhält man auf die gleiche Weise $\Delta_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0$, denn wie in (5.25) resultiert

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\
& = - \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{3}{2}} + \\
& \quad \frac{3}{2} \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-\frac{5}{2}} \cdot 2(x - x')^2, \quad (5.27)
\end{aligned}$$

sodass schließlich gilt:

$$\boxed{\Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \Delta_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 \quad \forall \vec{r} \neq \vec{r}'} \quad (5.28)$$

Unter Berücksichtigung von (5.28) verallgemeinern wir diese Ergebnisse für den \mathbb{R}^3 und stellen fest

$$\boxed{\Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \Delta_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \Delta \frac{1}{\tilde{r}}},$$

sodass wir die Indizierung des Laplace-Operators bei seiner Anwendung auf die Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'| = 1/\tilde{r}$ vernachlässigen können und nur noch das Symbol Δ verwenden.

Dass $\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ für $\vec{r} \neq \vec{r}'$ verschwindet, liegt an der 3-Dimensionalität des betrachteten Raums. Dies erkennt man daran, wie die Exponenten bei der Differentiation der Potenzfunktionen $[\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2]^{-1/2}$ für verschiedene Dimensionalitäten n in die Rechnung eingehen und schließlich durch die Faktoren 3 den Zähler von (5.26) verschwinden lassen. Insofern ist (5.28) eine Eigenschaft des 3-dimensionalen Ortsraums.

Zur Veranschaulichung der Eigenschaften der Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ reduzieren wir diese auf den eindimensionalen Fall mit den beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{|x - x'|} = f(x, x_0),$$

$$g(x') = \frac{1}{|x - x'|} = g(x_0, x').$$

mit

$$f(x, x_0) \equiv g(x_0, x') \quad \text{für alle } x_0 = x'.$$

Bilden wir den Gradienten dieser beiden Funktionen:

$$\nabla_x \frac{1}{|x - x'|} \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{1}{|x - x'|} = -\frac{x - x'}{|x - x'|^3} = -\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3} = -\frac{1}{|\tilde{x}|^2} \cdot \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|}, \quad (5.29)$$

$$\nabla_{x'} \frac{1}{|x - x'|} \Rightarrow \frac{d}{dx'} \frac{1}{|x - x'|} = +\frac{x - x'}{|x - x'|^3} = +\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3} = +\frac{1}{|\tilde{x}|^2} \cdot \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|} \quad (5.30)$$

$$= -\frac{x' - x}{|x - x'|^3} = -\frac{-\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3} = -\frac{1}{|\tilde{x}|^2} \cdot \frac{-\tilde{x}}{|\tilde{x}|}. \quad (5.31)$$

Wegen $x - x' = \tilde{x} \Leftrightarrow x' - x = -\tilde{x}$ schlussfolgern wir daraus

$$\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|} \hat{=} \operatorname{sgn} \left(\frac{x - x'}{|x - x'|} \right) \cdot \vec{e}_x \quad \text{mit} \quad \operatorname{sgn} \left(\frac{x - x'}{|x - x'|} \right) = 1 > 0 \quad \text{für } x > x',$$

$$\frac{-\tilde{x}}{|\tilde{x}|} \hat{=} \operatorname{sgn} \left(\frac{x' - x}{|x - x'|} \right) \cdot \vec{e}_{x'} \quad \text{mit} \quad \operatorname{sgn} \left(\frac{x' - x}{|x - x'|} \right) = 1 > 0 \quad \text{für } x' > x.$$

Wie wir sehen ist der Gradient nach x' entgegengesetzt gerichtet zum Gradienten nach x entsprechend $\vec{e}_{x'} = -\vec{e}_x$. Anders gesagt, die x' -Achse ist entgegengesetzt gerichtet zur x -Achse, zeigt also in die negative x -Richtung. Diese Tatsache spielt aber keine Rolle für unsere Betrachtung, weil der Laplace-Operator $\Delta = \nabla^2$ unabhängig vom

richtungsbedingten Vorzeichen des Gradienten ist. Dafür liefern aber gemäß (5.29) und (5.31) die ersten Ableitungen

$$\frac{df(x, x'_0)}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{|x - x'_0|} = -\frac{x - x'_0}{|x - x'_0|^3},$$

$$\frac{dg(x_0, x')}{dx'} = \frac{d}{dx'} \frac{1}{|x_0 - x'|} = -\frac{x' - x_0}{|x_0 - x'|^3}$$

identische Funktionsgraphen im Fall $x_0 = x'_0$, wie wir auch an den Abbildungen 5.5 und 5.6 sofort erkennen.

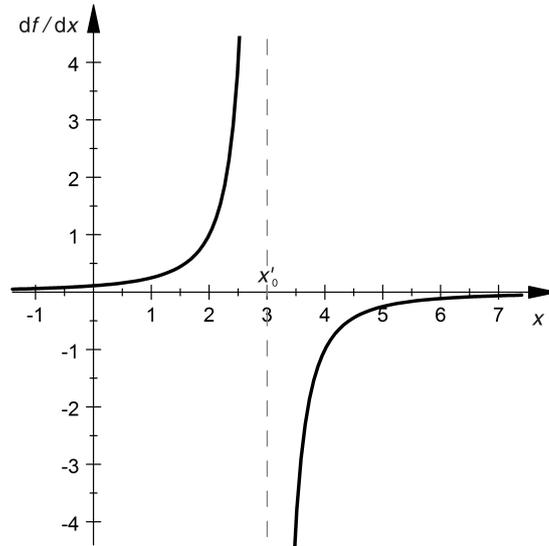


Abb. 5.5 Graphische Darstellung der ersten Ableitung $\frac{df(x, x'_0)}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{|x - x'_0|} = -\frac{x - x'_0}{|x - x'_0|^3}$ für $x'_0 = 3$ entsprechend (5.29). Die Steigung beider Funktionsäste ist stets positiv.

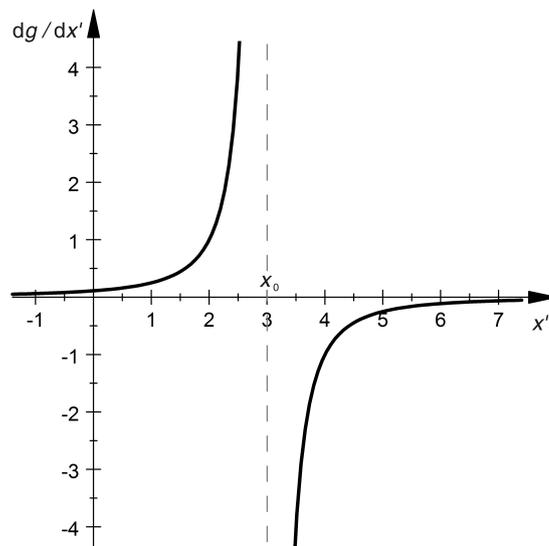


Abb. 5.6 Graphische Darstellung der ersten Ableitung $\frac{dg(x_0, x')}{dx'} = \frac{d}{dx'} \frac{1}{|x_0 - x'|} = -\frac{x' - x_0}{|x_0 - x'|^3}$ für $x_0 = 3$ entsprechend (5.31). Die x' -Achse zeigt konventionsgemäß in die positive Richtung und die Steigung beider Funktionsäste ist stets positiv.

Schließlich bilden wir die zweite Ableitung von $f(x) = 1/|x - x'|$ bzw. $g(x') = 1/|x - x'|$, d. h. wir leiten (5.29) nach x und (5.31) nach x' ab:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{|x - x'|} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x'^2} &= \frac{d^2}{dx'^2} \frac{1}{|x - x'|} \end{aligned} \right\} = \frac{2}{|x - x'|^3} = \frac{2}{|\tilde{x}|^3} > 0. \quad (5.32)$$

Während die ersten Ableitungen von $1/|x - x'|$ nach x und auch nach x' ungerade Funktionen sind, ist die zweite Ableitung $2/|x - x'|^3$ eine stets positive gerade Funktion mit einem Pol bei $x = x'$ (Abb. 5.7).

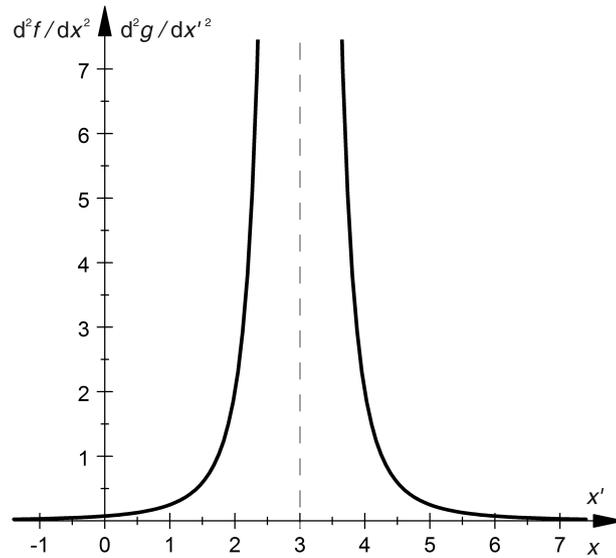


Abb. 5.7 Graphische Darstellung der zweiten Ableitung der Funktion $f(x, x'_0)$ für $x'_0 = 3$ bzw. der Funktion $g(x_0, x')$ für $x_0 = 3$ entsprechend (5.32). Wie man sieht, sind die Graphen der beiden Funktionen im Fall $x_0 = x'_0$ identisch.

Dass die zweite Ableitung von $1/|x - x'|$ nach x gleich der zweiten Ableitung nach x' ist, konnten wir bereits aus den Abbildungen 5.5 und 5.6 ersehen, denn identische Funktionsgraphen besitzen identische Steigungen (Ableitungen).

Achtung!

Die in der Abbildung 5.7 dargestellte Funktion (5.32) ist nicht das Ergebnis der Anwendung des Laplace-Operators auf die Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ mit anschließender Nullsetzung von y und z . Anders gesagt, (5.32) ist nicht das nur längs der x -Achse betrachtete Ergebnis der Anwendung des (dreidimensionalen) Laplace-Operators auf die Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$. Diese Darstellung soll nur als Analogie dienen, um das Verhalten des Laplace-Operators hinsichtlich des Vorzeichens zu veranschaulichen.

Die Anwendung des Laplace-Operators auf die Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ ergibt längs der x -Achse, also für den Fall

$$\vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} x - x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = |x - x'|$$

gemäß (5.26) und (5.27) :

$$\left. \begin{array}{l} \left[\Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]_{\substack{y'=z'=0 \\ y=z=0}} \\ \left[\Delta_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]_{\substack{y'=z'=0 \\ y=z=0}} \end{array} \right\} = \frac{3(x - x')^2 - 3(x - x')^2}{|x - x'|^5} = 0 \quad \text{für } |x - x'| > 0 .$$

Als **skalares Feld** im \mathbb{R}^3 ist die Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ nicht eine nur von x bzw. x' abhängige Funktion sondern eine Funktion von \vec{r} bzw. \vec{r}' . Deshalb müssen wir zuerst den Laplace-Operator $\Delta_{\vec{r}}$ bzw. $\Delta_{\vec{r}'}$ auf die Funktion $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ **im dreidimensionalen Raum** anwenden und erst danach dürfen wir die Koordinatenwerte (hier z. B. $y = y' = z = z' = 0$) einsetzen.

Der Vollständigkeit halber und wegen der praktischen Bedeutung zeigen wir noch

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \Delta_r \frac{1}{r} \quad \text{für } |\vec{r} - \vec{r}'| = r > 0$$

in **Kugelkoordinaten**. Je nach Bedarf sind für die Radialableitung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten bezüglich einer Funktion $f = f(r)$ drei Schreibweisen gebräuchlich:

$$\Delta_r f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot f) .$$

Setzen wir also $f(r) = 1/r$ ein:

$$\Delta_r \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \cdot \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (1) = 0 . \quad \square$$

In Kugelkoordinaten benötigen wir hier nur die Radialableitung des Laplace-Operators, weil die beiden anderen Ableitungen sofort verschwinden und weil sich die Radialableitung wegen der Kugelsymmetrie über den ganzen \mathbb{R}^3 erstreckt.

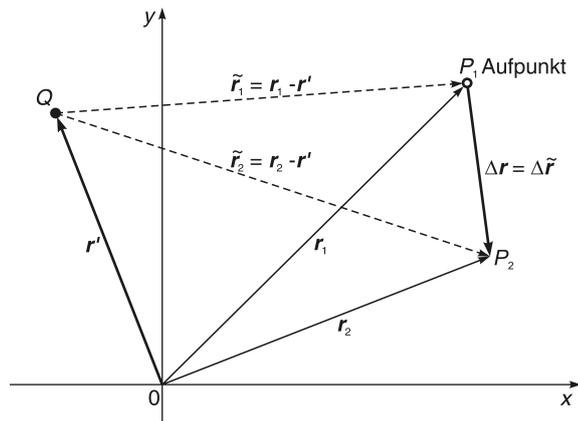


Abb. 5.8 Veranschaulichung des Vektors $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\vec{r}_2 - \vec{r}') - (\vec{r}_1 - \vec{r}') = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta \vec{r}$ (zur Vereinfachung in zwei Dimensionen).

5.7.2 Betrachtungen unter Einschluss von $\vec{r} = \vec{r}'$

Wir bilden jetzt das Volumenintegral über die Funktion $\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ mit den folgenden Substitutionen:

- \vec{r}' bzw. x' sei eine gegebene Konstante und \vec{r} bzw. x die Variable. Dann gilt für die Komponente x (stellvertretend für die Komponenten y und z):

$$\tilde{x} = x - x' \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{x}}{dx'} = -1, \quad \frac{d\tilde{x}}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad dx = d\tilde{x}$$

$$\text{bzw. } \Delta x = \Delta \tilde{x} \text{ (s. Abb. 5.8)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{d\tilde{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2}.$$

- Wegen der Analogie zwischen den drei Raumkoordinaten gilt für den \mathbb{R}^3

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r} \quad \text{bzw.} \quad d\vec{r} = d\vec{r}, \quad dx dy dz = d^3 r = d^3 \tilde{r} = d\tilde{x} d\tilde{y} d\tilde{z} \quad \text{und}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2}.$$

- Für den Integrationsbereich V des Volumenintegrals schreiben wir jetzt folglich \tilde{V} .

Wir erhalten somit

$$\int_V \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r = \int_{\tilde{V}} \Delta \frac{1}{\tilde{r}} d^3 \tilde{r}.$$

Für $\vec{r} \neq \vec{r}' \Rightarrow \tilde{r} \neq 0$ bzw. wenn \vec{r}' nicht im Integrationsbereich \tilde{V} liegt, gilt

$$\int_{\tilde{V}} \Delta \frac{1}{\tilde{r}} d^3 \tilde{r} = 0, \quad \vec{r}' \notin \tilde{V}.$$

Alle Volumina \tilde{V} , die den Nullpunkt $\tilde{r} = 0$ nicht enthalten, ergeben also das Integral Null. Das aber bedeutet:

Wenn das Integral über ein Volumen \tilde{V} existiert, welches den Nullpunkt $\tilde{r} = 0$ beinhaltet, hängt der Wert des Integrals nicht von der Form des Volumens ab, sondern sein Wert resultiert nur aus dem Punkt Q gemäß $\tilde{r} = \tilde{r}'$ bzw. $\tilde{r} = \vec{0}$. \tilde{V} darf also auch die Form einer Kugel mit dem Mittelpunkt $\tilde{r} = \vec{0}$ entsprechend $\tilde{r} = 0$ und dem Radius \tilde{R} haben. Der Punkt Q in der Abbildung 5.8 entspräche dann dem Mittelpunkt dieser Kugel mit dem Volumen $\tilde{V} = V_K$.

Diese Tatsache ermöglicht uns, das Integral in **Kugelkoordinaten** zu berechnen, wobei wir auch über $\Delta(1/\tilde{r})$ mit der Polstelle bei $\tilde{r} = 0$ integrieren. Dafür benötigen wir den Gradienten in Kugelkoordinaten:

$$\text{grad } \Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi,$$

das Volumenelement in Kugelkoordinaten:

$$dV = d^3r = dA \cdot dr = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi,$$

das Flächenelement auf der Oberfläche S einer Kugel mit dem Radius R , dem Kugelvolumen V_K und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung:

$$dA = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad \Rightarrow \quad d\vec{A} = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \cdot \vec{e}_r$$

sowie den Gauß'schen Satz

$$\int_V \text{div } \vec{v} \, d^3r = \oint_{S(V)} \vec{v} \, d\vec{A}.$$

Unter den genannten Bedingungen für das Volumen \tilde{V} bzw. das Kugelvolumen V_K und mit (5.23) gilt

$$\nabla_{\tilde{r}} \frac{1}{|\tilde{r} - \tilde{r}'|} = \text{grad}_{\tilde{r}} \frac{1}{\tilde{r}} = -\frac{1}{\tilde{r}^2} \vec{e}_{\tilde{r}},$$

sodass

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{V}} \Delta \frac{1}{\tilde{r}} \, d^3\tilde{r} &= \int_{V_K} \text{div} \left(\text{grad} \frac{1}{\tilde{r}} \right) \, d^3\tilde{r} = \underbrace{\oint_{S(V_K)} \left(-\frac{1}{\tilde{R}^2} \vec{e}_{\tilde{r}} \right) \cdot d\vec{A}}_{\text{Hüllenintegral über die Oberfläche } S \text{ der Kugel mit Radius } \tilde{R}} \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left(-\frac{1}{\tilde{R}^2} \cdot \vec{e}_{\tilde{r}} \right) \cdot \tilde{R}^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \cdot \vec{e}_{\tilde{r}} \\ &= - \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta = -2\pi \cdot \left[-\cos \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\pi} \\ &= -2\pi \cdot \left[1 - (-1) \right] \\ \int_{\tilde{V}} \Delta \frac{1}{\tilde{r}} \, d^3\tilde{r} &= -4\pi = \int_V \Delta \frac{1}{|\tilde{r} - \tilde{r}'|} \, d^3r \quad \text{für } \tilde{r}' \in V. \end{aligned}$$

Zusammenfassend stellen wir fest:

$$\frac{1}{-4\pi} \int_V \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r = \begin{cases} 0 & \text{falls } \vec{r}' \notin V \\ 1 & \text{falls } \vec{r}' \in V \end{cases} = \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3r .$$

Der Vergleich der Integranden liefert

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') .$$

Analog zu

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \Delta \frac{1}{\tilde{r}} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') = -4\pi \delta(\tilde{r})$$

findet man für $\vec{r}' = \vec{0}$

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}) .$$

5.8 Herleitung von $(\Delta + k^2) \frac{\exp(\pm ikr)}{r} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

Siehe: Torsten Fließbach, *Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik II*, 4. Auflage, Elsevier, München, 2009, Seite 26.

In **Kugelkoordinaten** ist

$$\Delta_r \Phi(r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \cdot \Phi(r)] .$$

Damit erhalten wir im Fall $r \neq 0$

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} &= \Delta_r \frac{e^{\pm ikr}}{r} + k^2 \frac{e^{\pm ikr}}{r} \\ &= \frac{1}{r} \cdot (-k^2) e^{\pm ikr} + \frac{1}{r} \cdot k^2 e^{\pm ikr} = 0 . \quad \square \end{aligned} \quad (5.33)$$

Jetzt schließen wir den Fall $r = 0$ in unsere Überlegungen ein. Mit der Taylor-Entwicklung

$$e^{\pm ikr} = 1 \pm ikr - \frac{1}{2} k^2 r^2 \pm \frac{1}{6} ik^3 r^3 - \frac{1}{24} k^4 r^4 \pm \dots$$

an der Stelle $r = 0$ können wir

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} &= (\Delta + k^2) \left(\frac{1}{r} \pm ik - \frac{1}{2} k^2 r \pm \frac{1}{6} ik^3 r^2 - \frac{1}{24} k^4 r^3 \pm \dots \right) \\ &= \Delta \frac{1}{r} \pm \Delta(ik) - \Delta \left(\frac{1}{2} k^2 r \right) \pm \Delta \left(\frac{1}{6} ik^3 r^2 \right) - \Delta \left(\frac{1}{24} k^4 r^3 \right) \pm \dots \\ &\quad + \frac{k^2}{r} \pm ik^3 - \frac{1}{2} k^4 r \pm \frac{1}{6} ik^5 r^2 - \frac{1}{24} k^6 r^3 \pm \dots \end{aligned}$$

schreiben. Nach Anwendung des Laplace-Operators gemäß

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}), \quad \Delta r = \frac{2}{r}, \quad \Delta r^2 = 6, \quad \Delta r^3 = 12r$$

resultiert dann

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} &= -4\pi \delta(\vec{r}) \pm 0 - \frac{k^2}{r} \pm ik^3 - \frac{1}{2} k^4 r \pm \dots \\ &\quad + \frac{k^2}{r} \pm ik^3 - \frac{1}{2} k^4 r \pm \frac{1}{6} ik^5 r^2 - \frac{1}{24} k^6 r^3 \pm \dots, \\ (\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} &= -4\pi \delta(\vec{r}) \pm 2ik^3 - k^4 r \pm \dots \end{aligned} \quad (5.34)$$

Das Integral von (5.34) über den ganzen Raum mit dem Volumenelement $d^3r = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$ in Kugelkoordinaten kann nur an der Stelle $r = 0$ einen Betrag liefern, da der Integrand für $r \neq 0$ gemäß (5.33) verschwindet. Wir integrieren deshalb über den ganzen Raum einschließlich $r = 0$, also von $r = 0$ bis $r = \varepsilon > 0$, nachdem wir (5.34) mit einer beliebigen Testfunktion⁶ $f(\vec{r})$ multipliziert haben:

$$\begin{aligned} \int_{r \leq \varepsilon} d^3r f(\vec{r}) \cdot (\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} &= \int_{r \leq \varepsilon} d^3r f(\vec{r}) \cdot \left[-4\pi \delta(\vec{r}) \right] \\ &\quad + \int_{r \leq \varepsilon} d^3r f(\vec{r}) \cdot \left[\pm 2ik^3 - k^4 r \pm \dots \right] \\ \int_{r \leq \varepsilon} d^3r f(\vec{r}) \cdot (\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} &= -4\pi f(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) + \dots \end{aligned} \quad (5.35)$$

An der Stelle $r = 0$, also für $\varepsilon \rightarrow 0$, verschwinden aber in (5.35) die Terme $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ und höherer Ordnung, sodass an der Stelle $r = 0$ nur der Term $-4\pi f(0)$ verbleibt. Es gilt also tatsächlich

$$(\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}).$$

Für r schreiben wir $|\vec{r} - \vec{r}'|$, sodass schließlich

$$\boxed{(\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')}. \quad (5.36)$$

⁶Testfunktionen sind eine spezielle Klasse von Funktionen, d. h., Testfunktionen haben besondere Eigenschaften. Insbesondere darf die Testfunktion $f(\vec{r})$ in unserem Fall bei $r = 0$ keinen Pol besitzen. Die Funktion $f = 1/r^4$ z. B. wäre keine Testfunktion.

5.9 Die δ -Funktion in der Elektrostatik

Vergleiche: Torsten Fließbach, *Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik II*, 4. Auflage, Elsevier – Spektrum, München, 2005, Seite 43 bis Seite 47.

Zur Vereinfachung sei im Folgenden $\int := \int_{-\infty}^{\infty}$.

- Ladungsdichte für eine Punktladung q_i am Ort \vec{r}_i :

$$\varrho(\vec{r}) = q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) .$$

- Ladungsdichte für N Punktladungen q_i an den Orten \vec{r}_i :

$$\varrho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) .$$

- Punktladung q_i am Ort \vec{r}_i :

$$q_i(\vec{r}_i) = \int \varrho(\vec{r}) d^3r = \int q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d^3r .$$

- Diskrete Ladungsverteilung $Q(r_i)$ der Gesamtladung Q , bestehend aus N Punktladungen q_i an den Orten \vec{r}_i in einem Raumbereich mit dem Volumen V :

$$Q(\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N q_i(\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N \int \underbrace{q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)}_{\varrho(\vec{r})} d^3r = Q .$$

- Näherung der Ladungsdichte einer *stetigen* Ladungsverteilung durch eine diskrete Verteilung von N Punktladungen in einem begrenzten Raumbereich mit dem Volumen V :

Der Raumbereich wird in N Teilvolumina ΔV_i aufgeteilt und die Ladung in den einzelnen Teilvolumina wird jeweils durch eine Punktladungen q_i an einem Ort \vec{r}_i ersetzt. Je kleiner die Teilbereiche ΔV_i gewählt werden, desto kleiner ist am Ende der Fehler.

$$\begin{aligned} \varrho(\vec{r}) &= \int \varrho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' = \sum_{i=1}^N \int_{\Delta V_i} d^3r' \varrho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ &\approx \sum_{i=1}^N \underbrace{\left[\int_{\Delta V_i} d^3r' \varrho(\vec{r}') \right]}_{= q_i} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) . \end{aligned} \quad (5.37)$$

Wir überprüfen (5.37) durch die Berechnung der Gesamtladung Q im Gesamtvolumen V :

$$\int_V \varrho(\vec{r}) d^3r = \int_V \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d^3r = \sum_{i=1}^N \int_V q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d^3r = \sum_{i=1}^N q_i = Q . \quad \square$$

6 Das Coulomb-Feld als Lösung von $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

Quellen:

Rainer J. Jelitto, Studententext, *Elektrodynamik – Theoretische Physik 3*, 3. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden, 1994, Abschnitt 3.2.1 Das \mathbf{D} -Feld einer Punktladung, Seite 50 bis Seite 52.

Prof. Ursula van Rienen, *Vorlesungsskript Theoretische Elektrotechnik*, Universität Rostock, Institut für Allgemeine Elektrotechnik, 27.06.2018, Abschnitt 2.1.3 Die Potentialgleichung, Seite 20 bis Seite 21,

https://www.igs.uni-rostock.de/storages/uni-rostock/Alle_IEF/IAE/Lehre/ThET_Skript.pdf

Zur Erinnerung an die Lösung von Differentialgleichungen (kurz DGLn) siehe u. a.:

Lothar Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 2, 10. Auflage, Verlag Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 2001, Teil V *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Seite 433 bis Seite 625.

Die Lösungen *gewöhnlicher* DGLn hängen nur von *einer* Variablen ab. Inhomogene gewöhnliche lineare DGL n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten a_i haben die Form

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = g(x),$$

wobei die Inhomogenität $g(x)$ auch eine Konstante sein kann. Die allgemeine Lösung $y(x)$ einer derartigen DGL ist die Summe aus einer partikulären Lösung $y_p(x)$ dieser DGL und aus der allgemeinen Lösung $y_0(x)$ der zugehörigen homogenen DGL $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = 0$:

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x).$$

Die allgemeine Lösung $y_0(x)$ besitzt dabei n unabhängige Parameter, die durch die Randbedingungen oder durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Die Lösungen *partieller* DGLn hängen von *mehreren* Variablen ab. Bei den Maxwell'schen Gleichungen handelt es sich um *partielle* lineare DGLn. Diese sind leider nicht so bequem zu lösen wie die gewöhnlichen DGLn. Ein Ansatz zur Lösung von *linearen* partiellen DGLn ist der Produkt- oder Separationsansatz.

Für Lösungen von linearen DGLn gilt das **Superpositionsprinzip**.

Im einfachsten Fall, also im Fall einer DGL vom Typ $y^{(n)} = g(x)$, kann die allgemeine Lösung $y(x)$ durch n -fache unbestimmte Integration ermittelt werden. Danach werden die n Integrationskonstanten durch die jeweiligen Rand- oder Anfangsbedingungen bestimmt. Wir zeigen dies an einem sehr einfachen **Beispiel**:

Das Potential $\Phi(\vec{r})$ einer elektrischen Punktladung q im Koordinatenursprung ist kugelsymmetrisch und wird deshalb am bequemsten in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ beschrieben. Φ hängt also nicht von den Winkeln ϑ und φ ab, sondern nur von r :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\vec{r}) = \Phi(r). \quad (6.1)$$

Da der gesamte unbegrenzte Raum außerhalb der Punktladung ladungsfrei sein soll, gilt für das Potential der Punktladung nicht die Poisson'sche Potentialgleichung $\Delta \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$ sondern die **Laplace-Gleichung**

$$\Delta \Phi = 0.$$

Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, also

$$\Delta(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

angewandt auf Φ liefert unter Berücksichtigung von (6.1) eine homogene gewöhnliche DGL 2. Ordnung der Form $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0$ bzw. $\Phi'' + f(r)\Phi' = 0$ (siehe (6.2)), nämlich

$$\Delta\Phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0,$$

die sich durch zweimalige Integration leicht lösen lässt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) &= 0 && \left| \cdot r^2 \right. \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) &= 0 && \left| \text{Integration} \right. && (6.2) \\ r^2 \frac{d\Phi}{dr} &= C_1 && \left| : r^2 \right. \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{C_1}{r^2} && \left| \text{Integration} \right. \end{aligned}$$

$$\text{allgemeine Lösung } \Phi(r) = -C_1 \frac{1}{r} + C_2.$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 sind die beiden unabhängigen Parameter der allgemeinen Lösung. Sie werden bestimmt durch die Randbedingungen für Φ . Als eine Randbedingung legen wir fest, dass Φ im Unendlichen verschwindet:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-C_1 \frac{1}{r} + C_2 \right) = 0 \Rightarrow \\ C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die andere Randbedingung ist die Größe der Punktladung q (die Ursache des Potentials) im Koordinatenursprung $r = 0$, was uns sofort an das Gauß'sche Gesetz

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^0 dS = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{innen}}$$

denken lässt, wobei das \vec{E} -Feld und das Potential $\Phi(r) = -C_1 \frac{1}{r}$ durch

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi \Rightarrow$$

$$\vec{E} = (E_r, 0, 0) = -\text{grad } \Phi(r) = -\text{grad}_r \left(-C_1 \frac{1}{r} \right) = -\frac{d}{dr} \left(-C_1 \frac{1}{r} \right) \vec{e}_r = \underbrace{-\frac{C_1}{r^2} \vec{e}_r}_{= E \vec{e}_r}$$

miteinander in Beziehung stehen. Wir können jetzt $\vec{E} = E \vec{e}_r$ unter Berücksichtigung von $\vec{n}^0 = \vec{e}_r$ (wegen der Kugelsymmetrie!) und $dS = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ in das Gauß'sche Gesetz einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \oint_S E \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dS &= \oint_S -\frac{C_1}{r^2} \cdot r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = -C_1 \underbrace{\oint_S \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}_{4\pi} = -4\pi C_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} q \Leftrightarrow \\ C_1 &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Das Potential als Lösung der Laplace-Gleichung für eine Punktladung q im Koordinatenursprung ist somit

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Wir gehen aus von einem einfachen Beispiel, nämlich von der dielektrischen Verschiebung bzw. dem \vec{D} -Feld einer **Punktladung** q im unbegrenzten Vakuum als Lösung der Maxwell'schen Gleichung (für die Elektrostatik):

$$\text{div } \vec{D} = \varrho = q \delta(\vec{r}). \quad (6.3)$$

Hierbei soll sich die Punktladung im Koordinatenursprung $\vec{r} = \vec{0}$ befinden. $\text{div } \vec{D}$ ist also die lokale Quelledichte mit

$$q \delta(\vec{r}) = \varrho \text{ für } \vec{r} = \vec{0}, \quad q \delta(\vec{r}) = 0 \text{ für } \vec{r} \neq \vec{0}.$$

„Jetzt werden wir aber *zusätzlich* von einer physikalisch sinnvollen Lösung verlangen müssen, daß sie im Limes $\vec{r} \rightarrow \infty$ asymptotisch hinreichend schnell verschwindet. Denn es widerspräche jeder Erfahrung, daß eine endliche Punktladung in unendlich großem Abstand irgendwelche Felder und damit nach dem Lorentz'schen Kraftgesetz auch Kräfte erzeugt.

Später wird es sich zeigen, daß die homogenen Gleichungen keine Lösung $\vec{D} \neq \vec{0}$ besitzen, die diesen „*Randbedingungen im Unendlichen*“ genügt.

Wir müssen jetzt nach einer Lösung der inhomogenen Gleichung suchen, die „nach außen hin“ abfällt.“¹

Das \vec{D} -Feld einer Punktladung ist isotrop gemäß

$$\vec{D}(\vec{r}) = D(r) \vec{e}_r \quad \text{mit} \quad D = |\vec{D}| \quad \text{und} \quad r = |\vec{r}|.$$

Felder dieser Gestalt sind konservative Zentralfelder. Deshalb erfüllt das Feld $\vec{D}(\vec{r})$ auch die homogene Maxwell'sche Gleichung der Elektrostatik

$$\text{rot } \vec{D} = \vec{0}.$$

In welcher Form (als Funktion) \vec{D} die inhomogene Differentialgleichung bzw. Maxwell'sche Gleichung (6.3) erfüllt, sehen wir wie folgt:

Für den Fluss² von \vec{D} aus einer Kugel \mathcal{K} mit der geschlossenen Oberfläche $\partial\mathcal{K}$ und dem Radius r gilt mit dem Gauß'schen Satz und mit dem Einheitsnormalenvektor $\vec{n}^0 = \vec{e}_r$ auf der Kugeloberfläche:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\mathcal{K}} \vec{D} \cdot \vec{n}^0 \, dS &= \oint_{\partial\mathcal{K}} D(r) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \, dS = \oint_{\partial\mathcal{K}} D(r) r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 4\pi r^2 D(r) \\ &= \int_{\mathcal{K}} \text{div } \vec{D} \, dV \stackrel{(6.3)}{=} \int_{\mathcal{K}} \varrho \, dV = \int_{\mathcal{K}} q \delta(\vec{r}) \, d^3r = \underbrace{q}_{= 4\pi r^2 D(r)}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Damit haben wir Lösungsfunktion für (6.3) gefunden, nämlich das

$$\text{Coulomb-Feld} \quad D(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{bzw.} \quad \vec{D}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^3} \vec{r}.$$

Wie man sieht, erfüllt das Coulomb-Feld die Bedingung bzw. die Forderung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} D(r) = \frac{q}{4\pi} \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} = 0.$$

¹Zitiert aus: Rainer J. Jelitto, Studententext, *Elektrodynamik – Theoretische Physik 3*, 3. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden, 1994, Seite 51.

²Der Fluss von \vec{D} durch eine beliebige geschlossene Fläche *entspricht* dem Fluss \mathfrak{F} des elektrischen Feldes \vec{E} durch diese geschlossene Fläche gemäß dem

$$\text{Gauß'schen Gesetz} \quad \mathfrak{F} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^0 \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{\text{innen}},$$

wobei q_{innen} die Gesamtladung innerhalb der geschlossenen Fläche ist.

Wir betrachten das \vec{D} -Feld einer Punktladung und bilden dessen Rotation in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{D} &= \frac{q}{4\pi} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{q}{4\pi} \begin{pmatrix} \left[-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2yz \right] - \left[-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2zy \right] \\ \left[-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2zx \right] - \left[-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2xz \right] \\ \left[-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2xy \right] - \left[-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2yx \right] \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \vec{D} = \vec{0}.$$

Jetzt bilden wir die Divergenz des \vec{D} -Feldes einer Punktladung unter Verwendung von $(x^2 + y^2 + z^2) = r^2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{2x}{r^5} \cdot x \right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{2y}{r^5} \cdot y \right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{2z}{r^5} \cdot z \right) \\ &= \frac{(r^2 - 3x^2) + (r^2 - 3y^2) + (r^2 - 3z^2)}{r^5} = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Das Ergebnis (6.5) steht nicht im Widerspruch zu (6.3):

Betrachten wir nämlich ein Gebiet des \vec{D} -Feldes, das den Ort der Ladung nicht enthält, so ist dieses Gebiet 2-zusammenhängend³. In einem derartigen Gebiet gilt $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, sodass das Volumenintegral (6.4) dann die Form $\int_V \operatorname{div} \vec{D} \, dV = 0$ hat.

Betrachten wir jedoch ein Gebiet des \vec{D} -Feldes, das den Ort der Punktladung q beinhaltet, so ist dieses Gebiet nicht 2-zusammenhängend, weil das \vec{D} -Feld am Ort der Punktladung divergiert, also am Ort der Punktladung eine Singularität besitzt. Wir müssen dann für die Divergenz die inhomogene Maxwell'sche Gleichung (6.3) verwenden, sodass das Volumenintegral (6.4) die Form $\int_V \operatorname{div} \vec{D} \, dV = q$ annimmt. Man stellt fest, dass der Beitrag zu diesem Volumenintegral allein aus der Singularität stammt.

⁴„Da das Problem nicht nur isotrop sondern auch *homogen* ist, können wir auch sofort die Lösung für den Fall angeben, daß die Punktladung nicht in $\vec{r} = \vec{0}$, sondern in $\vec{r} = \vec{r}_0$ liegt; wir erhalten dann einfach

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|^3} (\vec{r} - \vec{r}_0),$$

und aus dem Superpositionsprinzip folgt weiter das \vec{D} -Feld für *endlich viele Ladungen* q_i an den Orten \vec{r}_i zu

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_i q_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i). “$$

³Ein Gebiet im \mathbb{R}^3 ist 2-zusammenhängend, wenn sich *jede* geschlossene Fläche innerhalb dieses Gebiets auf einen Punkt zusammenziehen lässt, ohne dabei das Gebiet zu verlassen.

⁴Zitiert aus: Rainer J. Jelitto, Studententext, *Elektrodynamik – Theoretische Physik 3*, 3. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden, 1994, Seite 52.

7 Selbstwechselwirkung, Selbstkraft, Selbstenergie, Energieinhalt einer Ladungsverteilung

Quelle:

Rainer J. Jelitto, Studententext, *Elektrodynamik – Theoretische Physik 3*, 3. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden, 1994:

Abschnitt 3.2 *Punktladungen im Vakuum*, Seite 50 bis Seite 56,

Abschnitt 3.4 *Energiebetrachtungen; die elektrische Feldenergie*, Seite 60 bis Seite 64,

Lösung L3.2, Seite 322.

Wir diskutieren die Begriffe Selbstwechselwirkung, Selbstkraft und Selbstenergie anhand der Elektrostatik, nämlich am Beispiel positiver Punktladungen im Vakuum. Die Argumentation gilt analog auch beispielsweise für Verteilungen ungleichnamiger Punktladungen und für Verteilungen von Punktmassen.

Das **Coulomb'sche Kraftgesetz** lautet

$$\vec{F}_{21} = q_2 \cdot \vec{E}(\vec{r}_2) = q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 \cdot q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \vec{e}_{21} . \quad (7.1)$$

Es beschreibt die Kraft, die das \vec{E} -Feld der am Ort \vec{r}_1 gelegenen Punktladung q_1 auf eine Punktladung q_2 am Ort \vec{r}_2 ausübt. Umgekehrt übt das \vec{E} -Feld der am Ort \vec{r}_2 gelegenen Punktladung q_2 auf die Punktladung q_1 am Ort \vec{r}_1 die Kraft

$$\vec{F}_{12} = q_1 \cdot \vec{E}(\vec{r}_1) = q_1 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \vec{e}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

aus. Wie wir sehen, gilt hier das 3. Newton'sche Axiom

$$\text{actio gegengleich reactio} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} .$$

Und wie wir an (7.1) erkennen, ist das \vec{E} -Feld, das eine am Ort \vec{r}_1 gelegene Punktladung q_1 an einem Ort $\vec{r}_2 \neq \vec{r}_1$ erzeugt

$$\vec{E}(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \vec{e}_{21} . \quad (7.2)$$

Wie sieht dieses \vec{E} -Feld aber am Ort der Ladung q_1 selbst aus? Betrachten wir also den Fall

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{0} , \\ |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = 0 . \end{cases}$$

(7.2) erhält dann die Gestalt

$$\vec{E}(\vec{r}_2 = \vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{0}}{|0|^3} . \quad (7.3)$$

Dieser Ausdruck ist nicht definiert und kann wie folgt gedeutet werden:

- Betrachten wir allein den Nullvektor im Zähler, so besitzt das \vec{E} -Feld am Ort der felderzeugenden Punktladung keine definierte Richtung, d. h., die Gerichtetheit des Feldes geht im Grenzübergang $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \rightarrow 0$ verloren.
- Betrachten wir allein den Nenner $|0|^3 = 0$, so divergiert der Betrag des \vec{E} -Feldes am Ort der felderzeugenden Punktladung, d. h., der Betrag des \vec{E} -Feldes wird dort unendlich groß.

Jetzt könnte man argumentieren, dass das von der Punktladung q_1 erzeugte \vec{E} -Feld auf q_1 im Sinne einer **Selbstwechselwirkung** einwirkt, also eine Kraft im Sinne einer **Selbstkraft** auf q_1 ausübt gemäß

$$\vec{F}_{11} = q_1 \cdot \vec{E}(\vec{r}_1) = q_1 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_1|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1^2 \frac{\vec{0}}{0^3}.$$

Berücksichtigen wir jedoch die Deutung von (7.3), so kann diese Selbstkraft physikalisch nicht relevant sein. Eine unendlich große Kraft ohne definierte Richtung ist physikalisch nicht sinnvoll. Sie wäre nämlich unter den Gesichtspunkten der Statik mit einer unendlich großen potentiellen Energie verknüpft und unter den Gesichtspunkten der Dynamik wegen ihrer nicht definierten Richtung wirkungslos.

Die Erzeugung eines \vec{E} -Feldes am Ort \vec{r} durch mehrere Punktladungen q_i an den Orten \vec{r}_i geschieht nach dem **Superpositionsprinzip** wie folgt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n q_n \frac{\vec{r} - \vec{r}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^3} \quad \text{für } \vec{r}_n \neq \vec{r}. \quad (7.4)$$

Das \vec{E} -Feld (7.4) liefert das Potential $\Phi(\vec{r})$ einer Verteilung von Punktladungen $q_n(\vec{r}_n)$ ebenfalls nach dem Superpositionsprinzip:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n q_n \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \quad \text{für } \vec{r}_n \neq \vec{r}. \quad (7.5)$$

Der Zusammenhang zwischen (7.4) und (7.5) ergibt sich aus dem **Poisson-Integral**

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \varrho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (7.6)$$

mit der Gesamtladung

$$q = \int \varrho(\vec{r}) dV \quad (7.7)$$

einer **kontinuierlichen Ladungsverteilung** und mit der beschränkten elektrischen Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad } \Phi(\vec{r}) = -\nabla_r \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \varrho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \varrho(\vec{r}') \underbrace{\left(-\nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \varrho(\vec{r}') \overbrace{\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}. \end{aligned}$$

Der **Energieinhalt** E eines **Punktladungssystems** wird definiert als die Arbeit, die erforderlich ist, um dieses System aus Punktladungen zu installieren. Dabei werden die Ladungen q_n aus dem Unendlichen kommend nacheinander zu ihrer Position \vec{r}_n im System verschoben. Wie üblich wählen wir für das Potential $\Phi(\infty) \stackrel{!}{=} 0$.

Bei der Verschiebung der ersten Ladung q_1 an den Ort \vec{r}_1 wird noch keine Arbeit verrichtet, weil am Ort r_1 noch kein \vec{E} -Feld existiert. Dieses etabliert sich erst bei Vorhandensein der ersten Ladung mit dem daraus resultierenden Potential Φ_1 . Für q_1 erhalten wir also den Energiebeitrag

$$E_1 = 0.$$

Bei der Verschiebung der zweiten Ladung q_2 an der Ort \vec{r}_2 im Potential Φ_1 wird dann schon die Arbeit

$$E_2 = q_2 \cdot \Phi_1(\vec{r}_2) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right)$$

verrichtet. Aus der Anwesenheit von q_1 und q_2 resultiert das Potential

$$\Phi_1(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right),$$

in dem dann die dritte Ladung q_3 unter Verrichtung der Arbeit E_3 an den Ort \vec{r}_3 verschoben wird:

$$E_3 = q_3 \cdot \left(\Phi_1(\vec{r}_3) + \Phi_2(\vec{r}_3) \right) = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right).$$

Für die Verschiebung der Ladung q_n nach \vec{r}_n benötigt man schließlich die Energie

$$E_n = q_n \sum_{\substack{m \\ (m < n)}} \Phi_m(\vec{r}_n) = \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_{\substack{m \\ (m < n)}} \frac{q_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} \right).$$

Der Energieinhalt eines Punktladungssystems, installiert aus N Punktladungen, ist damit

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=2}^N E_n = \sum_{n=2}^N q_n \sum_{\substack{m \\ (m < n)}} \Phi_m(\vec{r}_n) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=2}^N q_n \sum_{\substack{m \\ (m < n)}} \frac{q_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Diese Doppelsumme lässt sich vereinfachen, wenn wir auch in der vereinfachten Schreibweise dafür sorgen, dass die Terme $n = m$ unterdrückt werden:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m \neq n)}}^N q_n \Phi_m(\vec{r}_n) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{m,n=1 \\ (m \neq n)}}^N \frac{q_n q_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|}. \quad (7.9)$$

Wir veranschaulichen (7.9) für $N = 4$, indem wir alle sich aus (7.9) ergebenden Summanden auflisten. Aus Bequemlichkeit vernachlässigen wir dabei den Vorfaktor $\frac{1}{8\pi\epsilon_0}$:

$$\begin{array}{cccc}
 \frac{q_1 q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_1|} & \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} & \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} & \frac{q_1 q_4}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|} \\
 \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} & \frac{q_2 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_2|} & \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} & \frac{q_2 q_4}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_4|} \\
 \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} & \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} & \frac{q_3 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_3|} & \frac{q_3 q_4}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|} \\
 \frac{q_4 q_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|} & \frac{q_4 q_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|} & \frac{q_4 q_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|} & \frac{q_4 q_4}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_4|}
 \end{array}$$

Mit $\frac{q_n q_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} = \frac{q_m q_n}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|}$ erklärt sich der in (7.9) aufgetretene Vorfaktor $\frac{1}{2}$, denn in (7.8) werden nur die Summanden links-unterhalb der Hauptdiagonalen berücksichtigt. Die grau hinterlegten ($n = m$)-Terme divergieren und werden ignoriert, weil sie in Analogie zur Selbstwechselwirkung bzw. Selbstkraft die physikalisch nicht sinnvolle **Selbstenergie** beschreiben.

Unter Anwendung von (7.7) auf (7.9) ist der **Energieinhalt einer kontinuierlichen Ladungsverteilung** mit beschränkter Ladungsdichte wie folgt definiert:

$$E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int dV \int dV' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int dV \rho(\vec{r}) \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (7.10)$$

Im Fall einer kontinuierlichen Ladungsverteilung ist die Selbstenergie endlich und im Integral (7.10) mit inbegriffen.

Wir zeigen, dass das Integral (7.10) existiert, also endlich ist bzw. nicht divergiert, obwohl es die Selbstenergie beinhaltet. Dazu betrachten wir eine kontinuierliche Ladungsverteilung, die vollständig im Innern einer Kugel \mathcal{K} mit dem Radius R um den Nullpunkt liegt. Wenn die zugehörige Ladungsdichte absolut beschränkt ist, können wir unter der Annahme, dass (7.10) nicht divergiert, für (7.10)

$$|E| \leq \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[\text{Max } \rho(\vec{r}) \right]^2 \int_{\mathcal{K}} dV \int_{\mathcal{K}} dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} < \infty$$

schreiben. Die Verwendung von Kugelkoordinaten mit $|\vec{r}| = r$ und $|\vec{r}'| = r'$ und des

$$\text{Kosinussatzes } c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma}$$

mit $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{c}| = c$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \gamma$

$$\implies \vec{a} - \vec{b} = \vec{r} - \vec{r}', \quad a = r, \quad b = r', \quad \sphericalangle(\vec{r}, \vec{r}') = \vartheta' \quad \Rightarrow \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cdot \cos \vartheta'}$$

liefert daraus unter Beachtung von $r \not\leq 0$ und $r' \not\leq 0$

$$|E| \leq \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[\text{Max } \rho \right]^2 \int_{\mathcal{K}} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \int_{\mathcal{K}} r'^2 \sin \vartheta' \, dr' \, d\vartheta' \, d\varphi' \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cdot \cos \vartheta'}} < \infty.$$

Der Winkel ϑ' ist hier o.B.d.A. der von \vec{r} und \vec{r}' eingeschlossene Winkel. Im Folgenden vernachlässigen wir aus Bequemlichkeit den Vorfaktor $\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[\text{Max } \rho \right]^2$ und betrachten nur den Integralausdruck

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta}_{=4\pi} \int_0^R r^2 \, dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'}_{=2\pi} \int_0^{\pi} \sin \vartheta' \, d\vartheta' \int_0^R r'^2 \, dr' \left(r^2 + r'^2 - 2r r' \cdot \cos \vartheta' \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 8\pi^2 \int_0^R r^2 dr \int_0^R r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' (r^2 + r'^2 - 2r r' \cdot \cos \vartheta')^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.11)$$

Durch die Substitution $\cos \vartheta' = \eta$ bzw.

$$\frac{d \cos \vartheta'}{d\vartheta'} = -\sin \vartheta' \Leftrightarrow \sin \vartheta' d\vartheta' = -d \cos \vartheta'$$

$$\Rightarrow \int_{\vartheta'=0}^{\pi} \dots \sin \vartheta' d\vartheta' = - \int_{\cos \vartheta'=1}^{-1} \dots d \cos \vartheta' = \int_{-1}^{+1} \dots d \cos \vartheta' = \int_{-1}^{+1} \dots d\eta$$

vereinfacht sich das Integral (7.11) zu

$$8\pi^2 \int_0^R r^2 dr \int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^{+1} (r^2 + r'^2 - 2r r' \cdot \eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta.$$

Die Teillösung dieses Integrals bezüglich η erfolgt gemäß

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} \quad (\text{siehe Integraltabelle}) :$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d\eta}{\sqrt{(-2r r') \eta + (r^2 + r'^2)}} = \frac{2 \cdot \sqrt{(-2r r') \eta + (r^2 + r'^2)}}{-2r r'} \Big|_{\eta=-1}^{+1}$$

$$= - \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \eta}}{r r'} \Big|_{\eta=-1}^{+1} = - \frac{\sqrt{(r-r')^2}}{r r'} + \frac{\sqrt{(r+r')^2}}{r r'}$$

$$= \frac{|r+r'| - |r-r'|}{r r'}.$$

Einsetzen dieser Teillösung in (7.11) verifiziert unsere Annahme:

$$8\pi^2 \int_0^R r^2 dr \int_0^R r'^2 dr' \frac{|r+r'| - |r-r'|}{r r'} = 8\pi^2 \int_0^R r dr \int_0^R r' dr' (|r+r'| - |r-r'|) < \infty. \quad \square$$

Interesshalber lösen wir das Integral vollständig. Wegen der Absolutbeträge im Integranden lässt sich das Integral leider nicht ohne weiteres lösen. Wir müssen deshalb für den Integranden die Fallunterscheidung

$$|r+r'| - |r-r'| = \begin{cases} (r+r') - (r-r') = 2r' & \text{für } r' \leq r, \\ (r+r') - (r'-r) = 2r & \text{für } r' \geq r \text{ bzw. } r \leq r' \end{cases}$$

vornehmen und das Integral hinsichtlich des Integrationsbereichs gemäß

$$\int_0^R dr \dots \int_0^R dr' \dots = \underbrace{\int_0^R dr \dots \int_{r'=0}^{r'=r} dr' 2r' \dots}_{r' \leq r} + \underbrace{\int_{r=0}^{r=r'} dr 2r \dots \int_0^R dr' \dots}_{r \leq r'}$$

in zwei Glieder aufspalten:

$$r' \leq r \Rightarrow 8\pi^2 \int_0^R r dr \int_0^r r' dr' 2r' = 8\pi^2 \int_0^R r dr \cdot \frac{2}{3} r^3 = 8\pi^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot R^5$$

$$= \frac{16\pi^2}{15} R^5$$

und völlig analog

$$\begin{aligned}
 r \leq r' &\Rightarrow 8\pi^2 \int_0^{r=r'} r \, dr \int_0^R r' \, dr' 2r = 8\pi^2 \int_0^R r' \, dr' \int_0^{r=r'} r \, dr 2r \\
 &= \frac{16\pi^2}{15} R^5 .
 \end{aligned}$$

Es gilt also in der Summe

$$8\pi^2 \int_0^R r \, dr \int_0^R r' \, dr' (|r+r'| - |r-r'|) = \frac{16\pi^2}{15} R^5 + \frac{16\pi^2}{15} R^5 = \frac{32\pi^2}{15} R^5$$

und damit letztlich für den Energieinhalt der kugelförmigen kontinuierlichen Ladungsverteilung mit dem Radius R

$$|E| \leq \frac{1}{8\pi\epsilon_0} (\text{Max } \varrho)^2 \int_{\mathcal{K}} dV \int_{\mathcal{K}} dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} (\text{Max } \varrho)^2 R^5 < \infty . \quad \square$$

Mit dem Poisson-Integral (7.6) lässt sich (7.10) vereinfachen zu

$$E = \frac{1}{2} \int dV \varrho(\vec{r}) \Phi(\vec{r})$$

und mit der **Poisson-Gleichung**

$$\Delta_r \Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \varrho(\vec{r})$$

schließlich zu

$$E = -\frac{\epsilon_0}{2} \int dV \Phi(\vec{r}) \Delta \Phi(\vec{r}) , \quad (7.12)$$

wobei über den gesamten unbegrenzten Raum integriert wird. Wegen der Isotropie des Potentials Φ bietet sich dabei die Integration in **Kugelkoordinaten** an.

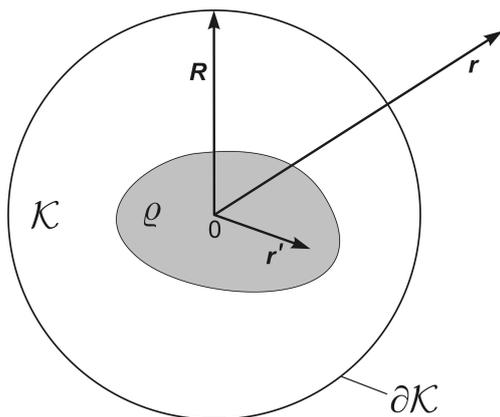


Abb. 7.1 Eine beschränkte kontinuierliche Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte $\varrho(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}')$ erstreckt sich um den Koordinatenursprung und vollständig innerhalb einer Kugel \mathcal{K} mit dem Radius $|\vec{R}| = R$. Der Kugelmittelpunkt soll dabei mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen.

Man integriert also zuerst über eine Kugel \mathcal{K} mit dem Radius R und bildet anschließend den Grenzwert für $R \rightarrow \infty$ (siehe Abbildung 7.1). Dazu wenden wir die **1. Green'sche Identität**

$$\oint_{\partial V} (\Phi \nabla \Psi) \cdot d\vec{S} = \int_V (\Phi \Delta \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dV$$

mit $\Psi = \Phi$ und

$$\text{grad } \Phi \cdot \vec{n}^0 =: \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad \Rightarrow \quad \text{grad } \Phi \cdot d\vec{S} = \text{grad } \Phi \cdot \vec{n}^0 dS = \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$$

auf (7.12) an, sodass schließlich

$$E = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{\partial \mathcal{K}} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathcal{K}} \text{grad } \Phi \cdot \text{grad } \Phi dV \right] \quad (7.13)$$

resultiert.

Wir zeigen, dass in (7.13) das Flächenintegral über die geschlossene Kugeloberfläche $\partial \mathcal{K}$ im Limes $R \rightarrow \infty$ verschwindet. Dafür benötigen wir die Taylor-Entwicklung

$$\varphi(\vec{r}) = \alpha \left[\frac{1}{r_0} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{r_0^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}_0)^2 - r^2 r_0^2}{r_0^5} + \dots \right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \varphi(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

aus dem Kapitel 4. Allerdings müssen wir einige Anpassungen an den Kontext vornehmen. Wir schreiben für das Potential nicht φ sondern Φ und verwenden statt des Index 0 den Strichindex. Außerdem entwickeln wir Φ nicht nach \vec{r} an der Stelle $\vec{r} = \vec{0}$ sondern nach \vec{r}' an der Stelle $\vec{r}' = \vec{0}$. Das bedeutet, dass sich jetzt die Punktladung q im Koordinatenursprung befindet. Auch wenn diese Entwicklung nicht das Potential einer Ladungsverteilung sondern das Potential nur *einer* Punktladung beschreibt, dürfen wir sie hier dennoch verwenden, weil sowohl für ein System aus Punktladungen als auch für kontinuierliche Ladungsverteilungen das Superpositionsprinzip gilt und weil für vergleichsweise große R die Abstände zwischen den Punktladungen bzw. die räumliche Ausdehnung der Ladungsverteilungen vernachlässigt werden können.

Bei dieser angepassten Taylor-Entwicklung stellen wir eine Symmetrie bezüglich der Vertauschung $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}'$ fest und erhalten

$$\Phi(\vec{r} - \vec{r}') = \alpha \left[\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{r^5} + \dots \right], \quad \alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Unter Berücksichtigung von r im Zähler der Entwicklungsglieder hat das Potential Φ die Form

$$\Phi = \frac{\alpha}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}),$$

sodass bei hinreichend großem R wegen $\vec{n}^0 = \vec{e}_r$ auf der Kugeloberfläche $\partial \mathcal{K}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\alpha}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3})$$

gilt. Setzen wir jetzt

$$\Phi \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \left[\frac{\alpha}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right] \cdot \left[-\frac{\alpha}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \right] = -\frac{\alpha^2}{r^3} - \mathcal{O}(r^{-4})$$

in das Oberflächenintegral von (7.13) ein und benutzen wir dabei das Kugeloberflächenelement $dS = R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ mit $r = \text{const} = R$, so sehen wir, dass das Oberflächenintegral im Limes $R \rightarrow \infty$ verschwindet:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{\partial \mathcal{K}} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \right] &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{\partial \mathcal{K}} \left[-\frac{\alpha^2}{R^3} - \mathcal{O}(R^{-4}) \right] R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \right\} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 4\pi \left[\frac{\alpha^2}{R} + \mathcal{O}(R^{-2}) \right] \right\} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Weil das Oberflächenintegral in (7.13) keinen Beitrag zum Energieinhalt der Ladungsverteilung leistet, verbleibt schließlich

$$E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int dV \operatorname{grad} \Phi \cdot \operatorname{grad} \Phi = \frac{\varepsilon_0}{2} \int dV \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \int dV \vec{E} \cdot \vec{D} = \int w(\vec{r}) dV \quad (7.14)$$

mit der

$$\text{Energiedichte } w(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}(\vec{r}) .$$

Auf dem Weg von (7.10) nach (7.14) sind die Ladungen bzw. die Ladungsverteilung als Quelle der Energie „verloren gegangen“. Das bedeutet, dass die Felder selbst als Energieträger angesehen werden und auch in Gebieten bzw. Raumbereichen eine Energiedichte $w \neq 0$ besitzen können, wo keine Ladungen vorhanden sind.

Wir vollenden dieses Kapitel mit einem Zitat¹ zum Wesen der *Energiedichte* des \vec{E} -Feldes:

„Wegen $w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}$ kann sie darüberhinaus sicherlich nirgends negativ werden und damit muß auch der Energieinhalt selbst stets $E \geq 0$ sein. Das scheint zunächst ein eklatanter Widerspruch zu unserem ursprünglichen Befund zu sein, daß der Energieinhalt eines Systems aus zwei ungleichnamigen Punktladungen negativ ist: Man *erhält* Arbeit aus dem System, wenn man den Abstand der Ladungen vermindert.

Aber bei dieser Betrachtung haben wir die *Selbstenergie* im Gegensatz zu den Formeln im kontinuierlichen Fall nicht berücksichtigt. Deren Beitrag ist es, der die Energiedichte permanent nicht-negativ macht.

Lassen Sie uns zur Veranschaulichung das Energieintegral im Falle einer Punktladung q im Ursprung explizit ausführen. Wenn unsere Argumentation richtig ist, muß es divergieren. Das tut es auch tatsächlich, denn es ist proportional zu

$$\int dV \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \int d\Omega \int_0^\infty dr r^2 r^{-4} = 4\pi r^{-1} \Big|_0^\infty$$

und divergiert an der unteren Grenze.²

Für kontinuierliche beschränkte Ladungsverteilungen hingegen liefert es einen endlichen Wert.“

¹Zitiert aus: Rainer J. Jelitto, Studententext, *Elektrodynamik – Theoretische Physik 3*, 3. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden, 1994, Seite 64.

²Auf einen Blick: $\int dV \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \int dV \frac{r^2}{r^6} = \int \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \int_0^\infty r^2 dr \frac{r^2}{r^6} = 4\pi \int_0^\infty r^{-2} dr = -4\pi r^{-1} \Big|_0^\infty$.

8 Maxwell'sche Gleichungen, Lorentz-Kraft, Induktionsgesetz

Der schottische Physiker James Clerk Maxwell erarbeitete die theoretischen Grundlagen der Verknüpfung von Elektrizität und Magnetismus, der Elektrodynamik, und fasste sie zu einem Satz aus vier Differentialgleichungen zusammen, welche er 1864 erstmals veröffentlichte. Diese vier Grundgleichungen der Elektrodynamik sind die heute nach ihm benannten Maxwell'schen Gleichungen, auch kurz Maxwell-Gleichungen genannt. Sie lauten in der kompakten Differentialform für das Vakuum¹:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 (2) \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\
 (3) \quad \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho \\
 (4) \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{j}
 \end{aligned}$$

(1) und (2) sind homogene und (3) und (4) sind inhomogene lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Das Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ bzw. \vec{E} -Feld ist die elektrische Feldstärke, das Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ bzw. \vec{B} -Feld das Magnetfeld². ϱ ist die elektrische Ladungsdichte (elektrische Ladung pro Volumen), eine lokale Größe bzw. ein skalares Feld im Raum. $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ist die elektrische Stromdichte (elektrische Ladung pro Fläche und Zeit), eine lokale und momentane Größe. Die Stromdichte ist ein Vektorfeld, deren Vektoren in Driftrichtung der Ladungsträger zeigen. Der Betrag von \vec{j} entspricht der Ladungsmenge, die in einem bestimmten Raumpunkt pro Zeiteinheit durch die senkrecht zur Driftrichtung ausgerichtete Flächeneinheit transportiert wird.

Die „fünfte Grundgleichung“ der Elektrodynamik ist die **Lorentz-Kraft**³, die Kraft, die \vec{E} - und \vec{B} -Feld auf eine Ladung q ausüben:

$$(5) \quad \vec{F}_L = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Um uns über die wesentlichen Aussagen der Maxwell-Gleichungen etwas mehr Klarheit zu verschaffen, überführen wir sie von der Differentialform in die Integralform. Dabei verwenden wir zwei wichtige Sätze der Vektoranalysis, den **Stokes'schen Satz**

$$\int_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

¹Diese aus didaktischen Gründen vorgenommene bzw. vereinfachende Beschränkung auf das Vakuum werden wir im Kapitel 9 aufgeben.

² $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ist die magnetische Flussdichte mit der magnetischen Permeabilität μ und der magnetischen Feldstärke \vec{H} . Üblicherweise wird aber das \vec{B} -Feld als Magnetfeld bezeichnet.

³Lorentz-Kraft, Lorentz-Kontraktion und Lorentz-Transformation sind benannt nach dem niederländischen Physiker Hendrik Antoon LORENTZ (1853-1928).

und den **Gauß'schen Satz**

$$\int_V \operatorname{div} \vec{u} \, dV = \oint_A \vec{u} \cdot d\vec{A}.$$

$\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{r}$ ist ein sog. Umlaufintegral bzw. die Zirkulation von \vec{u} . Es handelt sich hierbei um das Linienintegral von \vec{u} entlang des gesamten Randes C der Fläche A . Das Linienelement auf der Kurve C wird mit $d\vec{r}$ bezeichnet.

$\oint_A \vec{u} \cdot d\vec{A}$ ist ein sog. Hüllenintegral. Es liefert den Vektorfluß von \vec{u} durch den Rand A des Volumens V bzw. durch die das Volumen V einhüllende Fläche A . Das vektorielle Flächenelement auf der Fläche A wird mit $d\vec{A}$ bezeichnet.

$$(1) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow$$

Es gibt keine magnetischen Ladungen bzw. Monopole, d. h., magnetische Feldlinien haben keinen Anfang und kein Ende. Daraus folgt, dass der magnetische Fluss durch die das Volumen V einhüllende Fläche gleich Null ist.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} \, dV = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0.$$

$$(2) \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Faraday-Induktionsgesetz} \quad U = -\dot{\Phi}_{mag}$$

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = U = \int_A -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \Phi_{mag}.$$

Die Zirkulation von \vec{E} auf dem Rand C um die Fläche A ist gleich der induzierten Spannung, die an einer in diesem Rand gelegenen Leiterschleife messbar wäre. Die induzierte Spannung wiederum ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des \vec{B} -Feld-Flusses durch die Fläche A , hervorgerufen durch die zeitliche Änderung von \vec{B} oder/und A .

$$(3) \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \Rightarrow \quad \text{Gauß'sches Gesetz}$$

Elektrische Ladungen sind Quellen des \vec{E} -Feldes bzw. Ursprung oder Ende der \vec{E} -Feld-Linien.

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} Q.$$

Der Fluss des \vec{E} -Feldes durch die geschlossene Fläche um ein Volumen V liefert die Gesamtladung Q in diesem Volumen.

$$(4) \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \text{Maxwell-Ampère-Durchflutungsgesetz}$$

Elektrische Ströme und zeitlich veränderliche \vec{E} -Felder erzeugen Magnetfelder.

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

Das Umlaufintegral in einem \vec{B} -Feld liefert die Stromstärke $I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$ durch die von C eingeschlossene Fläche A , falls elektrische Ladungsträger entsprechend der Stromdichte \vec{j} die Fläche A durchströmen, und den sog. **Verschiebungsstrom** $\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$ entsprechend der zeitlichen Änderung des Flusses des \vec{E} -Feldes durch die Fläche A .

Der Maxwell-Gleichung (3) entnehmen wir, dass im Laborsystem ruhende elektrische Ladungen nur elektrische Felder hervorrufen. Die Maxwell-Gleichung (4) zeigt uns, dass zeitlich veränderliche elektrische Felder und bezüglich des Laborsystems entsprechend der Stromdichte \vec{j} bewegte Ladungen im Laborsystem Magnetfelder erzeugen.

Auf Grund experimenteller Erfahrung können wir davon ausgehen, dass die Lorentz-Kraft (5) in jedem Inertialsystem gilt. Betrachten wir eine Ladung q , die sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} durch ein \vec{B} -Feld im Labor- bzw. Ruhesystem bewegt, dann wirkt dort mit $\vec{E} = 0$ die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q (\vec{v} \times \vec{B})$ auf die bewegte Ladung. Im Ruhesystem der Ladung ist deren Geschwindigkeit jedoch $v = 0$, so dass in diesem Fall die Lorentz-Kraft auf die Ladung anscheinend verschwindet. Wir haben hier einen Widerspruch zum Relativitätsprinzip konstruiert, der offenbar nur zu lösen ist, wenn man annimmt, dass \vec{E} - und \vec{B} -Feld vom Bezugssystem abhängen.

Stellen wir uns vor, im Laborsystem S existieren das elektrische Feld \vec{E} und das Magnetfeld \vec{B} . Weiterhin bewege sich eine Ladung q geradlinig-gleichförmig mit der Geschwindigkeit \vec{v} relativ zu S . Dann wirkt im Laborsystem S auf die Ladung q die Lorentz-Kraft \vec{F}_L :

$$S \text{ (Laborsystem)} : \quad \vec{E}, \vec{B}, q \text{ bewegt mit } \vec{v} \quad \Rightarrow \\ \vec{F}_L = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) . \quad (8.1)$$

Jetzt gehen wir in das momentane Ruhesystem S' dieser Ladung q . In S' wirkt auf die Ladung q die Lorentz-Kraft \vec{F}'_L :

$$S' \text{ (Ruhesystem von } q) : \quad \vec{E}', \vec{B}', q \text{ ruht gemäß } \vec{v}' = \vec{0} \quad \Rightarrow \\ \vec{F}'_L = q (\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}') = q \vec{E}' .$$

Nichtrelativistisch betrachtet, also für $v \ll c$, gilt in diesem Fall für die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}'_L = \vec{F}_L \quad (v \ll c)$$

und folglich die Transformation

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (v \ll c) .$$

Diese Transformation zeigt für $v \ll c$, wie sich die Felder zueinander verhalten, wenn das elektrische Feld in einem anderen Inertialsystem gemessen wird als das Magnetfeld. Relativistisch betrachtet taucht in den Transformationsgleichungen der Lorentz-Faktor $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ auf. Ein Beispiel: Wenn sich das Inertialsystem S' geradlinig-gleichförmig mit der Geschwindigkeit v längs der x -Achse des Inertialsystems S bewegt, gilt für die y -Komponente des \vec{E}' -Feldes die Transformation $E'_y = \gamma (E_y - v B_z)$. Im Kapitel 11 werden wir darauf näher eingehen.

Betrachten wir jetzt einen Stabmagneten und einen elektrischen Leitungsdraht im Laborsystem:

Fall 1:

Magnet bewegt \Rightarrow Um den Magneten entsteht elektromagnetisches Feld ($\vec{B} + \vec{E}$).
 Leiter ruht \Rightarrow \vec{E} erzeugt nach dem **Induktionsgesetz** eine elektrische Spannung im Leiter und ggf. einen „Kreisstrom“, falls der Leiter einen Stromkreis bildet.

Fall 2:

Magnet ruht \Rightarrow Um den Magneten besteht nur ein \vec{B} -Feld, kein \vec{E} -Feld.
 Leiter bewegt \Rightarrow \vec{B} erzeugt die **Lorentz-Kraft** auf die mit dem Leiter bewegten Ladungen und ggf. einen „Kreisstrom“, falls der Leiter einen Stromkreis bildet.

„Das heißt aber: In dem zeitlich konstanten und räumlich variablen Feld \vec{B} wird durch die Bewegung der freien Ladungsträger mit dem Draht auf Grund der LORENTZ-Kraft auf diese Ladungsträger ein solcher Strom erzeugt, welcher mit dem Strom identisch ist, der durch die Spannung nach dem Induktionsgesetz bei bewegtem Magneten und ruhendem Draht hervorgerufen wird. Die Entwirrung dieser seltsam asymmetrischen Erklärung für einen experimentell vollkommen symmetrischen Effekt war für EINSTEIN der entscheidende Antrieb für seine Spezielle Relativitätstheorie.“⁴

Den Maxwell-Gleichungen (1) bis (4) ist nicht anzusehen, wie sie sich unter Lorentz-Transformation verhalten. Tatsächlich kann man aber durch Umformulierung der Maxwell-Gleichungen auf der Basis sog. elektromagnetischer Potentiale zeigen, dass sie unter Lorentz-Transformation forminvariant (kovariant) sind, d. h., dass sie ihre Form bei einem Wechsel des Bezugssystems nicht ändern. Die Maxwell-Gleichungen sind also von relativistischer Natur. Dem Relativitätsprinzip entsprechend gelten sie in jedem Inertialsystem.

Der Vollständigkeit halber zeigen wir noch, wie sich die Kontinuitätsgleichung aus den Maxwell-Gleichungen ergibt. Mit der Ableitung der Maxwell-Gleichung (3) nach der Zeit und mit der Divergenz der Maxwell-Gleichung (4) sowie unter Berücksichtigung von $1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$ erhalten wir

$$(3) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$(4) \Rightarrow \operatorname{div} \left(\operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} (\mu_0 \vec{j}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \vec{j},$$

sodass

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0}$$

Kontinuitätsgleichung .

⁴Zitiert aus: Helmut Günther, *Spezielle Relativitätstheorie – Ein neuer Einstieg in Einsteins Welt*, 1. Auflage, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2007, Seite 173.

8.1 Induktionsgesetz bei Relativbewegung zwischen Leiter und Magnet

Nach:

Wolfgang Nolting, Springer-Lehrbuch, *Grundkurs Theoretische Physik 3, Elektrodynamik*, 7. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 202 bis Seite 206,

Torsten Fließbach, *Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik II*, 4. Auflage, Elsevier-Spektrum, München, 2009, Seite 145 bis Seite 149.

Siehe auch die veranschaulichenden Gedankenexperimente zum Induktionsgesetz im Springer-Lehrbuch *Gerthsen – Physik* und entsprechende Abbildungen zum Induktionsgesetz im Internet.

Zu Beginn dieser Überlegungen vergegenwärtigen wir uns einige wichtige mathematische Zusammenhänge:

- Ein ruhendes (räumliches) Vektorfeld $\vec{B}(\vec{r})$ kann sich in jedem Raumpunkt \vec{r} zeitlich ändern. Es ist dann **explizit zeitabhängig** gemäß

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} B_x(x, y, z, t) \\ B_y(x, y, z, t) \\ B_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}.$$

- Bewegt sich dieses Vektorfeld außerdem noch mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, so ist es zusätzlich auch noch **implizit zeitabhängig** gemäß

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}(t), t) = \begin{pmatrix} B_x(x(t), y(t), z(t), t) \\ B_y(x(t), y(t), z(t), t) \\ B_z(x(t), y(t), z(t), t) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{B} = (\nabla\vec{B}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}.$$

- Der Unterschied zwischen partieller und totaler Ableitung am Beispiel der skalaren Feldfunktion $f(\vec{r}(t), t)$ bzw. $\tilde{f}(\vec{r}, t)$:

$$\text{partielle Abl.: } \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}f(\vec{r}(t), t)}_{\vec{r}(t) \text{ fest}},$$

$$\text{totale Abl.: } \frac{d}{dt}f(\vec{r}(t), t) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\tilde{f}(\vec{r}, t)}_{t \text{ fest}} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}f(\vec{r}(t), t)}_{\vec{r}(t) \text{ fest}}.$$

Mit $f(\vec{r}(t), t) = f(x(t), y(t), z(t), t) \Rightarrow \tilde{f}(\vec{r}, t) = \tilde{f}(x, y, z, t)$ ist dabei

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\tilde{f}(\vec{r}, t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}(x, y, z, t) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\tilde{f}(x, y, z, t) \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}\tilde{f}(x, y, z, t) \cdot \frac{dz}{dt} \\ &= \text{grad}\tilde{f} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \text{grad}\tilde{f} = (\vec{v} \cdot \nabla)\tilde{f}. \end{aligned}$$

Wie in der Physik üblich, setzen wir vereinfachend $\tilde{f} = f$ und schreiben für die totale Ableitung von $f(\vec{r}(t), t)$ kurz

$$\frac{df}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla)f + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

- Wir werden in diesem Abschnitt die folgende Beziehung aus der Vektoranalysis verwenden für $\vec{v} = \text{const}$ (in Richtung und Betrag) und unter Berücksichtigung von $\text{div}\vec{B} = 0$:

$$\text{rot}(\vec{B} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B} - \underbrace{(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{v}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{B} \text{div}\vec{v}}_{=0} - \underbrace{\vec{v} \text{div}\vec{B}}_{=0}$$

$$\Rightarrow (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B} = \text{rot}(\vec{B} \times \vec{v}),$$

sodass

$$\frac{d}{dt}\vec{B} = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \text{rot}(\vec{B} \times \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}. \quad (8.2)$$

- Eine Fläche A mit dem zugehörigen Flächenvektor \vec{A} wird definiert durch den Ortsvektor \vec{r} , der in einer für A charakteristischen Weise von zwei voneinander unabhängigen Parametern (Raumkoordinaten) u und w abhängt:

$$\vec{A} := \vec{r}(u, w) = \begin{pmatrix} x(u, w) \\ y(u, w) \\ z(u, w) \end{pmatrix}.$$

Die zeitliche Veränderung dieser Fläche erfolgt durch die zeitliche Änderung bzw. durch die Zeitabhängigkeit der beiden Flächenparameter u und w :

$$\vec{A}(t) := \vec{r}(u(t), w(t)) = \begin{pmatrix} x(u(t), w(t)) \\ y(u(t), w(t)) \\ z(u(t), w(t)) \end{pmatrix}.$$

- Flächenintegral:

$$\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{B}(\vec{r}(u, w)) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}(u, w)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, w)}{\partial w} \right)}_{=d\vec{A}} du dw. \quad (8.3)$$

Es handelt sich hierbei um den Fluss des Vektorfeldes \vec{B} durch die Fläche A .

- Zeitliche Ableitung eines Flächenintegrals, wobei \vec{B} explizit zeitabhängig und \vec{A} zeitunabhängig ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}(u, w), t) \cdot d\vec{A} &= \int_A \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}(u, w), t) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_w) du dw, \\ &= \int_A \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{A}. \end{aligned}$$

In diesem Fall darf die partielle Differentiation vor der Integration erfolgen.

Befindet sich eine Leiterschleife in einem Magnetfeld \vec{B} und ändern wir das \vec{B} -Feld, so wird nach der Maxwell-Gleichung (2), dem Induktionsgesetz, in der Leiterschleife eine elektrische Spannung U induziert. Hierbei bildet die Leiterschleife den Rand C der Fläche A und $\dot{\Phi}_{\text{mag}}$ ist die zeitliche Änderung des (magnetischen) Flusses von \vec{B} durch diese Fläche A .

Das Induktionsgesetz verlangt, dass die induzierte Spannung bzw. die entsprechende Feldstärke \vec{E} immer im momentanen Ruhesystem der Leiterschleife gemessen werden, und zwar am Ort \vec{r} des Laborsystems, wo sich die Leiterschleife zum Zeitpunkt der Messung befindet.

Beginnen wir zunächst mit dem einfachsten Fall, dass sowohl die Leiterschleife als auch der Magnet im Laborsystem ruhen, d. h. ortsfest sind:

- Das Magnetfeld sei ortsfest und explizit zeitabhängig gemäß $\vec{B}(\vec{r}, t)$.
- Die Leiterschleife sei stationär, d. h. sowohl ortsfest als auch forminvariant.
 $\Rightarrow C$ und A sind zeitunabhängig.
- In der Leiterschleife werden die Induktionsspannung U bzw. die elektrische Feldstärke \vec{E} gemessen.

In diesem Fall lautet das Induktionsgesetz

$$U = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{A}. \quad (8.4)$$

Das Induktionsgesetz in dieser Form (*keine Relativbewegung* zwischen Leiterschleife und Magnet) ist kovariant. Das bedeutet, dass es in dieser Form auch bei relativistischer Betrachtungsweise exakt ist, also in jedem Inertialsystem gleichermaßen gilt.

Jetzt sollen sich der Magnet mit seinem explizit zeitabhängigen Magnetfeld und die Leiterschleife relativ zueinander geradlinig-gleichförmig bewegen. Dabei sind die beiden folgenden möglichen Fälle äquivalent und symmetrisch zueinander:

- Das explizit zeitabhängige Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ist im Laborsystem ortsfest. – Die Leiterschleife bewegt sich geradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit \vec{v} im Laborsystem und damit relativ zum \vec{B} -Feld.
- Die Leiterschleife ist im Laborsystem ortsfest. – Das explizit zeitabhängige Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$ bewegt sich geradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit $-\vec{v}$ im Laborsystem und damit relativ zur Leiterschleife.

Mit der Abbildung 8.1 wird diese Symmetrie veranschaulicht und erläutert:

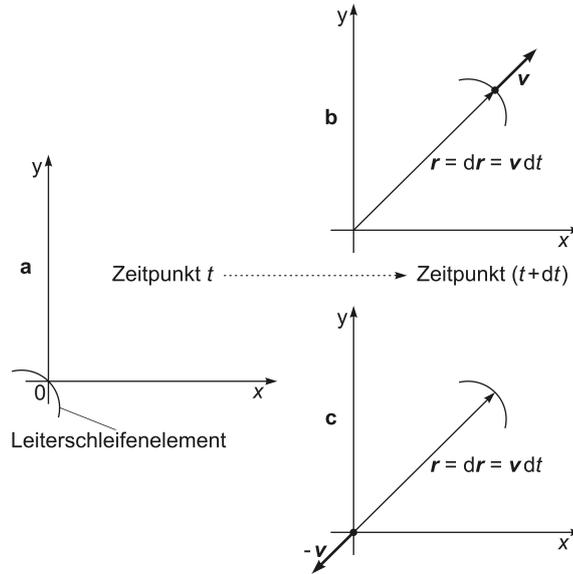


Abb. 8.1 Das x, y -Koordinatensystem sei das auf zwei Dimensionen eingeschränkte räumliche Ruhesystem des explizit zeitabhängigen Magnetfeldes $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$.

a) Zum Anfangszeitpunkt t befinde sich das Leiterschleifenelement im Ursprung der räumlichen Koordinaten des \vec{B} -Feldes.

b) Die Leiterschleife bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ relativ zu \vec{B} . Nach der Zeit dt befindet sich das Leiterschleifenelement am Ort $\vec{r} = \vec{r}(t)$ im Ruhesystem von \vec{B} und „sieht“ dort das Feld $\vec{B}(\vec{r}(t), t)$. An diesem Ort $\vec{r}(t)$ stellt das Leiterschleifenelement (in seinem eigenen Ruhesystem) die zeitliche Änderung $d\vec{B}(\vec{r}(t), t)/dt = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B} + \partial\vec{B}/\partial t$ des Magnetfeldes gemäß (8.2) fest.

c) In Umkehrung zu b) bewege sich jetzt das explizit zeitabhängige Magnetfeld $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ mit der Geschwindigkeit $-\vec{v} = -d\vec{r}/dt$ relativ zur Leiterschleife. Wie in b) befindet sich das Leiterschleifenelement nach der Zeit dt am Ort $\vec{r} = \vec{r}(t)$ im Ruhesystem von \vec{B} und „sieht“ dort das Feld $\vec{B}(\vec{r}(t), t)$. An diesem Ort $\vec{r}(t)$ stellt das Leiterschleifenelement (in seinem eigenen Ruhesystem) die zeitliche Änderung $d\vec{B}(\vec{r}(t), t)/dt = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{B} + \partial\vec{B}/\partial t$ des Magnetfeldes gemäß (8.2) fest.

In beiden genannten Fällen werden in der Leiterschleife (experimentell) die gleiche Spannung U bzw. die gleiche Feldstärke \vec{E} gemessen und in beiden Fällen erscheint das induzierende \vec{B} -Feld nicht nur explizit zeitabhängig sondern wegen der Relativbewegung zwischen Leiterschleife und Magnetfeld auch implizit zeitabhängig. Mit der totalen Ableitung (8.2) nimmt das Induktionsgesetz folglich in beiden Fällen die gleiche Form an:

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B}(\vec{r}(t), t) \cdot d\vec{A} \\
 &= -\int_A \frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{r}(t), t) \cdot d\vec{A} \\
 &= -\int_A \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{B} \times \vec{v}) \right] \cdot d\vec{A}.
 \end{aligned}$$

Die Aufteilung des Integrals ergibt

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} &= - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} - \int_A \text{rot}(\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} \\ &= \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{r} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}, \\ U = -\frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}} &= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_C (\vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (v \ll c). \quad (8.5)\end{aligned}$$

Demzufolge ist die Transformation zwischen der in der Leiterschleife gemessenen elektrischen Feldstärke \vec{E} und dem relativ dazu bewegten Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}(t), t)$

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{bzw.} \quad \vec{E} - \vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B} \quad (v \ll c). \quad (8.6)$$

In der Transformationsgleichung (8.6) ist \vec{E}' der Anteil des induzierten elektrischen Feldes \vec{E} , der allein aus der zeitlichen Änderung des Magnetfeldes in seinem Ruhesystem resultiert. Der Anteil $\vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}_v$ von \vec{E} hingegen entsteht allein aus der Relativbewegung zwischen Leiterschleife und Magnet. Wie wir sehen, ist das elektrische Feld \vec{E}' in (8.5) gleich dem elektrischen Feld \vec{E} in (8.4), wo sich Leiterschleife und Magnet gemäß $\vec{v} = \vec{0}$ relativ zueinander ruhen.

Allerdings gelten (8.5) und (8.6) nur für $v \ll c$. Im relativistischen Fall, also bei großen Relativgeschwindigkeiten v (insbesondere bei v nahe c) zwischen Leiterschleife und Magnet ist in den Transformationsgleichungen der Lorentz-Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

zu berücksichtigen. Wir werden darauf im Kapitel 11 zurückkommen.

Das in der Leiterschleife induzierte elektrische Feld treibt aber die dort befindlichen freien Ladungen q an mit Kraft

$$q \cdot \vec{E} = q \cdot \left[\vec{E}' + (\vec{v} \times \vec{B}) \right] = \vec{F}_L,$$

der **Lorentz-Kraft**. Hier wird der Zusammenhang zwischen der Maxwell-Gleichung (2), dem Induktionsgesetz, und der Lorentz-Kraft deutlich.

Das in der Leiterschleife C mit dem Ohm'schen Widerstand R induzierte elektrische Feld $\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_v$ bewirkt dort einen elektrischen Kreisstrom der Stärke

$$I = \frac{1}{R} U = \frac{1}{R} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r},$$

falls die Leiterschleife „kurzgeschlossen“ ist. Dieser induktionsbedingte Kreisstrom I wiederum erzeugt in Übereinstimmung mit der **Lenz'schen Regel** ein Magnetfeld, das seiner Ursache, dem Induktionsmagnetfeld, entgegenwirkt bzw. entgegengerichtet ist.

Als Beispiel wenden wir jetzt das Induktionsgesetz auf eine bewegte kreisförmige Leiterschleife an:⁵

- Das Magnetfeld sei im Laborsystem ortsfest und explizit zeitabhängig gemäß $\vec{B}(\vec{r}, t)$.
- Die Leiterschleife sei forminvariant kreisförmig und bewege sich geradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit \vec{v} im Laborsystem und somit auch bezüglich des Magnetfelds.
 $\Rightarrow C$ und A sind zeitabhängig gemäß $A(t)$.
- Im Ruhesystem der Leiterschleife wird die Induktionsspannung U bzw. die elektrische Feldstärke \vec{E} gemessen.

Aufgrund der Tatsache, dass sich die von der Leiterschleife eingeschlossene Kreisfläche A bewegt, ist diese zeitabhängig. Die Integralform der Maxwell-Gleichung (2) besitzt deshalb die Form

$$U = -\frac{d}{dt}\Phi_{\text{mag}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}(t). \quad (8.7)$$

Das in der Leiterschleife induzierte elektrische Feld \vec{E} besteht wieder aus zwei Anteilen, dem Anteil \vec{E}' allein aus der zeitlichen Änderung des Magnetfeldes $\vec{B}(\vec{r}, t)$ bei ortsfester Leiterschleife gemäß (8.4) und dem Anteil \vec{E}_v allein bedingt durch die Positionsänderung der Leiterschleife im Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Bei der Bestimmung von \vec{E}_v stützen wir uns auf die Abbildung 8.2.

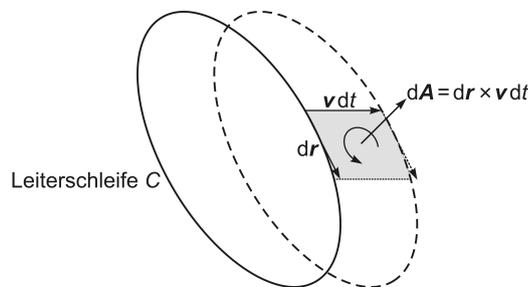


Abb. 8.2 Die Leiterschleife C bewege sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} relativ zum \vec{B} -Feld. (nach Fließbach 2009)

Wir sehen dort, dass jedes Linienelement $d\vec{r}$ der Leiterschleife C in der Zeit dt seine Position um die Strecke $\vec{v}dt$ ändert und dabei das vektorielle Flächenelement $d\vec{A} = d\vec{r} \times \vec{v}dt$ überstreicht. Die von der Leiterschleife in der Zeit dt überstrichene Fläche δA ist dann die Summe der Flächeninhalte aller vektoriellen Flächenelemente entlang C , d. h. die Mantelfläche eines Zylinders. Die von der Leiterschleife eingeschlossene ebene Fläche bildet zum Anfangszeitpunkt t die Bodenplatte und zum Zeitpunkt $t + dt$ die Deckplatte dieses Zylinders. Für die Induktion einer Spannung ist aber

⁵Siehe auch: Helmut Günther, *Spezielle Relativitätstheorie – Ein neuer Einstieg in Einsteins Welt*, 1. Auflage, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2007, Seite 173.

nicht die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses $d\Phi_M/dt$ durch die Mantelfläche verantwortlich sondern die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses

$$\frac{d\tilde{\Phi}_{\text{mag}}}{dt} = \frac{\Phi_2(t + dt) - \Phi_1(t)}{dt}$$

durch die Leiterschleife. Φ_2 ist dabei der magnetische Fluss durch die von der Leiterschleife begrenzte Fläche zum Zeitpunkt $t + dt$ und Φ_1 ist der magnetische Fluss durch dieselbe Fläche zum Anfangszeitpunkt t . Nun verschwindet aber wegen der Quellenfreiheit magnetischer Felder gemäß $\text{div}\vec{B} = 0$ stets der gesamte magnetische Fluss durch die (geschlossene) Oberfläche eines Körpers, unabhängig von seiner Gestalt und Ausdehnung. Folglich muss auch die zeitliche Änderung des Gesamtflusses identisch gleich Null sein. Das bedeutet für den magnetischen Fluss durch unseren Zylinder

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_{\text{gesamt}} &= \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}_{\text{mag}} + \frac{d}{dt} \Phi_M \equiv 0 \\ \Leftrightarrow & \boxed{-\frac{d}{dt} \tilde{\Phi}_{\text{mag}} = \frac{d}{dt} \Phi_M} . \end{aligned}$$

Um den Spannungsanteil aus der Positionsänderung der Leiterschleife zu erhalten, brauchen wir demzufolge nur die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die Mantelfläche zu berechnen. Dafür greifen wir zurück auf (8.3) und schreiben hier mit den Flächenparametern u und t für das vektorielle Mantelfächenelement

$$\begin{aligned} d\vec{A}(u, t) &= d\vec{r}_{(u)} \times d\vec{r}_{(t)} = \frac{\partial\vec{r}(u, t)}{\partial u} du \times \frac{\partial\vec{r}(u, t)}{\partial t} dt = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} \right) du dt \\ &= d\vec{r}_{(u)} \times \vec{v}(t) dt \end{aligned}$$

$$d\vec{A}(u, t) = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \vec{v}(t) \right) du dt .$$

Mit diesem vektoriellen Flächenelement ist bei stationärem \vec{B} -Feld und der Geschwindigkeit \vec{v} der Leiterschleife die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die Mantelfläche

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_M &= \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}(u, t) \\ &= \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \vec{v}(t) \right) du dt \quad \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} \Phi_M &= \oint_C \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \vec{v} \right) du . \end{aligned} \tag{8.8}$$

Weil nur noch der Parameter u als Kurvenparameter verblieben ist, können wir in der verallgemeinerten, parameterfreien Schreibweise auf die entsprechende Indizierung des Linienelements verzichten und schreiben $d\vec{r}$ statt $d\vec{r}_{(u)}$. Damit und durch Anwendung

der zyklischen Vertauschung auf das Spatprodukt erhalten wir schließlich für (8.8) das folgende Umlaufintegral:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \vec{v} \right) du = \oint_C \vec{B} \cdot (d\vec{r}_{(u)} \times \vec{v}) = \oint_C \vec{B} \cdot (d\vec{r} \times \vec{v}) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \Phi_M = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}_{\text{mag}}}.}$$

Ausgehend von (8.4) und (8.7) ist die in der bewegten Leiterschleife induzierte Spannung in Übereinstimmung mit (8.5) schließlich

$$\begin{aligned} U = - \frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}} &= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_{A(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}(t) \\ &= \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{r} + \left(- \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}_{\text{mag}} \right) \\ &= \oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{r} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}, \end{aligned}$$

$$U = - \frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint_C (\vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (v \ll c). \quad (8.9)$$

Wie zu erwarten war, gilt auch in diesem Fall die Transformationsgleichung (8.6)

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_v = \vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B} \quad (v \ll c)$$

und wir stellen abschließend noch einmal fest, dass die Induktionsspannung nicht davon abhängt, ob wir die Leiterschleife als ortsfest annehmen und den Magneten als bewegt oder umgekehrt. Entscheidend für die Induktion ist die Relativbewegung zwischen Leiterschleife und Magnet, d. h., wie schnell sie sich nähern oder voneinander entfernen. Völlig analog lassen sich diese Überlegungen hinsichtlich der Zeitabhängigkeiten auf das Maxwell-Ampère-Durchflutungsgesetz übertragen.

8.2 Kraft durch elektrischen Strom

In Anlehnung an: Bernd Sonne und Reinhard Weiß, *Einsteins Theorien*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013, Abschnitt 8.3 *Kraft durch elektrischen Strom*, Seite 108 bis Seite 110.

In diesem Abschnitt veranschaulichen wir an einem sehr einfachen Beispiel, wie man die elektromagnetischen Kräfte mit der Längenkontraktion aus der SRT herleiten kann. Zur Vereinfachung benutzen wir dafür einen unendlich langen, dünnen, geraden elektrischen Leiter. Wenn sich die Elektronen (-) gegenüber den positiven Ladungen (+) mit der Geschwindigkeit v bewegen, fließt in diesem Leiter ein elektrischer Strom. Die Elektronen bewegen sich im Leiter mit einer nur äußerst geringen Geschwindigkeit von ca. $v = 1 \text{ mm/s}$. Wir verwenden den Lorentz-Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ mit $\beta = v/c$.

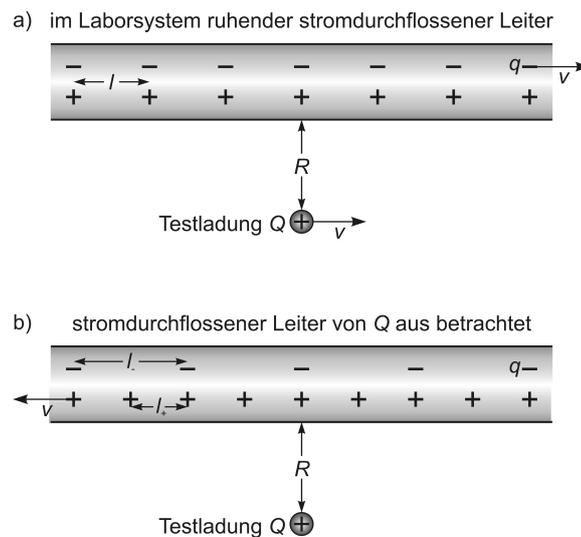


Abb. 8.3 Ein unendlich langer, dünner, gerader stromdurchflossener Leiter ruhe im Laborsystem. Die Elektronendriftgeschwindigkeit sei $v = 1 \text{ mm/s}$. Eine positive Testladung Q bewege sich mit der gleichen Geschwindigkeit v im Abstand R parallel zu diesem elektrischen Leiter.

a) Darstellung „aus Sicht“ des Laborsystems, b) Darstellung „aus Sicht“ der Testladung.

Im Laborsystem, dem Ruhesystem des elektrischen Leiters (vgl. Abb. 8.3 a), sei l der Abstand zwischen den positiven Ladungen. Weil ein elektrischer Leiter und insbesondere auch ein stromdurchflossener Leiter im Laborsystem nach außen ladungsneutral erscheint, müssen die Elektronen hier den gleichen Abstand l wie die positiven Ladungen besitzen. Die Elektronen strömen aber mit v relativ zu den positiven Ladungen durch den Leiter, so dass wir für ihren Abstand l_- in ihrem Ruhesystem wegen der Lorentz-Kontraktion $l = l_- \sqrt{1 - \beta^2}$ nach Äquivalenzumformung $l_- = l/\sqrt{1 - \beta^2}$ erhalten.

Im Ruhesystem der Leitungselektronen und der Testladung Q (vgl. Abb. 8.3 b), haben die Elektronen folglich den Abstand

$$l_- = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

und die jetzt mit $-v$ bewegten positiven Ladungen des Leiters gemäß der Lorentz-Kontraktion⁶ den Abstand

$$l_+ = l\sqrt{1 - \beta^2}.$$

⁶Die winzige Längen- oder Lorentz-Kontraktion infolge des Faktors $\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{1 - 10^{-23}}$ kann nur deshalb eine vergleichsweise große und gut messbare Kraft bewirken, weil die Leitungselektronendichte mit ca. 10^{23} Elektronen pro Kubikzentimeter sehr groß ist.

Wir können diesen Sachverhalt auch anders erklären: Die positiven Ladungen und die mit v bewegten Elektronen haben im Laborsystem den gleichen Abstand l . Das Laborsystem ist das Ruhesystem der positiven Ladungen. Diese haben aus Sicht des Ruhesystems der Elektronen den kontrahierten Abstand $l_+ = l\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Die Messereignisse „Anfang“ und „Ende“ für den Abstand l der Elektronen sind im Laborsystem gleichzeitig. Ein Objekt erscheint aber immer in dem System um den Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ kürzer, wo die Messereignisse „Anfang“ und „Ende“ des Objekts gleichzeitig stattfinden. Deshalb gilt für den Abstand l der Elektronen im Laborsystem $l = l_- \sqrt{1 - \beta^2}$ und folglich für den Abstand l_- der Elektronen in ihrem Ruhesystem $l_- = l/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Auf die Testladung Q im Abstand R senkrecht zum Leiter, die sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie die Elektronen (Ladungen q) bewegt, wirkt deshalb („aus Sicht“ der Testladung Q) eine Netto-Linienladungsdichte λ (Ladung pro Länge) von

$$\lambda = \frac{q}{l_+} - \frac{q}{l_-} = \frac{q}{l} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \sqrt{1 - \beta^2} \right) = \frac{q}{l} \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda = \gamma \frac{q}{l} \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{mit} \quad v = 0 \Rightarrow \gamma = 1 \quad \text{und} \quad v \rightarrow c \Rightarrow \gamma \rightarrow \infty. \quad (8.10)$$

Das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten Linienladung⁷ ist im Abstand R

$$E(R) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}.$$

Wenn wir für λ die Nettoladungsdichte aus (8.10) einsetzen, ist das elektrische Feld, das auf die Testladung Q wirkt:

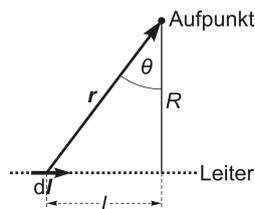
$$E(R) = \gamma \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{Rl} \frac{v^2}{c^2}.$$

Mit den Beziehungen $qv/l = I$ für die Stromstärke und $1/c^2 = \epsilon_0\mu_0$ erhalten wir schließlich die elektrische Kraft (Coulomb-Kraft), die auf die Testladung Q wirkt, und zwar

$$\text{im Ruhesystem von } Q : \quad F_E(R) = Q \cdot E = \gamma \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{QIv}{R}. \quad (8.11)$$

Falls die Testladung Q positiv ist, ist diese elektrische Kraft radial vom elektrischen Leiter weg gerichtet, weil auch die Nettoladungsdichte λ positiv ist. Mit dem **Biot-Savart-Gesetz**

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r}}{r^2}$$



können wir das \vec{B} -Feld⁸ berechnen, das von einem stromdurchflossenen Leiter hervorgerufen wird. Hierbei ist \vec{r} der Verbindungsvektor von einem herausgegriffenen Leiterelement $d\vec{l}$ zum betrachteten Magnetfeldpunkt (Aufpunkt) und $\frac{\vec{r}}{r}$ ist der zugehörige Einheitsvektor. Wenn wir nur den Betrag des Magnetfeldes

⁷Die entsprechende Herleitung findet man im Spektrum-Lehrbuch Physik von Tipler und Mosca 2009.

⁸Üblicherweise wird das \vec{B} -Feld als Magnetfeld bezeichnet. Aber eigentlich ist $\vec{B} = \mu\vec{H}$ die magnetische Flussdichte mit der magnetischen Permeabilität μ und der magnetischen Feldstärke \vec{H} .

betrachten und θ der Winkel zwischen \vec{r} und dem Lot vom Aufpunkt zum Leiter ist, erhalten wir⁹

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \cdot \cos \theta}{r^2}.$$

Einsetzen von

$$l = R \cdot \tan \theta \Rightarrow dl = \frac{R}{\cos^2 \theta} d\theta \quad \text{und} \quad R = r \cdot \cos \theta \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{R^2}$$

ergibt

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \cos \theta d\theta.$$

Für den unendlich langen, geraden, dünnen, stromdurchflossenen Leiter resultiert damit im Laborsystem das zylindersymmetrische, also das vom Abstand R zum Leiter abhängige Magnetfeld

$$B(R) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Die Magnetfeldlinien bilden konzentrische Kreise um den Leiter. Die Richtung des Feldes ergibt sich mit der Rechte-Hand-Regel, wobei der Daumen konventionsgemäß entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung der Elektronen zeigt. Die magnetische Kraft, die ein \vec{B} -Feld auf eine Ladung Q , die sich mit v in diesem Feld bewegt, ausübt, ist

$$\vec{F}_M = Q \vec{v} \times \vec{B}.$$

Da die Geschwindigkeit \vec{v} der Ladung Q und die Magnetfeldlinien in unserem Fall stets senkrecht aufeinander stehen, dürfen wir mit den Beträgen von \vec{v} und \vec{B} weiterrechnen und erhalten für die magnetische Kraft F_M im Vergleich zur elektrischen Kraft F_E in (8.11)

$$F_M = Q v B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Q I v}{R} = \frac{1}{\gamma} F_E \Leftrightarrow$$

$$\boxed{F_E = \gamma F_M}.$$

Entsprechend der Rechte-Hand-Regel wirkt die magnetische Kraft \vec{F}_M auf die positive Testladung Q radial vom Leiter weg und besitzt somit die gleiche Richtung und die gleiche Orientierung wie die elektrische Kraft \vec{F}_E .

In der alltäglichen, nichtrelativistischen Praxis mit $v \ll c \Rightarrow \gamma \approx 1$ kann der Lorentz-Faktor γ vernachlässigt werden, sodass dann in unserem Beispiel $\vec{F}_E = \vec{F}_M$ gilt. Dabei ist \vec{F}_M die magnetische Kraft, die das \vec{B} -Feld, welches vom Elektronenstrom im Leiter erzeugt wird, im (ruhenden) Laborsystem auf die bewegte Probeladung Q ausübt. Dieselbe Kraft interpretiert aber ein mit Q im Laborsystem bewegter Beobachter als die elektrische Kraft \vec{F}_E . Ob eine Beobachter ein Magnetfeld oder ein elektrisches Feld feststellt, hängt folglich vom Bezugssystem ab. „Das Magnetfeld ist also keine prinzipiell vom elektrischen Feld unabhängige Eigenschaft geladener Materie, sondern ist im Sinne der Relativitätstheorie eigentlich eine Änderung des elektrischen Feldes bewegter Ladungen infolge der Lorentz-Kontraktion. Man spricht daher vom **elektromagnetischen Feld** einer bewegten Ladung.“¹⁰

⁹Vollständige Herleitung in: Paul A. Tipler, *Physik*, 3. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 2000, Abschnitt 25.2 *Das magnetische Feld von Strömen: Das Gesetz von Biot und Savart*, Seite 848 bis Seite 858.

¹⁰Zitiert aus: Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 2 – Elektrizität und Optik*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 104.

9 Elektrodynamische Potentiale und Eichungen

In Anlehnung an den Studentext von Rainer J. Jelitto, *Elektrodynamik, Theoretische Physik 3*, 3. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden, 1994, Abschnitt 5.1 *Elektrodynamische Potentiale und Eichungen*, Seite 115 bis Seite 119.

In Ergänzung zu: Helmut Günther, *Spezielle Relativitätstheorie*, 1. Auflage, Teubner-Verlag, 2007, Abschnitt 30.1.5 *Die Maxwell'schen Gleichungen – Elektromagnetische Wellen*, Seite 179 bis Seite 185.

Wir verwenden in diesem Kapitel u. a. die folgenden Beziehungen aus der Vektoranalysis:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f \quad , \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\Delta \vec{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} .$$

Wegen ihrer Bedeutung werden wir die Eichungen (Coulomb- und Lorenz-Eichung) in zwei gesonderten Abschnitten am Ende dieses Kapitels diskutieren.

9.1 Maxwell'sche Gleichungen und elektrodynamische Potentiale

Grundlage unserer folgenden Überlegungen sind die Maxwell'schen Gleichungen (Abkürzung: MWG bzw. MWGn) für Medien mit den folgenden Eigenschaften:

- homogen:
In homogenen Medien breiten sich elektromagnetische Wellen geradlinig aus.
- isotrop:
In isotropen Medien ist die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen unabhängig von der Ausbreitungsrichtung, weil die (di)elektrische Suszeptibilität χ_{el} und die magnetische Suszeptibilität χ_{mag} des Mediums Skalare sind.¹ Für das elektrische Feld gilt dann der einfache Fall

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{D} - \vec{E} = \varepsilon_r \vec{E} - \vec{E} = (\varepsilon_r - 1) \vec{E} = \chi_{\text{el}} \vec{E} ,$$

$$\chi_{\text{el}} \text{ Skalar} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} \parallel \vec{E}$$

und für das Magnetfeld

$$\mu_0 \vec{M} = \vec{B}_{\text{eff}} - \mu_0 \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} - \mu_0 \vec{H} = \underbrace{(\mu_r - 1)}_{\chi_{\text{mag}}} \mu_0 \vec{H} = \chi_{\text{mag}} \vec{B}_0 ,$$

$$\chi_{\text{mag}} \text{ Skalar} \quad \Rightarrow \quad \vec{M} \parallel \vec{B} .$$

Zur leichteren Unterscheidung haben wir zwischenzeitlich das durch die Magnetisierung des Mediums resultierende Magnetfeld \vec{B}_{eff} genannt und das zugehörige Magnetfeld im Fall des Vakuums (ohne Medium) $\mu_0 \vec{H} = \vec{B}_0$.

¹Allgemein sind die Suszeptibilitäten χ tensorielle Größen zur Beschreibung anisotroper Medien.

- linear:

In linearen Medien gilt Polarisation $\vec{P} \propto \vec{E}$ und Magnetisierung $\vec{M} \propto \vec{B}$.

Dabei sind

ε_0	elektrische Feldkonstante , Vakuum-Dielektrizitätskonstante,
ε_r	Permittivitätszahl , Dielektrizitätszahl, relative Dielektrizitätskonstante
$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$	Permittivität , Dielektrizitätskonstante,
μ_0	magnetische Feldkonstante , (magnetische) Permeabilitätskonstante,
μ_r	Permeabilitätszahl , relative Permeabilität,
$\mu = \mu_r \mu_0$	Permeabilität .

Maxwell'sche Gleichungen:

homogene MWGn: a) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, b) $\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$,

inhomogene MWGn: $\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$, $\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$, (9.1)

bzw. c) $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \varrho$, d) $\operatorname{rot} \vec{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{j}$.

Zu berücksichtigen ist, dass für die Ladungsdichte ϱ bei den in dieser Form dargestellten MWGn gelegentlich auch ϱ_{frei} geschrieben wird, weil mit ϱ hier nur die freien, stationären Ladungen erfasst werden sollen. Auch für die Stromdichte \vec{j} wird gelegentlich \vec{j}_{frei} geschrieben, weil auch sie nur von freien Strömen erzeugt werden soll. Weiterhin kann man die MWGn umschreiben mit den folgenden Beziehungen:

$$\text{Vakuumllichtgeschwindigkeit } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \Leftrightarrow \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} ,$$

$$\text{„Lichtgeschwindigkeit“ in Medien } c_m = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} .$$

n ist der aus der Optik bekannte Brechungsindex. Im Fall des Vakuums mit $\varepsilon_r = 1$ und $\mu_r = 1$ ist dann in den MWGn ε durch ε_0 und μ durch μ_0 zu ersetzen.

Wenn die Ladungen bzw. die Ladungsdichte ϱ und die Ladungsströme bzw. die Stromdichte \vec{j} stationär sind, sind auch \vec{E} - und \vec{B} -Feld stationär und nicht mehr miteinander verkoppelt, weil die zeitabhängigen Terme $\frac{\partial}{\partial t} \dots$ in den MWGn verschwinden. Wir erhalten folglich die beiden Gleichungen der **Elektrostatik**

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \varrho = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \varrho \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} ,$$

und die beiden Gleichungen der **Magnetostatik**

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{0} \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{j} = \mu_r \mu_0 \vec{j} .$$

Die einfachste Form nehmen die MWGn (9.1) im Vakuum und ohne freie Ladungen gemäß $\rho = 0$ und ohne freie Ströme gemäß $\vec{j} = \vec{0}$ an, weil sie dann alle homogen sind:

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{a}) \operatorname{div} \vec{B} = 0 & , \quad \tilde{b}) \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \\
 \operatorname{div} \vec{D} = 0 & , \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} , \\
 \text{bzw. } \tilde{c}) \operatorname{div} \vec{E} = 0 & , \quad \tilde{d}) \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .
 \end{array} \tag{9.2}$$

An zwei kleinen Beispielen werden wir jetzt die MWG c) veranschaulichen.

Beispiel 1:

Wir betrachten das kugelsymmetrische \vec{E} -Feld einer Punktladung q , die in ein homogenes, isotropes, lineares Dielektrikum mit der Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 5$ eingebettet ist. Mit

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi$$

erhalten wir für die MWG c) die **Poisson-Gleichung**

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = -\Delta \Phi = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \rho . \tag{9.3}$$

Das \vec{E} -Feld einer Punktladung in dem o. g. Dielektrikum ist

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

und ihr Potential

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} . \tag{9.4}$$

Im Kapitel 5 hatten wir gezeigt, dass die Ladungsdichte einer Punktladung q

$$\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

ist und dass

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

gilt. Einsetzen in die Poisson-Gleichung (9.3) ergibt

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{E} = -\Delta \Phi &= -\Delta \frac{q}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \\
 &= \frac{q}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0} \cdot 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\
 \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \rho . \quad \square
 \end{aligned}$$

Die Potentialfunktion (9.4) für eine Punktladung ist also eine Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta\Phi = \rho/\varepsilon$.

Wenn wir jetzt die Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 5$ für das Dielektrikum berücksichtigen und die daraus resultierende Divergenz des \vec{E} -Feldes mit seiner Divergenz im Fall des Vakuums vergleichen, stellen wir fest, dass die Divergenz (Quelldichte) des \vec{E} -Feldes im Dielektrikum um den Faktor $1/5$ kleiner ist als im Vakuum:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0} < \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Wie man sieht, besitzt ein Dielektrikum eine abschirmende Wirkung auf das von einer freien Ladung ausgehend \vec{E} -Feld.

Beispiel 2:

Jetzt betrachten wir das homogene Feld $\vec{E} = (E_x = \text{const}, E_y \equiv 0, E_z \equiv 0)$. Die MWG c) liefert

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Innerhalb eines homogenen \vec{E} -Feldes existieren keine freien Ladungen als Quellen des Feldes. Ein homogenes \vec{E} -Feld ist quellenfrei. Auch die Umkehrung ist zutreffend: Befinden sich freie Ladungen innerhalb eines bestimmten Raumbereichs, so kann das von ihnen erzeugte \vec{E} -Feld *um sie herum* nicht homogen sein. „Um sie herum“ wurde deshalb betont, weil das homogene \vec{E} -Feld z. B. *im Innern* eines aufgeladenen Plattenkondensators nur quellenfrei ist, solange der betrachtete Raumbereich nicht die Plattenoberfläche (mit den freien Ladungen) einschließt.

Für die Potentialfunktion Φ dieses homogenen \vec{E} -Feldes gilt

$$d\Phi(\vec{r}) = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{bzw.} \quad d\Phi = -E_x \cdot dx.$$

Sie ist eine Lösung der **Laplace-Gleichung** $\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$.

9.1.1 Plausibilisierung des Potentialansatzes

Der bisher empirisch nicht widerlegte Sachverhalt, dass es keine magnetischen Monopole gibt, wird von der MWG $\text{div}\vec{B} = 0$ beschrieben. Diese homogene Differentialgleichung kann *immer* durch den

$$\boxed{\text{Ansatz} \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}}$$

mit dem Vektorpotential² $\vec{A}(\vec{r}, t)$ gelöst werden, denn für jedes *beliebige* Vektorpotentialfeld gilt

$$\text{div}\vec{B} = \text{div}\text{rot}\vec{A} = 0.$$

Mit dem elektrischen Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ wird das \vec{E} -Feld in der Elektrostatik durch

$$-\text{grad}\Phi = \vec{E}$$

²Das Vektorpotential \vec{A} darf nicht mit dem Flächenvektor verwechselt werden und hat folglich nichts mit dem vektoriellen Flächenelement $d\vec{A}$ zu tun.

beschrieben. Dann ist die MWG

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} = \underbrace{\operatorname{rot}(-\operatorname{grad} \Phi)}_{=\vec{0}} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.5)$$

nur erfüllt, wenn $\partial \vec{B} / \partial t = 0$ ist. Das bedeutet, dass in der Elektrostatik das \vec{E} -Feld wirbelfrei ist.

Wenn wir aber \vec{B} in der MWG $\operatorname{rot} \vec{E} + \partial \vec{B} / \partial t = \vec{0}$ gemäß dem Ansatz durch $\operatorname{rot} \vec{A}$ ersetzen, erhalten wir

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

und sehen, dass *allgemein* nicht das \vec{E} -Feld allein, sondern $(\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t)$ wirbelfrei sein muss. In Verallgemeinerung von (9.5) schreiben wir deshalb

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} = \operatorname{rot}(-\operatorname{grad} \Phi)$$

und erhalten das (allgemeine) elektrische Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ mit

$$\boxed{\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Phi}.$$

Das wiederum heißt, wenn $\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \partial \vec{B} / \partial t \neq 0$ ist, darf das \vec{E} -Feld nicht wirbelfrei sein. Und tatsächlich ist diese Feststellung das Faraday'sche Induktionsgesetz:

„Zeitlich veränderliche Magnetfelder sind die Quelle elektrischer Wirbelfelder gemäß $\partial \vec{B} / \partial t = -\operatorname{rot} \vec{E}$.“

Wir sehen, dass der folgende Ansatz die homogenen MWGn löst:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} && \text{mit dem Vektorpotential } \vec{A} && \text{und} \\ \vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t &= -\operatorname{grad} \Phi && \text{mit dem elektrischen Potential } \Phi. \end{aligned}$$

Damit haben wir den

$$\text{Potentialansatz} \quad \boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad (9.6)$$

gefunden.

Maxwell'sche Gleichung c) mit Potentialansatz und Coulomb-Eichung:

Wir gehen jetzt mit dem Potentialansatz in die inhomogene MWG c) und führen anschließend die

$$\text{Coulomb-Eichung} \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

durch, d. h., das Vektorpotential \vec{A} wird so gewählt, dass es keine Quellen besitzt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon} \varrho \quad \Rightarrow \\ \operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= -\Delta \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\operatorname{div} \vec{A}}_{\stackrel{!}{=} 0} = \frac{1}{\varepsilon} \varrho. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Daraus erhalten wir die **Grundgleichung der Elektrostatik** ($\frac{\partial}{\partial t} \dots = 0$), d. h. die

$$\text{Poisson-Gleichung} \quad \boxed{\Delta \Phi = -\frac{1}{\varepsilon} \rho}.$$

Maxwell'sche Gleichung d) mit Potentialansatz und Coulomb-Eichung:

Wir gehen jetzt mit dem Potentialansatz in die inhomogene MWG d) und führen anschließend die Coulomb-Eichung durch:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu \vec{j} \quad \Rightarrow \\ \text{rot rot } \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= \text{rot rot } \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \Phi + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

und mit $\text{rot rot } \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \text{grad div } \vec{A}$

$$-\Delta \vec{A} + \text{grad } \underbrace{\text{div } \vec{A}}_{\stackrel{!}{=} 0} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \Phi + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{j}, \quad (9.8)$$

$$-\Delta \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \Phi + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{j}.$$

Daraus erhalten wir die **Grundgleichung der Magnetostatik** ($\frac{\partial}{\partial t} \dots = 0$):

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j}}.$$

Für die Grundgleichungen von Elektro- und Magnetostatik kann man zusammenfassend schreiben:

$$\boxed{\Delta \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \varepsilon/\rho \\ \mu \vec{j} \end{pmatrix}}. \quad (9.9)$$

Maxwell'sche Gleichung c) mit Potentialansatz und Lorenz-Eichung:

Wir gehen jetzt mit dem Potentialansatz in die inhomogene MWG c) und führen anschließend die³

$$\text{Lorenz-Eichung} \quad \text{div } \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{div } \vec{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

durch. Bei der Lorenz-Eichung werden zeitliche Änderungen der (Potential)felder miterfasst (Dynamik gemäß $\frac{\partial}{\partial t} \dots \neq 0$). Wir können sofort von (9.7) ausgehen:

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{div } \vec{A}}_{\stackrel{!}{=} -\mu\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}} &= \frac{1}{\varepsilon} \rho, \\ -\Delta \Phi + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon} \rho. \end{aligned}$$

³ $\text{div } \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$ wird auch **Lorenz-Bedingung** genannt.

Daraus erhalten wir die **inhomogene Wellengleichung für Φ**

$$\boxed{\Delta\Phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \varrho}.$$

Im Vakuum und mit $\varrho = 0$ resultiert die homogene Wellengleichung

$$\Delta\Phi - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Maxwell'sche Gleichung d) mit Potentialansatz und Lorenz-Eichung:

Wir gehen jetzt mit dem Potentialansatz in die inhomogene MWG d) und führen anschließend die Lorenz-Eichung durch. Wir können sofort von (9.8) ausgehen, ändern aber die Reihenfolge der Terme:

$$\begin{aligned} \text{grad div}\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{grad}\Phi - \Delta\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= \mu\vec{j}, \\ \underbrace{\text{grad}\left(\text{div}\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)}_{\stackrel{!}{=}0} - \Delta\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= \mu\vec{j}, \\ -\Delta\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= \mu\vec{j}. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die **inhomogene Wellengleichung für \vec{A}**

$$\boxed{\Delta\vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}}.$$

Im Vakuum und mit $\vec{j} = 0$ resultiert die homogene Wellengleichung

$$\Delta\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

9.1.2 Zusammenfassung

Durch den Potentialansatz (9.6) und die Lorenz-Eichung werden die MWGn bezüglich der Potentiale Φ und \vec{A} entkoppelt:

Wir formen (9.7) um und addieren auf beiden Seiten $\mu\varepsilon \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$:

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi &= \frac{\partial}{\partial t} \text{div}\vec{A} + \frac{1}{\varepsilon} \varrho, \\ -\Delta\Phi + \mu\varepsilon \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \text{div}\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon} \varrho \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$-\Delta\Phi + \mu\varepsilon \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\operatorname{div}\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)}_{\stackrel{!}{=} 0 \text{ (Lorentz-Eichung)}} + \frac{1}{\varepsilon} \varrho. \quad (9.10)$$

Jetzt formen wir (9.8) um :

$$\begin{aligned} -\Delta\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\operatorname{grad} \operatorname{div}\vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad}\Phi + \mu\vec{j} \quad \Rightarrow \\ -\Delta\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\operatorname{grad} \underbrace{\left(\operatorname{div}\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)}_{\stackrel{!}{=} 0 \text{ (Lorentz-Eichung)}} + \mu\vec{j}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Mit (9.10) und (9.11) erhalten wir aus den vier MWGn eine skalare und eine vektorielle, also insgesamt vier entkoppelte und deutlich einfachere inhomogene lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Wellengleichungen):

$$\square_{\mu\varepsilon} \Phi = \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - \Delta\Phi = \frac{1}{\varepsilon} \varrho, \quad (9.12)$$

$$\square_{\mu\varepsilon} \vec{A} = \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \Delta\vec{A} = \mu\vec{j}. \quad (9.13)$$

Wir haben hier $\mu\varepsilon = 1/c_m^2$ verwendet und im Sinne einer kompakten Schreibweise den **D'Alembert-Operator** \square eingeführt. Er hat hier für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Medium mit dem Brechungsindex $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ die Form

$$\square_{\mu\varepsilon} := \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

und für die Ausbreitung im Vakuum in Vierervektor-Schreibweise

$$\square := \partial^\nu \partial_\nu = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta.$$

Bei (9.12) handelt es sich um eine Differentialgleichung bezüglich des elektrischen Potentials Φ und bei (9.13) um drei voneinander unabhängige Differentialgleichungen, also bezüglich jeder der drei Komponenten des Vektorpotentials \vec{A} eine Differentialgleichung. Existieren im betrachteten Raumbereich (Integrationsbereich) keine elektrischen Ladungen und keine elektrischen Ströme, erhalten wir aus (9.12) und (9.13) schließlich die vier homogenen Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi - \Delta\Phi &= 0, \\ \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \Delta\vec{A} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Falls der Integrationsbereich vollständig im Vakuum liegt, ist statt der Mediumlichtgeschwindigkeit c_m die Vakuumlichtgeschwindigkeit c zu verwenden.

9.2 Die Coulomb-Eichung in der Elektro- und Magnetostatik

Die Coulomb-Eichung heißt auch optische Eichung. \vec{A} soll den Ansatz $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ erfüllen, auch wenn \vec{A} das Gradientenfeld $\text{grad } \psi$ enthält. Man kann also jedem \vec{A} -Feld ein *beliebiges* Feld $\text{grad } \psi$ hinzufügen, ohne dass sich dabei \vec{B} verändert:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \underbrace{\text{rot grad } \psi}_{=0} = \text{rot } \vec{A} = \vec{B} . \quad \square$$

\vec{A} und \vec{A}' sind folglich *äquivalente Vektorpotentiale*. Dieser Sachverhalt liefert die *Wahlfreiheit* bezüglich des skalaren Feldes $\psi(\vec{r})$ für die Coulomb-Eichung

$$\text{div } \vec{A} = 0 .$$

Wir können folglich bei der Eichung

$$\text{div } \vec{A} = \text{div } \vec{A}' = \text{div}(\vec{A} + \text{grad } \psi) = \text{div } \vec{A} + \Delta \psi \stackrel{!}{=} 0$$

das Eichfeld $\psi(\vec{r})$ stets so wählen, dass

$$\Delta \psi = -\text{div } \vec{A} ,$$

wodurch

$$\text{div } \vec{A} = \text{div } \vec{A}' = \text{div } \vec{A} + \Delta \psi = \text{div } \vec{A} - \text{div } \vec{A} = 0 . \quad \square$$

9.3 Plausibilisierung der Lorenz-Eichung

Die Lorenz-Eichung ist nicht nach dem niederländischen Physiker Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928) benannt, sondern nach dem dänischen Physiker Ludvig Valentin Lorenz (1829 – 1891).

In der Statik mit $\frac{\partial}{\partial t} \cdots = 0$ ist die Coulomb-Eichung $\text{div } \vec{A} = 0$ ausreichend. In der Dynamik mit $\frac{\partial}{\partial t} \cdots \neq 0$ jedoch sollen die elektrodynamischen Potentiale \vec{A} und Φ so justiert werden, dass die

$$\textbf{Lorenz-Eichung} \quad \text{div } \vec{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0 \quad (9.14)$$

resultiert und dabei der Potentialansatz für \vec{E} , nämlich

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} , \quad (9.15)$$

nicht verletzt wird. (9.14) und (9.15) sind aber zwei miteinander verkoppelte Differentialgleichungen. Für die Eichung hinsichtlich des skalaren Eichfeldes $\psi(\vec{r}, t)$ bedeutet das, dass wir neben der im Abschnitt 9.2 verwendeten Eichtransformation für das Vektorpotential \vec{A} , nämlich

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A}' - \vec{A} = \text{grad } \psi , \quad (9.16)$$

auch noch die Eichtransformation für das elektrische Potential Φ benötigen. Diese erhalten wir aus (9.15) wie folgt:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \longrightarrow \vec{E} &= -\text{grad } \Phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}.\end{aligned}$$

Subtraktion ergibt:

$$\text{grad}(\Phi' - \Phi) = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\vec{A}' - \vec{A})}_{(9.16)} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \psi = \text{grad} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

$$\Phi' - \Phi = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \Leftrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Damit haben wir die **Lorenz-Eichtransformationen**

$\begin{aligned}\vec{A} &\longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi \\ \Phi &\longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}\end{aligned}$
--

gefunden. Diese Transformationen wenden wir jetzt auf die Lorenz-Eichung an:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Phi \stackrel{!}{=} 0 &\longrightarrow \text{div } \vec{A}' + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Phi' = 0, \\ \text{div}(\vec{A} + \text{grad } \psi) + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) &= 0, \\ \text{div } \vec{A} + \Delta \psi + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \Delta \psi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= - \underbrace{\left(\text{div } \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Phi \right)}_{\text{Voraussetzung (9.14)}} \stackrel{!}{=} 0,\end{aligned}$$

$\Delta \psi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$

Wir erhalten eine homogene Differentialgleichung bezüglich des skalaren Eichfeldes $\psi(\vec{r}, t)$. Weil diese Differentialgleichung lösbar ist, also Lösungen ψ existieren bzw. konstruierbar sind, ist die Lorenz-Eichung (9.14) stets erfüllbar.

10 Lösungen der Wellengleichungen

Siehe:

Wolfgang Nolting, Springer-Lehrbuch, *Grundkurs Theoretische Physik 3, Elektrodynamik*, 7. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 273 bis Seite 276,

Torsten Fließbach, *Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik II*, 4. Auflage, Elsevier, München, 2009, Seite 156 bis Seite 162,

Rainer J. Jellito, *Studententext – Elektrodynamik, Theoretische Physik 3*, 3. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden, 1994, Seite 134 und Seite 135.

Aus den Maxwell'schen Gleichungen hatte wir die Wellengleichungen (9.12) und (9.13) für die elektrodynamischen Potentiale Φ und \vec{A} hergeleitet. Im Folgenden werden wir die Lösungen dieser Wellengleichungen für das Vakuum bestimmen. Dies ist relativ einfach, weil für das Vakuum die Dispersionsrelation

$$\omega(k) = ck \quad (10.1)$$

gilt. Das bedeutet, dass im Vakuum die Phasengeschwindigkeit $\omega(k)/k = c = \text{const}$ aller elektromagnetischen Wellen die Vakuumlichtgeschwindigkeit c ist. Wir gehen also aus von den Wellengleichungen

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho, \quad (10.2)$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (10.3)$$

Hierbei handelt es sich um vier *lineare* Differentialgleichungen zweiter Ordnung bezüglich des Ortes $\vec{r} = (x, y, z)$ und der Zeit t . Weil alle vier Gleichungen die gleiche Gestalt besitzen, haben auch ihre Lösungen die gleiche Gestalt. Wir werden deshalb die Gleichung (10.2) für Φ lösen und die Lösungen für \vec{A} analog angeben.

Die allgemeine Lösung von (10.2) setzt sich zusammen aus der Lösung für die homogene Differentialgleichung, der homogenen Lösung Φ_{hom} , und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, der partikulären Lösung Φ_{part} :

$$\Phi_{\text{allgemein}}(\vec{r}, t) = \Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) + \Phi_{\text{part}}(\vec{r}, t) .$$

10.1 Lösung der homogenen Wellengleichung

Die Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\Delta\Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (10.4)$$

beginnen wir mit dem als geläufig vorausgesetzten Separationsansatz

$$\Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \cdot T(t) . \quad (10.5)$$

Einsetzen von (10.5) in (10.4) und anschließende Division durch (10.5) liefert

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = 0 \quad (10.6)$$

und schließlich die vier voneinander unabhängigen (separaten) homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k_y^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -k_z^2, \quad \frac{T''}{T} = -\omega^2 .$$

k_x, k_y, k_z und ω heißen Separationskonstanten. Durch Äquivalenzumformung erhalten wir aus (10.6) die Dispersionsrelation für das Vakuum

$$\omega^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = c^2 |\vec{k}|^2 = c^2 k^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega(k) = \pm c k .$$

Diese aber zeigt, dass hier ω durch \vec{k} festgelegt ist. Die Lösungen der Differentialgleichungen für den Ortsanteil, z. B.

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0 ,$$

sind von der Form $X(x) = e^{\pm i k_x x}$, was man durch Einsetzen in die Differentialgleichung sofort sieht. Damit die Lösungen nicht divergieren, muss k_x reell sein. Und wenn wir sowohl positive als auch negative k_x in den Lösungen berücksichtigen, brauchen wir nur den positiven Exponenten der Exponentialfunktion zu verwenden, sodass z. B.

$$X(x) = e^{i k_x x} \quad \text{mit} \quad \{k_x, k_y, k_z\} \in \mathbb{R}, \quad -\infty < k_x, k_y, k_z < \infty .$$

Analog ist die Lösung des Zeitanteils

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$T(t) = e^{\pm i \omega t} \quad \text{mit} \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \omega < \infty .$$

Wir können uns hier auf positive Kreisfrequenzen ω beschränken, wenn wir in der Lösung beide Vorzeichen des Exponenten von $e^{\pm i \omega t}$ berücksichtigen.

Setzen wir diese Lösungen in den Separationsansatz (10.5) ein, erhalten wir die Elementarlösungen bzw. die Fundamentalebasis der homogenen Wellengleichung:

$$\Phi^{\pm} = e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega(k)t]} \quad \Rightarrow \quad \Phi^+ = e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega(k)t]}, \quad \Phi^- = e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega(k)t]} .$$

Alle Linearkombinationen der Elementarlösungen sind homogene Lösungen

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) &= \sum_{\mu=1}^m A(k_{\mu}) \Phi^+(k_{\mu}) + \sum_{\nu=1}^n B(k_{\nu}) \Phi^-(k_{\nu}) \\ &= \sum_{\mu=1}^m A(k_{\mu}) e^{i[\vec{k}_{\mu} \cdot \vec{r} + \omega(k_{\mu})t]} + \sum_{\nu=1}^n B(k_{\nu}) e^{i[\vec{k}_{\nu} \cdot \vec{r} - \omega(k_{\nu})t]} \end{aligned}$$

mit den *beliebigen komplexen Koeffizienten* $A(k_{\mu})$ und $B(k_{\nu})$.

„Ja sogar die „kontinuierliche Linearkombination“

$$\Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega(k)t]} + \int_{-\infty}^{+\infty} b(k) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t]} \quad (10.7)$$

mit beliebigen komplexwertigen Funktionen $a(k)$ und $b(k)$ besitzt diese Eigenschaft.“¹ Hierbei ist zu bedenken, dass z. B. der Integrand $a(k) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega(k)t]}$ die Verteilungsdichtefunktion von $A(k) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega(k)t]}$ gemäß der Analogie

$$\begin{aligned} A(k) \cdot e^{\alpha \cdot k} &\Rightarrow \frac{d}{dk} [A(k) \cdot e^{\alpha \cdot k}] = A(k) \cdot \alpha \cdot e^{\alpha \cdot k} + e^{\alpha \cdot k} \cdot \frac{d}{dk} A(k) \\ &= \underbrace{\left[\alpha A(k) + \frac{d}{dk} A(k) \right]}_{a(k)} \cdot e^{\alpha \cdot k} \\ &= a(k) \cdot e^{\alpha \cdot k} \end{aligned}$$

ist. Weil die elektrodynamischen Potentiale reelle Größen sind, nehmen wir von der kontinuierlichen Überlagerung bzw. Superposition (10.7) nur den Realteil und schreiben für die homogene Lösung kurz

$$\boxed{\Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \int d^3k \left[a_1(\vec{k}) + i a_2(\vec{k}) \right] e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t]}} \quad (10.8)$$

Hier sollen nicht nur Φ_{hom} sondern auch die Amplitudenfunktionen $a_1(\vec{k})$ und $a_2(\vec{k})$ reell sein. Deshalb konnten wir uns auf das negative Vorzeichen von ωt im Exponenten beschränken, denn

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[(a_1 + i a_2) e^{\pm i \omega t} \right] &= \text{Re} \left[(a_1 + i a_2) (\cos(\pm \omega t) + i \sin(\pm \omega t)) \right] \\ &= \text{Re} \left[a_1 \cos(\omega t) + i a_2 \cos(\omega t) + i a_1 \sin(\pm \omega t) - a_2 \sin(\pm \omega t) \right] \\ &= a_1 \cos(\omega t) \mp a_2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

und für $e^{-i \omega t} \Rightarrow$

$$\text{Re} \left[(a_1 + i a_2) e^{-i \omega t} \right] = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) \quad \square$$

Durch die Anfangsbedingungen $\Phi(\vec{r}, 0)$ und $\dot{\Phi}(\vec{r}, 0)$ wird (10.8) festgelegt.

Abschließend zeigen wir noch den Zusammenhang zwischen (10.8) und der Fourier-Transformation von $\Phi(\vec{r}, t)$. Dafür gehen wir mit dem Ansatz

$$\tilde{\Phi}(\vec{k}, \omega) \longrightarrow \tilde{\Phi}(\vec{k}, \omega) \delta(\omega - \omega(\vec{k}))$$

in die Fourier-Transformation, denn $\tilde{\Phi}(\vec{k}, \omega)$ leistet unter dem Integral nur für $\omega = \omega(\vec{k}) = ck$ einen Betrag, weil ω durch \vec{k} festgelegt ist. Wegen $\omega = ck$ schreiben wir im Exponenten vereinfachend nicht $\omega(\vec{k})t$ sondern $\omega(k)t$. Damit ist also die

¹Zitiert aus: Rainer J. Jellito, *Studententext – Elektrodynamik, Theoretische Physik 3*, 3. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden, 1994, Seite 134.

Fourier-Transformation

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \tilde{\Phi}(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \longrightarrow \Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \tilde{\Phi}(\vec{k}, \omega) \delta(\omega - \omega(\vec{k})) \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ &= \int d^3k \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^2} \tilde{\Phi}_t(\vec{k})}_{\text{}} \cdot e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t]}, \\ \implies \Phi_{\text{hom}}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \int d^3k \overbrace{\left[a_1(\vec{k}) + i a_2(\vec{k}) \right]} \cdot e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t]}. \quad \square\end{aligned}$$

Analog dazu lauten die homogenen Lösungen der Wellengleichung für die Komponenten A_j des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\boxed{A_{j \text{ hom}}(\vec{r}, t) = \text{Re} \int d^3k \left[a_{j1}(\vec{k}) + i a_{j2}(\vec{k}) \right] \cdot e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t]}}$$

mit den reellen Amplitudenfunktionen $a_{j1}(\vec{k})$ und $a_{j2}(\vec{k})$.

10.2 Partikuläre Lösung der inhomogenen Wellengleichung

In diesem Abschnitt beziehen wir uns auf die übersichtliche Herleitung in: Torsten Fließbach, *Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik II*, 4. Auflage, Elsevier, München, 2009, Kapitel 17 *Allgemeine Lösung*, Abschnitt *Retardierte Potentiale*, Seite 159 bis Seite 162.

Wir werden eine partikuläre Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \varrho(\vec{r}, t) \quad (10.9)$$

zeigen und dann analog dazu die partikulären Lösungen der inhomogenen Wellengleichungen bezüglich \vec{A} angeben:

Die Fourier-Transformationen allein der Zeitabhängigkeit von $\Phi(\vec{r}, t)$ und $\varrho(\vec{r}, t)$ sind:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \tilde{\Phi}(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \Rightarrow \\ \boxed{\Phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\Phi}_\omega(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}}, \quad (10.10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varrho(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int d\omega \tilde{\varrho}(\vec{k}, \omega) \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad \Rightarrow \\ \boxed{\varrho(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\varrho}_\omega(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}}. \quad (10.11)\end{aligned}$$

Einsetzen von (10.10) und (10.11) in die Wellengleichung (10.9) ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\Phi}_\omega(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\varrho}_\omega(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}.$$

Der Vergleich der beiden Seiten der Gleichung zeigt

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\Phi}_\omega(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\varrho}_\omega(\vec{r}). \quad (10.12)$$

Jetzt benutzen wir (5.36) und setzen $k = \omega/c$:

$$(\Delta + k^2) \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}') \Rightarrow$$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{e^{\pm i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|/c}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}'). \quad (10.13)$$

Wenn wir \vec{r} in (10.12) mit einem Strichindex versehen, dann (10.12) und (10.13) kreuzweise multiplizieren und anschließend nach \vec{r}' integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\Phi}_\omega(\vec{r}') \cdot 4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}') &= \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{e^{\pm i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|/c}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\varrho}_\omega(\vec{r}'), \\ \int d^3r' \tilde{\Phi}_\omega(\vec{r}') \cdot \delta(\vec{r}-\vec{r}') &= \int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tilde{\varrho}_\omega(\vec{r}') \cdot \frac{e^{\pm i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|/c}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \\ \tilde{\Phi}_\omega(\vec{r}) &= \int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tilde{\varrho}_\omega(\vec{r}') \cdot \frac{e^{\pm i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|/c}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Diese Gleichung stellt die zeitliche Beziehung her zwischen der Ladungsdichte an den Orten \vec{r}' und dem aus dieser Ladungsdichte resultierenden Potential Φ am Ort \vec{r} . Allerdings sind hier sowohl die Ladungsdichte als auch das Potential noch von der Kreisfrequenz ω und nicht von der Zeit abhängig. Deshalb setzen wir (10.14) in die Zeit-Fourier-Transformation (10.10) ein:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3r' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tilde{\varrho}_\omega(\vec{r}') \cdot \frac{e^{\pm i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|/c}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot e^{-i\omega t}, \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\varrho}_\omega(\vec{r}') \cdot e^{-i\omega(t \mp |\vec{r}-\vec{r}'|/c)}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Jetzt nehmen wir

$$t \mp \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} = t'$$

an, sodass gemäß (10.11)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\varrho}_\omega(\vec{r}') \cdot e^{-i\omega t'} = \varrho(\vec{r}', t'). \quad (10.16)$$

Unter Berücksichtigung von (10.16) wird aus (10.15) schließlich

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_{\text{part}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Darin verbergen sich zwei partikuläre Lösungen:

für

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t - \delta t$$

das **retardierte Potential**

$$\Phi_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und für

$$t' = t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t + \delta t$$

das **avancierte Potential**

$$\Phi_{\text{av}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\varrho(\vec{r}', t + |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Die entsprechenden partikulären Lösungen für das Vektorpotential \vec{A} sind

$$\vec{A}_{\text{part}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t \mp |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Interpretation :

„Wenn sich die Ladungsverteilung zu einem bestimmten Zeitpunkt t' ändert, dann pflanzt sich die dadurch verursachte Änderung des elektromagnetischen Felds mit der Lichtgeschwindigkeit c fort. In der Entfernung $|\vec{r} - \vec{r}'|$ ändert sich das Feld daher erst zur *späteren* Zeit $t = t' + \delta t$. Wegen dieser verspäteten Änderung heißt die Potentiallösung ... *retardiert*. ... Das andere Vorzeichen führt zur *avancierten* Lösung. ...

Zur Diskussion der physikalischen Bedeutung der retardierten und avancierten Lösung betrachten wir die Dipolantenne eines UKW-Senders. Die Abstrahlung der Antenne (bei \vec{r}') kommt nach der Zeit $\delta t = |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ beim Radiohörer (mit einer Empfangsantenne bei \vec{r}) an. Die abgestrahlte Welle wird gerade durch das retardierte Potential der oszillierenden Ladungsverteilung der Sendeantenne beschrieben. Die avancierte Lösung ist dagegen aus Kausalitätsgründen auszuschließen; denn in der avancierten Lösung würde die Ursache (Aussenden der Radiowelle) vor der Wirkung (Empfang beim Radiohörer) liegen.

In der Empfangsantenne des UKW-Hörers wird (durch die vom Sender ausgesandte Welle) eine oszillierende Ladungsverteilung induziert. Bezogen auf diese oszillierende Ladungsverteilung sind die zu empfangenden UKW-Wellen avancierte Wellen: Einer eventuellen Modulation der Welle beim Sender entspricht ja eine Modulation der Ladungsverteilung zu einer um δt späteren Zeit; die Änderung der Ladungsverteilung

erfolgt also nach der Änderung des zugehörigen Felds. In diesem Fall erfüllt gerade die avancierte Lösung die Kausalitätsforderung.

Im Prinzip sind alle oszillierenden Ladungsverteilungen formal als Quellterme in den Maxwellgleichungen zu berücksichtigen. Für die Quellen (Sender) sind dann die retardierten, für die Senken (Empfänger) die avancierten Potenziale anzusetzen.“²

²Zitiert aus: Torsten Fließbach, *Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik II*, 4. Auflage, Elsevier, München, 2009, Seite 161.

11 Die Lorentz-Transformation von \vec{E} - und \vec{B} -Feld

Nach dem Vorlesungsskript von Wolfgang Dreybrodt, Walter Ebeling und Volker Kastens, *Spezielle Relativitätstheorie*, Grundkurs Physik, Universität Bremen, Fachbereich 1, 1989.

In diesem Kapitel werden die physikalischen Größen und Gleichungen im SI-Einheiten-System verwendet und nicht, wie es in der theoretischen Physik üblich ist, im Gauß-Einheiten-System. Weiterhin gilt stets die Tatsache, dass die elektrische Ladung q eine *Erhaltungsgröße* und folglich eine relativistische Invariante mit $q = q'$ ist. Beobachter in S und in S' messen dieselbe Ladungsmenge eines bestimmten Objektes. Diese Tatsache lässt sich nicht herleiten, sie beruht allein auf experimenteller Erfahrung.

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie sich \vec{E} - und \vec{B} -Feld unter Lorentz-Transformation, also beim Wechsel des Bezugssystems verhalten. Da \vec{E} - und \vec{B} -Feld von Ort und Zeit abhängen, können wir die Ortskoordinaten und die Zeit in den Maxwell-Gleichungen transformieren. Dazu verwenden wir die homogenen Maxwell-Gleichungen (1) und (2):

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

In S gilt $\vec{E}(x, y, z, t)$ und $\vec{B}(x, y, z, t)$. Wir können die Koordinaten x, y, z, t durch die Koordinaten von S' , also durch x', y', z', t' ausdrücken und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}(x(x', y', z', t'), y(x', y', z', t'), z(x', y', z', t'), t(x', y', z', t')) \\ &= \vec{E}^*(x', y', z', t'), \\ \vec{B}(x, y, z, t) &= \vec{B}(x(x', y', z', t'), y(x', y', z', t'), z(x', y', z', t'), t(x', y', z', t')) \\ &= \vec{B}^*(x', y', z', t'). \end{aligned}$$

Wenn allgemein $\vec{a}(x, y, z, t) = \vec{a}^*(x', y', z', t')$ gilt, sind \vec{a} und \vec{a}^* verschiedene Funktionen, weil sie verschiedene Argumente besitzen. Vektoriell sind \vec{a} und \vec{a}^* aber gleich, d. h. \vec{a} und \vec{a}^* besitzen trotz verschiedener Argumente in S die gleichen Komponenten. Wir können von jeder Komponente von $\vec{a}^*(x', y', z', t')$ unter Anwendung der Kettenregel die partiellen Ableitungen nach den ungestrichenen Koordinaten bilden und

erhalten z. B. für die Komponente a_y^* partiell abgeleitet nach x

$$\frac{\partial a_y^*}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial a_y^*}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial a_y^*}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial a_y^*}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial a_y}{\partial x}. \quad (11.1)$$

Für die partielle Ableitung des gesamten Vektors \vec{a}^* z. B. nach x kann man damit schreiben

$$\frac{\partial \vec{a}^*}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \vec{a}^*}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \vec{a}^*}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \vec{a}^*}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x}. \quad (11.2)$$

In gleicher Weise erhält man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \vec{a}}{\partial y}$, $\frac{\partial \vec{a}}{\partial z}$, $\frac{\partial \vec{a}}{\partial t}$. Wir verwenden die Lorentz-Transformation

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

und erhalten das Array \mathbf{A} mit den Elementen A_{ij} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= \gamma & \frac{\partial x'}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial x'}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial x'}{\partial t} &= -\gamma v \\ \frac{\partial y'}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial y'}{\partial y} &= 1 & \frac{\partial y'}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial y'}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial z'}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial z'}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial z'}{\partial z} &= 1 & \frac{\partial z'}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial t'}{\partial x} &= -\gamma \frac{v}{c^2} & \frac{\partial t'}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial t'}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial t'}{\partial t} &= \gamma. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Dieses Array entspricht der Lorentz-Transformation in Matrixschreibweise. Allerdings haben wir hier als Zeitkoordinate t verwendet und nicht ct . Mit (11.1), (11.2) und (11.3) können wir die partiellen Ableitungen von $\vec{E}(x, y, z, t)$ durch die gestrichenen Koordinaten ausdrücken:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \gamma \frac{\partial E_x^*}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x^*}{\partial t'}, & \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{\partial E_x^*}{\partial y'}, & \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{\partial E_x^*}{\partial z'}, \\ & \frac{\partial E_x}{\partial t} &= -\gamma v \frac{\partial E_x^*}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial E_x^*}{\partial t'}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \gamma \frac{\partial E_y^*}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y^*}{\partial t'}, & \frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{\partial E_y^*}{\partial y'}, & \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{\partial E_y^*}{\partial z'}, \\ & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\gamma v \frac{\partial E_y^*}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial E_y^*}{\partial t'}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \gamma \frac{\partial E_z^*}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z^*}{\partial t'}, & \frac{\partial E_z}{\partial y} &= \frac{\partial E_z^*}{\partial y'}, & \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{\partial E_z^*}{\partial z'}, \\ & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= -\gamma v \frac{\partial E_z^*}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial E_z^*}{\partial t'}. \end{aligned}$$

Damit haben wir zur Darstellung der partiellen Ableitungen von $\vec{E}(x, y, z, t)$ und analog auch für $\vec{B}(x, y, z, t)$ in gestrichenen Koordinaten folgende Differentialoperatoren gefunden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'}, & \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z'}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -\gamma v \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'}.\end{aligned}$$

Anwendung der Differentialoperatoren auf die Maxwell-Gleichung (1):

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \gamma \frac{\partial B_x^*}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_x^*}{\partial t'} + \frac{\partial B_y^*}{\partial y'} + \frac{\partial B_z^*}{\partial z'} = 0. \quad (11.4)$$

Anwendung der Differentialoperatoren auf die Komponenten der Maxwell-Gleichung (2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Rightarrow \\ \frac{\partial E_z^*}{\partial y'} - \frac{\partial E_y^*}{\partial z'} &= \gamma v \frac{\partial B_x^*}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial B_x^*}{\partial t'}\end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \\ \frac{\partial E_x^*}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial E_z^*}{\partial x'} + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z^*}{\partial t'} &= \gamma v \frac{\partial B_y^*}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial B_y^*}{\partial t'}\end{aligned} \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \\ \gamma \frac{\partial E_y^*}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y^*}{\partial t'} - \frac{\partial E_x^*}{\partial y'} &= \gamma v \frac{\partial B_z^*}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial B_z^*}{\partial t'}.\end{aligned} \quad (11.7)$$

Umstellen der gesternteten Gleichung von (11.4) nach $\gamma \frac{\partial B_x^*}{\partial x'}$ ergibt

$$\gamma \frac{\partial B_x^*}{\partial x'} = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_x^*}{\partial t'} - \frac{\partial B_y^*}{\partial y'} - \frac{\partial B_z^*}{\partial z'}. \quad (11.8)$$

Die rechte Seite von (11.8) setzen wir in (11.5) ein und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z^*}{\partial y'} - \frac{\partial E_y^*}{\partial z'} &= v \left(\gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_x^*}{\partial t'} - \frac{\partial B_y^*}{\partial y'} - \frac{\partial B_z^*}{\partial z'} \right) - \gamma \frac{\partial B_x^*}{\partial t'} \\ &= \left(\gamma \frac{v^2}{c^2} - \gamma \right) \frac{\partial B_x^*}{\partial t'} - v \frac{\partial B_y^*}{\partial y'} - v \frac{\partial B_z^*}{\partial z'} \\ \frac{\partial E_z^*}{\partial y'} - \frac{\partial E_y^*}{\partial z'} &= -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial B_x^*}{\partial t'} - v \frac{\partial B_y^*}{\partial y'} - v \frac{\partial B_z^*}{\partial z'}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y'} \left[\gamma (E_z^* + v B_y^*) \right] - \frac{\partial}{\partial z'} \left[\gamma (E_y^* - v B_z^*) \right] = -\frac{\partial B_x^*}{\partial t'}. \quad (11.9)$$

(11.9) ist die x -Komponente der Maxwell-Gleichung (2) im System S ausgedrückt in den Koordinaten von S' . Da aber die Maxwell-Gleichung (2) wegen des Relativitätsprinzips auch in S' gilt und ihre x' -Komponente dort die Form

$$\frac{\partial}{\partial y'} E'_z - \frac{\partial}{\partial z'} E'_y = -\frac{\partial}{\partial t'} B'_x \quad (11.10)$$

hat, findet man durch Vergleich von (11.9) mit (11.10) und unter Berücksichtigung von $\vec{E}^* = \vec{E}$ und $\vec{B}^* = \vec{B}$

$$\begin{aligned} E'_z &= \gamma (E_z^* + v B_y^*) = \gamma (E_z + v B_y) , \\ E'_y &= \gamma (E_y^* - v B_z^*) = \gamma (E_y - v B_z) , \\ B'_x &= B_x^* = B_x . \end{aligned}$$

Jetzt formen wir die gesternte y -Komponente (11.6) der Maxwell-Gleichung (2) um:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x^*}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial E_z^*}{\partial x'} + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z^*}{\partial t'} &= \gamma v \frac{\partial B_y^*}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial B_y^*}{\partial t'} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z'} E_x^* - \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma (E_z^* + v B_y^*) \right] &= -\frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(B_y^* + \frac{v}{c^2} E_z^* \right) \right] . \end{aligned} \quad (11.11)$$

Der Vergleich von (11.11) mit der y' -Komponente

$$\frac{\partial}{\partial z'} E'_x - \frac{\partial}{\partial x'} E'_z = -\frac{\partial}{\partial t'} B'_y$$

der Maxwell-Gleichung (2) in S' liefert

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x^* = E_x , \\ B'_y &= \gamma \left(B_y^* + \frac{v}{c^2} E_z^* \right) = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) . \end{aligned}$$

Schließlich formen wir noch die gesternte z -Komponente (11.7) der Maxwell-Gleichung (2) um:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial E_y^*}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y^*}{\partial t'} - \frac{\partial E_x^*}{\partial y'} &= \gamma v \frac{\partial B_z^*}{\partial x'} - \gamma \frac{\partial B_z^*}{\partial t'} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x'} \left[\gamma (E_y^* - v B_z^*) \right] - \frac{\partial}{\partial y'} E_x^* &= -\frac{\partial}{\partial t'} \left[\gamma \left(B_z^* - \frac{v}{c^2} E_y^* \right) \right] . \end{aligned} \quad (11.12)$$

Der Vergleich von (11.12) mit der z' -Komponente

$$\frac{\partial}{\partial z'} E'_x - \frac{\partial}{\partial x'} E'_z = -\frac{\partial}{\partial t'} B'_y$$

der Maxwell-Gleichung (2) in S' liefert

$$B'_z = \gamma \left(B_z^* - \frac{v}{c^2} E_y^* \right) = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) .$$

Wir stellen fest:

Die Transformationsgleichungen für die drei Komponenten des \vec{E} -Feldes und für die drei Komponenten des \vec{B} -Feldes unter der Bedingung, dass sich S' mit der Geschwindigkeit v gegenüber S längs der x -Achse bewegt, sind

$$\begin{array}{ll} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma (E_y - v B_z) & B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) \\ E'_z = \gamma (E_z + v B_y) & B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \end{array}$$

Wie man sieht, werden für einen mit S' bewegten Beobachter \vec{E} -Feld und \vec{B} -Feld ineinander transformiert. Elektrisches und magnetisches Feld sind deshalb untrennbar miteinander verbunden und können zum elektromagnetischen Feld vereinigt werden. Diese Herleitung basiert auf der Lorentz-Transformation der Koordinaten, von denen \vec{E} -Feld und \vec{B} -Feld abhängen. Bei einem Systemwechsel des Beobachters hätten wir die inverse Lorentz-Transformation verwenden müssen, was im Ergebnis zu einer Umkehr der Strichindizierung und des Vorzeichens von v , also zur relativistischen Vertauschung in den Transformationsgleichungen geführt hätte.

12 Das elektromagnetische Feld einer geradlinig und gleichförmig bewegten Punktladung

Entsprechende Animationen findet man im Internet z. B. unter den Suchbegriffen „Feld einer bewegten Punktladung“ oder „Bewegte-Ladung-Applet“.

Gemäß Abbildung 12.1 befinde sich eine Punktladung q stets im Koordinatenursprung von S' und bewege sich mit der Geschwindigkeit v geradlinig und gleichförmig längs der x -Achse von S . Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ sollen S und S' aufeinanderliegen. In ihrem Ruhesystem S' erzeugt die Punktladung kein Magnetfeld sondern allein das zeitlich konstante kugelsymmetrische elektrische Feld

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \vec{e}'_{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \frac{\vec{r}'}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^3} (x' \vec{e}'_{x'} + y' \vec{e}'_{y'} + z' \vec{e}'_{z'}) \quad (12.1)$$

mit $r' = |\vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Da das \vec{E}' -Feld zu jedem Zeitpunkt die gleiche Gestalt hat, muss auch seine Transformierte, das sich in S mit v bewegendes Feld stets die gleiche Gestalt haben. In S' gilt also

$$\vec{E}' = \vec{E}'(x', y', z') = (E'_x, E'_y, E'_z), \quad \vec{B}' = 0.$$

Um die Feldkomponenten im Laborsystem S zu erhalten, benötigen wir die inversen Transformationsgleichungen für die Komponenten von \vec{E}' unter Berücksichtigung von $\vec{B}' = 0$:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & B_x &= B'_x, \\ E_y &= \gamma(E'_y + vB'_z) = \gamma E'_y, & B_y &= \gamma\left(B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z\right) = -\gamma \frac{v}{c^2} E'_z, \\ E_z &= \gamma(E'_z - vB'_y) = \gamma E'_z, & B_z &= \gamma\left(B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y\right) = \gamma \frac{v}{c^2} E'_y. \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir die \vec{E}' -Feld-Komponenten durch die Koordinaten von S ausdrücken. Dafür können wir wegen der Zeitunabhängigkeit der Feldgestalt zur Vereinfachung die Lorentz-Transformation für den Zeitpunkt $t = 0$ verwenden:

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma x, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (12.2)$$

Anmerkung:

Die Transformation der Zeit $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) = -\gamma \frac{v}{c^2}x$ benötigen wir nicht, weil \vec{E}' nicht von t' abhängt und somit nur die Ortsvektoren $\vec{r}' = (x', y', z')$ bzw. deren Länge transformiert werden. Da die Länge eines Ortsvektors \vec{r}' im Laborsystem S der zu *einem* Zeitpunkt in S gemessene räumliche Abstand zwischen Anfang und Ende dieses Vektors ist, darf man vereinfachend den Zeitpunkt $t = 0$ wählen. Die Transformation erfolgt dann entsprechend der Messungen 2 bzw. 3 in **Tabelle 4.1**.

Etwas einfacher ausgedrückt:

Dass in S' bei $t = 0$ die Zeit $t' = -\gamma \frac{v}{c^2} x$ von x abhängt und nur für $x = x' = 0$ und damit nur im Koordinatenursprung gleich Null ist, spielt hier keine Rolle. Von Bedeutung ist allein, wie ein Ortsvektor aus S' im Laborsystem S erscheint und welche Länge er dort hat. Der räumliche Anfang und das räumliche Ende dieses Vektors existieren in S stets gleichzeitig, so dass ihr räumlicher Abstand, die Länge des Ortsvektors, zu *einem* Zeitpunkt bestimmt werden kann. Die Komponente des Ortsvektors parallel und antiparallel zu \vec{v} , in unserem Fall die x' -Komponente, ist dann um den Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ verkürzt bzw. lorentzkontrahiert.

Mit (12.2) schreiben wir zunächst r'^2 in den Koordinaten von S :

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \gamma^2 x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2 \left[x^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2 + z^2) \right] = \gamma^2 d^2$$

mit $d = \left[x^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2 + z^2) \right]^{\frac{1}{2}}$.

Weiterhin setzen wir

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} = k.$$

Aus (12.1) resultieren jetzt die Komponenten von \vec{E}' ausgedrückt in den Koordinaten von S :

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3} = k \frac{\gamma x}{\gamma^3 d^3}, \\ E'_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{r'^3} = k \frac{y}{\gamma^3 d^3}, \\ E'_z &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{r'^3} = k \frac{z}{\gamma^3 d^3}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Mit (12.3) gehen wir in die inversen Transformationsgleichungen für das Feld der bewegten Punktladung q und erhalten die Feldkomponenten in S :

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x = k \frac{\gamma x}{\gamma^3 d^3} = k \frac{x}{\gamma^2 d^3} \\ E_y &= \gamma \cdot E'_y = \gamma \cdot k \frac{y}{\gamma^3 d^3} = k \frac{y}{\gamma^2 d^3} \\ E_z &= \gamma \cdot E'_z = \gamma \cdot k \frac{z}{\gamma^3 d^3} = k \frac{z}{\gamma^2 d^3} \\ B_x &= B'_x = 0 = 0 = 0 \\ B_y &= -\gamma \frac{v}{c^2} \cdot E'_z = -\gamma \frac{v}{c^2} \cdot k \frac{z}{\gamma^3 d^3} = -\frac{v}{c^2} k \frac{z}{\gamma^2 d^3} = -\frac{v}{c^2} E_z \\ B_z &= \gamma \frac{v}{c^2} \cdot E'_y = \gamma \frac{v}{c^2} \cdot k \frac{y}{\gamma^3 d^3} = \frac{v}{c^2} k \frac{y}{\gamma^2 d^3} = \frac{v}{c^2} E_y \end{aligned}$$

Wir fassen die Komponenten B_x , B_y und B_z unter Berücksichtigung von $\vec{v} = v_x \vec{e}_x$ zum \vec{B} -Feld zusammen:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{c^2} E_z \\ \frac{v}{c^2} E_y \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -v_x E_z \\ v_x E_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \\ &\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{E})}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Das \vec{E} -Feld im Laborsystem S ist

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = k \frac{1}{\gamma^2 d^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \vec{r} \frac{1}{\gamma^2 d^3} = k \vec{r} \frac{1}{\gamma^2} \left[d^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left[x^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2 + z^2) \right]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Jetzt nutzen wir die Rotationssymmetrie des \vec{E} -Feldes um die z -Achse aus, um d^2 zu parameterisieren. Zunächst formen wir d^2 etwas um:

$$\begin{aligned}d^2 &= x^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{v^2}{c^2} (y^2 + z^2) \\ &= r^2 - \frac{v^2}{c^2} (y^2 + z^2) = r^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{y^2 + z^2}{r^2} \right).\end{aligned}$$

Man kann sich leicht veranschaulichen, dass $\sqrt{y^2 + z^2}/r$ der Sinus des Winkels ϑ zwischen \vec{r} und \vec{v} bzw. der x -Achse ist und folglich

$$\frac{y^2 + z^2}{r^2} = \sin^2 \vartheta, \quad \vartheta = \sphericalangle(\vec{r}, \vec{v}).$$

Damit erhalten wir

$$d^2 = r^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta \right). \quad (12.6)$$

Schließlich setzen wir (12.6) in (12.5) ein und erhalten das \vec{E} -Feld in S gleichsam als Momentaufnahme zum Zeitpunkt $t = t' = 0$:

$$\vec{E} = \frac{q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left[r^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta \right) \right]^{-\frac{3}{2}},$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{-\frac{3}{2}}. \quad (12.7)$$

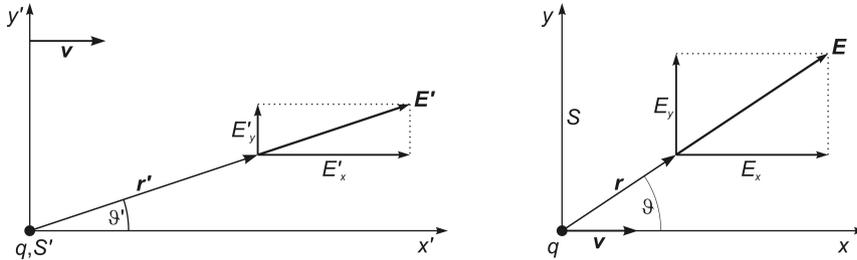


Abb. 12.1 links: Das elektrische Feld der Punktladung q in ihrem Ruhesystem S' . Es gilt $x' = \gamma x$ und $y' = y$ bei $\gamma = 2$. rechts: Das elektrische Feld der relativ zu S mit der Geschwindigkeit v bewegten Punktladung q zum Zeitpunkt $t = 0$. Es gilt $E_x = E'_x$ und $E_y = \gamma E'_y$.

Untersuchen wir die Abhängigkeit des \vec{E} -Feldes von der Geschwindigkeit \vec{v} und dem Winkel ϑ . Zur besseren Veranschaulichung der Komponenten verwenden wir dafür auch (12.5). Beginnen wir mit einigen speziellen Fällen:

- $v = 0$, ϑ beliebig $\Rightarrow \vec{E} = \frac{q \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \vec{E}'$.

Das \vec{E} -Feld ist kugelsymmetrisch und gleich dem \vec{E}' -Feld. Es ist $\vec{B} = \vec{0}$.

- $0 < v < c$, $\vartheta = 0 \Rightarrow x \neq 0, y = z = 0$:

$$E_x = \frac{kx}{\gamma^2 x^3} = \frac{k}{(\gamma x)^2} = \frac{k}{x'^2} = E'_x, \quad E_y = E_z = 0. \quad (12.8)$$

Wegen $\gamma x = x'$ und $\gamma > 1$ hat die E_x -Komponente in S schon bei $x < x'$ die Feldstärke E'_x erreicht. Die x -Komponente des \vec{E} -Feldes in S fällt bei wachsendem Abstand von der Punktladung schneller ab als die x' -Komponente des \vec{E}' -Feldes in S' . Das \vec{E} -Feld ist in x -Richtung gegenüber dem kugelsymmetrischen \vec{E}' -Feld gestaucht.

- $0 < v < c$, $\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0$, z. B. $y \neq 0, z = 0$:

$$E_x = \frac{kx}{\gamma^2} \left[\frac{y^2}{\gamma^2}\right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{kx}{\gamma^2} \frac{\gamma^3}{y^3} = \gamma \frac{k}{y^3} x = 0 \quad \text{bei } x = 0, \quad (12.9)$$

$$E_y = \frac{ky}{\gamma^2} \left[\frac{y^2}{\gamma^2}\right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{ky}{\gamma^2} \frac{\gamma^3}{y^3} = \gamma \frac{k}{y^2} = \gamma \frac{k}{y'^2} = \gamma E'_y, \quad (12.10)$$

$$E_z = \frac{kz}{\gamma^2} \left[\frac{y^2}{\gamma^2}\right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{kz}{\gamma^2} \frac{\gamma^3}{y^3} = \gamma \frac{k}{y^3} z = 0 \quad \text{bei } z = 0. \quad (12.11)$$

Die E_x - und die E_z -Komponente verschwinden. Die E_y -Komponente in S ist um den Faktor γ größer als die E'_y -Komponente in S' . Wegen der Rotationssymmetrie des \vec{E} -Feldes um die x -Achse gilt in der (y, z) -Ebene:

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \gamma \sqrt{E_y'^2 + E_z'^2}.$$

Das \vec{E} -Feld ist also in der (y, z) -Ebene gegenüber dem kugelsymmetrischen \vec{E}' -Feld gedehnt.

- $v \rightarrow c \Rightarrow \gamma \rightarrow \infty, \vartheta = 0 \Rightarrow x \neq 0, y = z = 0$:

Aus (12.8) resultiert für $v \rightarrow c$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} E_x = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{kx}{\gamma^2} \frac{1}{x^3} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{k}{(\gamma x)^2} = 0, \quad E_y = E_z = 0.$$

Für $v \rightarrow c$ geht die E_x -Komponente, also die \vec{E} -Feld-Komponente längs der Bahn der Punktladung in S gegen Null.

- $v \rightarrow c \Rightarrow \gamma \rightarrow \infty, \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0, \text{ z. B. } y \neq 0, z = 0$:

Aus (12.9), (12.10) und (12.11) resultiert für $v \rightarrow c$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} E_y = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{ky}{\gamma^2} \left[\frac{y^2}{\gamma^2} \right]^{-\frac{3}{2}} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \frac{k}{y^2} = \infty, \quad E_x = E_z = 0.$$

Wegen der Rotationssymmetrie des \vec{E} -Feldes um die x -Achse gilt in der (y, z) -Ebene, also senkrecht zur Bahn der Punktladung für $v \rightarrow c$

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \gamma \sqrt{E_y'^2 + E_z'^2} \rightarrow \infty.$$

Wie sieht das \vec{E} -Feld einer bewegten Punktladung in S aus?

1. Bei $v = 0$, also wenn die Punktladung ruht, ist das \vec{E} -Feld kugelsymmetrisch.
2. Für den Abstand r von der Punktladung gilt:
Parallel und antiparallel zur Geschwindigkeit \vec{v} entsprechend $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ hat die \vec{E} -Feld-Stärke ihr Minimum. Sie nimmt dann stetig zu bis sie senkrecht zu \vec{v} entsprechend $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ ihr Maximum erreicht. Das \vec{E} -Feld erscheint längs der Bahn der Punktladung gestaucht und senkrecht dazu gedehnt bzw. vergrößert.
Je größer die Geschwindigkeit v , desto stärker ist dieser Effekt.
3. Ausgehend von der Punktladung nimmt die Feldstärke $|\vec{E}|$ entsprechend $\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$ radial mit $\frac{1}{r^2}$ ab. Die \vec{E} -Feld-Linien haben somit einen radialen Verlauf.
4. Das \vec{B} -Feld hat keine x -Komponente und steht wegen $\vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E})$ stets senkrecht auf \vec{v} bzw. senkrecht zur x -Achse und auch senkrecht auf den radialen \vec{E} -Feld-Linien. Folglich bilden die \vec{B} -Feld-Linien konzentrische Kreise um die x -Achse, wobei auch $|\vec{B}|$ wie $|\vec{E}|$ mit $\frac{1}{r^2}$ abnimmt.
5. Für $v \rightarrow c$ gehen die E_x -Komponente gegen Null und die E_y - und die E_z -Komponente gegen Unendlich.

Maxwell'sche Gleichungen im Vakuum

$$\text{inhomogene Maxwell'sche Gln.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho, \\ \operatorname{rot} \vec{\mathbf{B}} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}}, \end{array} \right.$$

$$\text{homogene Maxwell'sche Gln.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{0}}. \end{array} \right.$$

13 Kovariante Darstellung der Elektrodynamik

- In Anlehnung an das Buch von Helmut Günther,
Spezielle Relativitätstheorie – Ein neuer Einstieg in Einsteins Welt,
1. Auflage, Teubner-Verlag, Wiesbaden, 2007, Seite 154 bis Seite 200.
- Siehe auch: Eckhard Rebhahn, *Theoretische Physik: Relativitätstheorie und Kosmologie*, Spektrum-Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012, Seite 120 und folgende,
Kapitel 5 **Relativistische Formulierung der Elektrodynamik**.
- Dieses Kapitel ist eine Ergänzung zum
Kapitel 3 **Zur relativistischen Punktmechanik im Viererkalkül**
in meinem Skript *Grundideen zur relativistischen Punktmechanik und zur ART*.

Die kovariante Darstellung der Elektrodynamik erfolgt im Rahmen der SRT. **Kovariant** bedeutet in diesem Zusammenhang, dass Tensorgleichungen wie z. B. $v^\alpha = A^\alpha_\beta w^\beta$ unter Transformationen, d. h. beim Wechsel des Koordinatensystems, **forminvariant** sind. Symmetrien sind dafür eine wesentliche Bedingung:

- Die **Isotropie des Raumes** führt zur Forminvarianz bei Drehungen, d. h., Tensorgleichungen sind kovariant unter orthogonalen Transformationen.
- Das **Relativitätsprinzip** führt zur Forminvarianz beim Wechsel des Inertialsystems, d. h., Lorentz-Tensorgleichungen sind kovariant unter Lorentz-Transformation.

Tensoren in Tensorgleichungen, die beispielsweise physikalische Gesetze formulieren, besitzen zwar in verschiedenen Inertialsystemen (Bezugssystemen) verschiedene Komponenten, ihre Form ändert sich jedoch insgesamt nicht bei einem Wechsel des Bezugssystems.

- Die **Maxwell-Gleichungen** gelten ohne Korrektur in jedem Inertialsystem und sind demzufolge per se kovariant. Sie bilden die Grundlage der Elektrodynamik.

Vierertensoren sind Tensoren, die auf dem Minkowski-Raum basieren und deren Indizes deshalb *allgemein* die Zahlen 0,1,2,3 annehmen können.

Vierervektoren sind Vierertensoren 1. Stufe, die sich wie Tensoren 2. Stufe in „Matrixschreibweise“ (Spalten- und Zeilenvektoren) oder in „Indexschreibweise“ darstellen lassen. Im Grunde genommen bräuchte man zur Beherrschung der SRT den Tensorkalkül nicht, denn die SRT „lebt“ im Minkowski-Raum, einem 4-dimensionalen pseudoeuklidischen Raum, dargestellt durch das pseudoorthogonale Raumzeit-Koordinatensystem. Doch lassen sich durch den Tensorkalkül viele Sachverhalte der SRT und insbesondere der Elektrodynamik eleganter, d. h. kompakter und übersichtlicher darstellen.

- Zur **Notation**:

In diesem Kapitel verwenden wir die Signatur (-2) entsprechend der „West Coast Metric“.

Im Folgenden schreiben wir den Lorentz-Faktor in der Form

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} .$$

Dreivektoren wie beispielsweise die (Dreier-)Geschwindigkeit $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ oder der relativistische Impuls $\vec{p}_r = (p_{rx}, p_{ry}, p_{rz})$ werden fettgedruckt dargestellt.

In Matrixdarstellung schreiben wir Vierervektoren beispielsweise in der Form

$$(w^\mu) = (w^0, w^1, w^2, w^3) = (w^0, \vec{w}).$$

Dabei sind die w^μ die Komponenten des Vierervektors (w^μ) . \vec{w} ist der Raumanteil des Vierervektors und wird deshalb nicht fettgedruckt dargestellt. w^0 ist der Zeitananteil des Vierervektors. Ist der Raumanteil des Vierervektors gleich dem Dreivektor wie beispielsweise beim relativistischen Impuls \vec{p}_r , schreiben wir ihn fettgedruckt.

Achtung! Auch wenn die kontravarianten Vierervektoren in der Matrixdarstellung als Spaltenvektoren definiert sind, schreiben wir sie aus Platzgründen bedarfsweise als Zeilenvektoren.

Weil die Lorentz-Transformationsmatrizen \mathbf{L} und \mathbf{L}^{-1} gemäß $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$ und $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L}^{-1T}$ symmetrisch sind, brauchen wir die Indizes in der Indexdarstellung nicht horizontal gegeneinander versetzt zu schreiben. Wir verwenden demzufolge aus Bequemlichkeit die Schreibweise $\mathbf{L} \rightarrow L_\mu^{\mu'}$ bzw. $\mathbf{L}^{-1} \rightarrow L_{\mu'}^\mu$.

- Die Raumzeit-Punkte (Ereignisse) einer Weltlinie werden durch Vierervektoren, die Viererorte, in Parameterdarstellung beschrieben:

$$\text{kontravariant: } (x^\mu(t)) := (x^0, x^1(t), x^2(t), x^3(t)) = (ct, x(t), y(t), z(t)),$$

$$\text{kovariant: } (x_\mu(t)) := (x_0, x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (ct, -x(t), -y(t), -z(t)).$$

Der Parameter ist hier die Zeit t .

- Die Vierervektoren der Geschwindigkeit sind

$$\text{kontravariant: } (u^\mu) := \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \gamma_u \left(\frac{dx^\mu}{dt} \right) = (\gamma_u c, \gamma_u u_x, \gamma_u u_y, \gamma_u u_z),$$

$$\text{kovariant: } (u_\mu) := \left(\frac{dx_\mu}{d\tau} \right) = \gamma_u \left(\frac{dx_\mu}{dt} \right) = (\gamma_u c, -\gamma_u u_x, -\gamma_u u_y, -\gamma_u u_z).$$

Die Vierergeschwindigkeit ist zeitartig.

- Das **Differential der Eigenzeit** τ ist

$$d\tau := \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - u^2 dt^2} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt = \frac{1}{\gamma_u} dt$$

mit der momentanen Geschwindigkeit $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \Rightarrow \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 = u^2$ eines Teilchens oder eines Körpers und mit dem Weltlinienelement ds .

- Das **Eigenzeitintervall**

$$\Delta\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{u^2(t)}{c^2}} dt$$

ist eine **Lorentz-Invariante**, also in allen Inertialsystemen gleich.

- Das **Minkowski-Produkt** (Skalarprodukt) aus verschiedenen oder gleichen Vierervektoren wie beispielsweise

$$ds^2 := \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\nu dx^\nu$$

ist **lorentz-invariant**.

- Die Norm $|u^\mu|$ der Vierergeschwindigkeit ist in allen Bezugssystemen und für alle Geschwindigkeiten \vec{u} dieselbe **Invariante**, nämlich

$$\begin{aligned} |u^\mu|^2 &= \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2 \\ &= \frac{c^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \frac{(u_x)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \frac{(u_y)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} - \frac{(u_z)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ &= \frac{c^2 - u^2}{\frac{c^2 - u^2}{c^2}} = c^2 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|u^\mu| = c .$$

- Die **elektrische Ladung** q ist eine Erhaltungsgröße und somit **lorentz-invariant**.
- Die **Ruheladungsdichte** ϱ_0 ist die Dichte der elektrischen Ladung in ihrem Ruhesystem :

$$\varrho_0 = \frac{\Delta q}{\Delta V_0} \quad \text{bzw. kurz} \quad \varrho_0 = \frac{q}{V_0} .$$

Die Ruheladungsdichte ist folglich unabhängig vom Bezugssystem, also **lorentz-invariant**

- Die **bewegte Ladungsdichte** ϱ ist die Dichte der elektrischen Ladung in dem System, in welchem sich die Ladung z. B. mit der Geschwindigkeit \vec{u} bewegt:

$$\varrho = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_0} V_0 \frac{1}{V} = \varrho_0 V_0 \frac{\gamma_u}{V_0} = \varrho_0 \cdot \gamma_u \quad \Rightarrow \quad \varrho > \varrho_0 .$$

Wegen der Lorentz-Kontraktion des bewegten Volumens V in Bewegungsrichtung wurde hierbei $V = \frac{1}{\gamma_u} \cdot V_0$ verwendet.

- (j_μ) ist der kovariante Vierervektor der Stromdichte, kurz die **kovariante Viererstromdichte**, die man mit dem kovarianten Vierervektor (u_μ) der Geschwindigkeit wie folgt erhält:

$$\begin{aligned} (j_\mu) &= \varrho_0 (u_\mu) = \varrho_0 \left(\frac{dx_\mu}{d\tau} \right) = \varrho_0 \gamma_u \frac{d}{dt} (ct, -x, -y, -z) \\ &= \varrho_0 \gamma_u \cdot (c, -u_x, -u_y, -u_z) , \end{aligned}$$

$$\boxed{(j_\mu) = \varrho \cdot (c, -u_x, -u_y, -u_z) = (c\varrho, -\vec{j})} .$$

Die **kontravariante Viererstromdichte** ist folglich

$$\boxed{(j^\mu) = \varrho \cdot (c, u_x, u_y, u_z) = (c\varrho, \vec{j})} .$$

- Ausgehend vom **Potentialansatz** (siehe Abschnitt 9.1.1)

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \\ \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \end{pmatrix}, \quad (13.1)$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} A_x \\ -\frac{\partial}{\partial y} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} A_y \\ -\frac{\partial}{\partial z} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} A_z \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

und mit dem **Ansatz für das Viererpotential**¹

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = \left(\frac{\Phi}{c}, A_x, A_y, A_z \right), \quad (13.3)$$

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = \eta_{\mu\nu} A^\nu = \left(\frac{\Phi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z \right) \quad (13.4)$$

konstruieren wir den **elektromagnetischen Feldstärketensor**, kurz Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu \quad \text{bzw.} \quad F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu}$$

$$\text{mit} \quad (\eta^{\mu\nu}) = \eta = \eta^T = \eta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\eta_{\mu\nu}).$$

Unter Berücksichtigung des Potentialansatzes (13.1) und (13.2) und mit (13.4) berechnen wir die 16 Komponenten des kovarianten Feldstärketensors. So erhalten wir beispielsweise die Komponenten

$$F_{01} = \frac{\partial}{\partial x^0} A_1 - \frac{\partial}{\partial x^1} A_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-A_x) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi}{c} = \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} A_x \right) = \frac{1}{c} E_x,$$

$$F_{23} = \frac{\partial}{\partial x^2} A_3 - \frac{\partial}{\partial x^3} A_2 = \frac{\partial}{\partial y} (-A_z) - \frac{\partial}{\partial z} (-A_y) = - \left(\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \right) = -B_x.$$

¹Es wird sich im weiteren Verlauf zeigen, dass dieser Ansatz zu den richtigen Ergebnissen führt. Zumindest aber besitzen $\frac{1}{c} \Phi$ und \vec{A} die gleiche physikalische Dimension.

Es resultieren schließlich der **kovariante Feldstärketensor** $F_{\mu\nu}$ und durch Her-
aufziehen der Indizes von $F_{\mu\nu}$ gemäß der

$$\text{Matrizenmultiplikation } (\eta^{\mu\alpha}) \cdot (F_{\alpha\beta}) \cdot (\eta^{\beta\nu}) = (F^{\mu\nu})$$

auch der **kontravariante Feldstärketensor** $F^{\mu\nu}$ jeweils in Matrixdarstellung:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} E_x & \frac{1}{c} E_y & \frac{1}{c} E_z \\ -\frac{1}{c} E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{c} E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c} E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} E_x & -\frac{1}{c} E_y & -\frac{1}{c} E_z \\ \frac{1}{c} E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c} E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c} E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.5)$$

Wie man sieht, ist der Feldstärketensor **antisymmetrisch** gemäß

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad \text{bzw.} \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}.$$

Weiterhin gelten die folgenden Beziehungen für den Übergang vom kovarianten zum
kontravarianten Feldstärketensor und umgekehrt:

$$F_{0\nu} = -F^{0\nu}, \quad F_{\mu 0} = -F^{\mu 0}, \quad F_{\mu\nu} = F^{\mu\nu}, \quad \mu\nu \in \{1, 2, 3\}.$$

- Von besonderem Interesse ist das Verhalten des Feldstärketensors unter Lorentz-
Transformation, weil man daran das Transformationsverhalten der Komponenten
des \vec{E} - und \vec{B} -Feldes ablesen kann. Betrachten wir beispielsweise die Transformation
von $F_{\mu\nu}$ in S nach $F_{\mu'\nu'}$ im Inertialsystem S' , wobei sich S' gemäß der **Standard-
konfiguration** mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v \vec{e}_x$ längs der x -Achse von S bewegen
soll:

$$F_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} F_{\mu\nu}.$$

Hierbei wird die inverse Lorentz-Transformationsmatrix

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right) = \mathbf{L}^{-1} = (\mathbf{L}^{-1})^T = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

benutzt,² sodass die Transformation von $F_{\mu\nu}$ in Matrixschreibweise gemäß

²Warum hier die inverse Lorentz-Transformation \mathbf{L}^{-1} benutzt wird, erkennen wir an der folgenden
Analogie:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu = L_{\mu'}^\mu dx^\mu \hat{=} \mathbf{L}(dx^\mu) \quad \longleftrightarrow \quad dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} dx^{\mu'} = L_\mu^{\mu'} dx^{\mu'} \hat{=} \mathbf{L}^{-1}(dx^{\mu'}).$$

$(F_{\mu'\nu'}) = (\mathbf{L}^{-1})^T (F_{\mu\nu}) \mathbf{L}^{-1}$ erfolgt:

$$(F_{\mu'\nu'}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} E'_x & \frac{1}{c} E'_y & \frac{1}{c} E'_z \\ -\frac{1}{c} E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ -\frac{1}{c} E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ -\frac{1}{c} E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} \quad (13.6)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} E_x & \frac{1}{c} E_y & \frac{1}{c} E_z \\ -\frac{1}{c} E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{c} E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c} E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(F_{\mu'\nu'}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} E_x & \frac{\gamma(E_y - v B_z)}{c} & \frac{\gamma(E_z + v B_y)}{c} \\ -\frac{1}{c} E_x & 0 & -\frac{\gamma(c B_z - \beta E_y)}{c} & \frac{\gamma(c B_y + \beta E_z)}{c} \\ -\frac{\gamma(E_y - v B_z)}{c} & \frac{\gamma(c B_z - \beta E_y)}{c} & 0 & -B_x \\ -\frac{\gamma(E_z + v B_y)}{c} & -\frac{\gamma(c B_y + \beta E_z)}{c} & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.7)$$

Daraus resultiert der gestrichene (zweifach) kontravariante Feldstärketensor wie folgt:

$$(F^{\mu'\nu'}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} E'_x & -\frac{1}{c} E'_y & -\frac{1}{c} E'_z \\ \frac{1}{c} E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ \frac{1}{c} E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ \frac{1}{c} E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} = (\eta^{\mu'\alpha'}) (F_{\alpha'\beta'}) (\eta^{\beta'\nu'}), \quad (13.8)$$

$$(F^{\mu'\nu'}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} E_x & -\frac{\gamma(E_y - v B_z)}{c} & -\frac{\gamma(E_z + v B_y)}{c} \\ \frac{1}{c} E_x & 0 & -\frac{\gamma(c B_z - \beta E_y)}{c} & \frac{\gamma(c B_y + \beta E_z)}{c} \\ \frac{\gamma(E_y - v B_z)}{c} & \frac{\gamma(c B_z - \beta E_y)}{c} & 0 & -B_x \\ \frac{\gamma(E_z + v B_y)}{c} & -\frac{\gamma(c B_y + \beta E_z)}{c} & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (13.9)$$

- Der Vergleich der zueinander gehörenden Matrixelemente von (13.6) mit (13.7) bzw. von (13.8) mit (13.9) zeigt, wie sich \vec{E} - und \vec{B} -Feld vom Laborsystem S nach dem bewegten System S' in der **Standardkonfiguration** transformieren:

$$\boxed{\begin{array}{ll} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) & B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) & B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) \end{array}}. \quad (13.10)$$

Durch relativistische Vertauschung erhalten wir daraus die inversen Transformationsgleichungen, also die Transformation der Feldkomponenten von S' nach S :

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_x = E'_x & B_x = B'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + vB'_z) & B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z\right) \\ E_z = \gamma(E'_z - vB'_y) & B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y\right) \end{array}}. \quad (13.11)$$

Wie man sieht, sind \vec{E} - und \vec{B} -Feld untrennbar miteinander verbunden und es gilt:

- * Man kann ein reines \vec{B} -Feld niemals in ein reines \vec{E} -Feld transformieren und umgekehrt.
- * Ein reines \vec{E} - oder \vec{B} -Feld in dem einen System, erscheint *allgemein* in einem anderen System als Mischung aus beiden, nämlich als **elektromagnetisches Feld**.

Nur wenn sich ein System relativ zum anderen (momentan) längs der Feldlinien des \vec{E} - bzw. \vec{B} -Feldes bewegt, ist das resultierende Feld in beiden Systemen das gleiche.³ So gilt beispielsweise in **Standardkonfiguration** mit (13.10):

$$S : \left[\vec{E} = (E_x, 0, 0), \vec{B} = (B_x, 0, 0) \right]$$

$$\vec{v}=\frac{(v_x, 0, 0)}{\gamma} \quad S' : \left[\vec{E}' = (E_x, 0, 0), \vec{B}' = (B_x, 0, 0) \right].$$

- Indem wir die Feldvektoren in die Vektorkomponenten parallel (Index \parallel) und senkrecht (Index \perp) zur Geschwindigkeit \vec{v} von S' aufspalten, erhalten wir die Transformationsformeln für den allgemeinen Fall, nämlich dass sich S' mit beliebiger Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ bezüglich S bewegt. Um diesen allgemeinen Fall von der Standardkonfiguration zu unterscheiden, bezeichnen wir ihn als \vec{v} -**Boost**. Dabei verhält sich die Transformation der \parallel -Komponenten wie die Transformation der x -Komponenten in Standardkonfiguration und die Transformation der \perp -Komponenten verhält sich wie die Transformation der y - und z -Komponenten in Standardkonfiguration.

³Dies gilt selbstverständlich auch dann, wenn nur das \vec{E} -Feld oder nur das \vec{B} -Feld existiert.

Das Ziel bei der Herleitung der allgemeinen bzw. vektoriellen Form der Transformationsformeln für die Felder ist, die \parallel -Komponenten und die \perp -Komponenten jeweils durch $\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{v}}$ bzw. durch $\vec{\mathbf{E}}', \vec{\mathbf{B}}', \vec{\mathbf{v}}$ auszudrücken. Betrachten wir also zunächst das elektrische Feld unter Berücksichtigung von (13.10) und mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$:

$$\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{E}}'_{\parallel} + \vec{\mathbf{E}}'_{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\mathbf{E}}'_{\perp} = \vec{\mathbf{E}}' - \vec{\mathbf{E}}'_{\parallel}, \quad \vec{\mathbf{E}}'_{\parallel} \parallel \vec{\mathbf{v}}, \quad \vec{\mathbf{E}}'_{\perp} \perp \vec{\mathbf{v}}.$$

Für die \parallel -Komponente gilt dann

$$\vec{\mathbf{E}}'_{\parallel} = \left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{E}}'}{v} \right) \frac{\vec{\mathbf{v}}}{v} = \vec{\mathbf{E}}_{\parallel} = \left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{E}}}{v} \right) \frac{\vec{\mathbf{v}}}{v}. \quad (13.12)$$

Und für die \perp -Komponente gilt dabei die Verallgemeinerung

$$\left. \begin{array}{l} E'_y = \gamma(E_y - v_x B_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + v_x B_y) \end{array} \right\} \longrightarrow \vec{\mathbf{E}}'_{\perp} = \gamma \left[\vec{\mathbf{E}}_{\perp} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \right] \quad (13.13)$$

mit

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B_z - v_z B_y \\ v_z B_x - v_x B_z \\ v_x B_y - v_y B_x \end{pmatrix}.$$

Die relevanten Terme für den speziellen Fall der Standardkonfiguration mit $\vec{\mathbf{v}} = (v_x, 0, 0)$ wurden im Vektorprodukt unterstrichen. Jetzt substituieren wir

$$\vec{\mathbf{E}}'_{\perp} = \vec{\mathbf{E}}' - \vec{\mathbf{E}}'_{\parallel} = \vec{\mathbf{E}}' - \left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{E}}'}{v} \right) \frac{\vec{\mathbf{v}}}{v}$$

in (13.13):

$$\vec{\mathbf{E}}'_{\perp} = \gamma \left[\vec{\mathbf{E}}' - \left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{E}}'}{v} \right) \frac{\vec{\mathbf{v}}}{v} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \right]. \quad (13.14)$$

Schließlich können wir (13.12) und (13.14) zusammenfassen und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}' &= \vec{\mathbf{E}}'_{\parallel} + \vec{\mathbf{E}}'_{\perp} \\ &= \left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{E}}'}{v} \right) \frac{\vec{\mathbf{v}}}{v} + \gamma \left[\vec{\mathbf{E}}' - \left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{E}}'}{v} \right) \frac{\vec{\mathbf{v}}}{v} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \right] \\ &= \gamma(\vec{\mathbf{E}}' + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) - (\gamma - 1) \frac{\vec{\mathbf{v}}}{v} \left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{E}}'}{v} \right), \\ &\boxed{\vec{\mathbf{E}}' = \gamma(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{E}}) \vec{\mathbf{v}}}. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Völlig analog erhält man die allgemeine Transformationsformel

$$\vec{\mathbf{B}}' = \gamma \left(\vec{\mathbf{B}} - \frac{\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{E}}}{c^2} \right) - \frac{\gamma - 1}{v^2} (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \vec{\mathbf{v}}.$$

Dabei brauchen wir eigentlich nur in (13.15) $\vec{\mathbf{E}}$ durch $\vec{\mathbf{B}}$ und $\vec{\mathbf{B}}$ durch $\frac{1}{c^2} \vec{\mathbf{E}}$ zu ersetzen und das Vorzeichen des Vektorprodukts umzukehren.

Wir können den Faktor $\frac{\gamma-1}{v^2}$ noch etwas vereinfachen, sodass v^2 nicht mehr explizit erscheint:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2}(\gamma-1) &= \frac{1}{v^2} \cdot \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{\gamma+1} = \frac{1}{\gamma+1} \cdot \frac{1}{v^2} \cdot (\gamma^2-1) \\ &= \frac{1}{\gamma+1} \cdot \frac{1}{v^2} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) = \frac{1}{\gamma+1} \cdot \frac{1}{v^2} \cdot \left(\frac{1-1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \right) = \frac{1}{\gamma+1} \cdot \frac{1}{v^2} \cdot \left(\frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \right), \\ &\quad \boxed{\frac{\gamma-1}{v^2} = \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)c^2}}. \end{aligned}$$

Damit und durch Anwendung der relativistischen Vertauschung geben wir abschließend die **vektoriellen Transformationsgleichungen** für das elektrische Feld und das Magnetfeld an, wobei sich S' mit beliebiger Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ bezüglich S bewegt (**\vec{v} -Boost**):

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E}) \vec{v}, \\ \vec{E} &= \gamma(\vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}') - \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)c^2} (\vec{v} \cdot \vec{E}') \vec{v}, \\ \vec{B}' &= \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}\right) - \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)c^2} (\vec{v} \cdot \vec{B}) \vec{v}, \\ \vec{B} &= \gamma\left(\vec{B}' + \frac{\vec{v} \times \vec{E}'}{c^2}\right) - \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)c^2} (\vec{v} \cdot \vec{B}') \vec{v}. \end{aligned}$$

- **Lorentz-Invarianten des elektromagnetischen Feldes** sind

$$\vec{E} \cdot \vec{B} \quad \text{und} \quad \left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 \right).$$

Durch Einsetzen von (13.11) und unter Berücksichtigung von $\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{B} &= E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = E'_x B'_x + \gamma^2 \left(E'_y B'_y + v B'_y B'_z - \frac{v}{c^2} E'_y E'_z - \frac{v^2}{c^2} E'_z B'_z \right) + \\ &\quad \gamma^2 \left(E'_z B'_z - v B'_y B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y E'_z - \frac{v^2}{c^2} E'_y B'_y \right), \end{aligned}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E'_x B'_x + \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(E'_y B'_y + E'_z B'_z \right) = \vec{E}' \cdot \vec{B}'. \quad \square$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 &= B_x'^2 + \gamma^2 \left(B_y'^2 - 2B_y' \frac{v}{c^2} E_z' + \frac{v^2}{c^4} E_z'^2 \right) + \gamma^2 \left(B_z'^2 + 2B_z' \frac{v}{c^2} E_y' + \frac{v^2}{c^4} E_y'^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{c^2} \left[E_x'^2 + \gamma^2 \left(E_y'^2 + 2E_y' v B_z' + v^2 B_z'^2 \right) + \gamma^2 \left(E_z'^2 - 2E_z' v B_y' + v^2 B_y'^2 \right) \right] \\
&= B_x'^2 + \gamma^2 (B_y'^2 + B_z'^2) - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} (B_y'^2 + B_z'^2) \\
&\quad - \frac{1}{c^2} E_x'^2 - \frac{1}{c^2} \gamma^2 (E_y'^2 + E_z'^2) + \frac{1}{c^2} \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} (E_y'^2 + E_z'^2), \\
\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 &= B_x'^2 + \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (B_y'^2 + B_z'^2) \\
&\quad - \frac{1}{c^2} \left[E_x'^2 + \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (E_y'^2 + E_z'^2) \right] = \vec{B}'^2 - \frac{1}{c^2} \vec{E}'^2. \quad \square
\end{aligned}$$

- Die **Lorentz-Kraft** $\vec{f} = q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ ist die (relativistische) Dreierkraft, die im Laborsystem S (momentan) auf eine mit der Geschwindigkeit $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ bewegte (positive) elektrische Ladung q wirkt unter der Voraussetzung, dass in S ein \vec{E} -Feld oder/und ein \vec{B} -Feld existieren.

Die Lorentz-Kraft ist per se kovariant (forminvariant) und somit relativistischer Natur, denn sie besitzt in einem relativ zu S bewegten Koordinatensystem S' die gleiche Form, nämlich

$$\vec{f}' = q (\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}').$$

Im momentanen Ruhesystem der Ladung geht die Lorentz-Kraft über in die Newton'sche Kraft:

$$\text{in } S : \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f} \longrightarrow \vec{F}, \quad \text{in } S' : \vec{u}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}' \longrightarrow \vec{F}'.$$

- Prinzipiell erhält man die **Lorentz-Kraft** \vec{f} aus der Kraftdichte \vec{d} wie folgt:⁴

$$\begin{aligned}
\vec{d} &= \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \rho (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \\
\int \cdots dV \longrightarrow \vec{f} &= q \vec{E} + q \vec{u} \times \vec{B} = q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}).
\end{aligned}$$

⁴Wir bezeichnen hier die Kraftdichte mit dem Buchstaben d , weil die Buchstaben f für die Dreierkraft und k für den Wellenvektor bereits vergeben sind.

- Mit dem Feldstärketensor $(F^{\mu\nu})$ in (13.5) erhalten wir (d^μ) , den Vierervektor zur Lorentz-Kraftdichte oder kurz die **Viererkraftdichte**, wie folgt:⁵

$$(d^\mu) = (F^{\mu\nu})(j_\nu)^\text{T} = \varrho_0 (F^{\mu\nu})(u_\nu)^\text{T} = \varrho_0 (F^{\mu\nu}) \cdot \gamma_u \begin{pmatrix} c \\ -u_x \\ -u_y \\ -u_z \end{pmatrix}, \quad (13.16)$$

$$(d^\mu) = \varrho_0 \gamma_u \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{u} \cdot \vec{E} \\ E_x + (u_y B_z - u_z B_y) \\ E_y + (u_z B_x - u_x B_z) \\ E_z + (u_x B_y - u_y B_x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^0 \\ d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_u}{c} \varrho_0 \vec{u} \cdot \vec{E} \\ \gamma_u \varrho_0 (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \end{pmatrix}. \quad (13.17)$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass $\gamma_u \varrho_0 = \varrho$. Weiterhin gilt unter Berücksichtigung von $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = 0$ für die 0-Komponente bzw. den Zeitanteil der Viererkraftdichte:

$$d^0 = \frac{1}{c} \vec{u} \cdot \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \vec{u} \cdot \gamma_u \varrho_0 (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \frac{\gamma_u}{c} \varrho_0 \vec{u} \cdot \vec{E}.$$

- (K^μ) ist der Viererkraftvektor bzw. kurz die **Viererkraft** oder Minkowski-Kraft und in diesem Fall der zur Lorentz-Kraft \vec{f} gehörende Vierervektor. Wir erhalten hier deshalb (K^μ) durch Integration der Viererkraftdichte (d^μ) über das Volumen der betrachteten Ruheladungsdichte ϱ_0 gemäß $\varrho_0 \xrightarrow{f \dots dV_0} q$, sodass

$$(K^\mu) = q (F^{\mu\nu})(u_\nu)^\text{T} = q (F^{\mu\nu}) \gamma_u \begin{pmatrix} c \\ -u_x \\ -u_y \\ -u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_u}{c} q \vec{u} \cdot \vec{E} \\ \gamma_u q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_u}{c} \vec{u} \cdot \vec{f} \\ \gamma_u \vec{f} \end{pmatrix} \quad (13.18)$$

mit der Lorentz-Kraft $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z) = q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ und mit

$$K^0 = \frac{\gamma_u}{c} \vec{u} \cdot \vec{f} = \frac{\gamma_u}{c} \vec{u} \cdot q (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \frac{\gamma_u}{c} q \vec{u} \cdot \vec{E},$$

weil $\vec{u} \perp (\vec{u} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{B}) = 0$. Die Komponenten des Vierer-Kraftvektors sind also

$$(K^\mu) = (K^0, K^1, K^2, K^3) = \left(\frac{\gamma_u}{c} \vec{u} \cdot \vec{f}, \gamma_u f_x, \gamma_u f_y, \gamma_u f_z \right).$$

⁵Weil kovariante Vierervektoren in der Matrixdarstellung als Zeilenvektoren definiert sind, gilt für (13.16) $\varrho_0 (F^{\mu\nu})(u_\nu)^\text{T} = (d^\mu) \iff \varrho_0 (u_\nu)(F^{\mu\nu})^\text{T} = (d^\mu)^\text{T}$. Das zeigt, dass die Indexschreibweise bequemer ist.

- (K^μ) sei der Viererkräftevektor in S und $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ die zugehörige (relativistische) Dreierkraft (hier die Lorentz-Kraft).

Wir demonstrieren jetzt die Lorentz-Transformation

$$(K^\mu) \text{ in } S \xrightarrow{\mathbf{L}} (K^{\mu'}) \text{ in } S',$$

d. h. die Transformation von (K^μ) mit der (speziellen) Lorentz-Transformationsmatrix $\mathbf{L} = (L_\mu^{\mu'})$ in der Standardkonfiguration von S nach S' :

$$\begin{aligned} (K^{\mu'}) &= (L_\mu^{\mu'}) \cdot (K^\mu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K^0 \\ K^1 \\ K^2 \\ K^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma K^0 - \gamma \frac{v}{c} K^1 \\ -\gamma \frac{v}{c} K^0 + \gamma K^1 \\ K^2 \\ K^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_u \frac{1}{c} (\vec{f} \cdot \vec{u}) \\ \gamma_u f_x \\ \gamma_u f_y \\ \gamma_u f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \gamma_u \frac{1}{c} (\vec{f} \cdot \vec{u}) - \gamma \frac{v}{c} \gamma_u f_x \\ -\gamma \frac{v}{c} \gamma_u \frac{1}{c} (\vec{f} \cdot \vec{u}) + \gamma \gamma_u f_x \\ \gamma_u f_y \\ \gamma_u f_z \end{pmatrix} \\ &= \gamma_u \cdot \begin{pmatrix} \gamma \frac{1}{c} (\vec{f} \cdot \vec{u}) - \gamma \frac{v}{c} f_x \\ -\gamma \frac{v}{c^2} (\vec{f} \cdot \vec{u}) + \gamma f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^{0'} \\ K^{1'} \\ K^{2'} \\ K^{3'} \end{pmatrix} = \gamma_{u'} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{c} (\vec{f}' \cdot \vec{u}') \\ f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13.19)$$

Ausgehend von (13.19) und mit⁶

$$\gamma_{u'} = \gamma \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right) \gamma_u \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_u}{\gamma_{u'}} = \frac{\gamma_u}{\gamma \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right) \gamma_u} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)}$$

sowie durch die Anwendung der relativistischen Vertauschung zum Schluss erhalten wir die Gleichungen für die **Transformation der Lorentz-Kraft**, d. h. für die Transformation der Komponenten von \vec{f} nach \vec{f}' bzw. von \vec{f}' nach \vec{f} **in Standardkonfiguration** wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c} (\vec{f}' \cdot \vec{u}') \\ f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} = \frac{\gamma_u}{\gamma_{u'}} \cdot \begin{pmatrix} \gamma \frac{1}{c} (\vec{f} \cdot \vec{u}) - \gamma \frac{v}{c} f_x \\ -\gamma \frac{v}{c^2} (\vec{f} \cdot \vec{u}) + \gamma f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

⁶Eine ausführliche Herleitung der Formel $\gamma_{u'} = \gamma \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right) \gamma_u$ findet sich in meinem Skript *Grundideen zur relativistischen Punktmechanik und zur ART*, Abschnitt **2.4 Transformation von γ_u und $\gamma_{u'}$ in Standardkonfiguration**, Seite 21 bis Seite 23.

$$\begin{aligned}
f'_x &= \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)} \cdot \left[\gamma f_x - \gamma \frac{v}{c^2} (\vec{f} \cdot \vec{u}) \right] \\
&= \frac{f_x}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} - \frac{\frac{v}{c^2} (f_x u_x + f_y u_y + f_z u_z)}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \\
&= \frac{f_x}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} - \frac{f_x \frac{v u_x}{c^2}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} - \frac{\frac{v}{c^2} (f_y u_y + f_z u_z)}{1 - \frac{v u_x}{c^2}},
\end{aligned}$$

$$f'_x = f_x - \frac{\frac{v}{c^2} (f_y u_y + f_z u_z)}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \quad f_x = f'_x + \frac{\frac{v}{c^2} (f'_y u'_y + f'_z u'_z)}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}, \quad (13.20)$$

$$f'_y = \frac{f_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}, \quad f_y = \frac{f'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)}, \quad (13.21)$$

$$f'_z = \frac{f_z}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}, \quad f_z = \frac{f'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x\right)}. \quad (13.22)$$

• **Standardbeispiel** (in Standardkonfiguration)

In diesem einfachsten Fall existiert im Laborsystem S nur eine Feldkomponente, die B_y -Komponente des Magnetfeldes. Ein elektrisches Feld existiert in S nicht. Die elektrische Ladung q bewegt sich in S mit der Geschwindigkeit v längs der x -Achse. S' ist das Ruhesystem der Ladung q .

$$\vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{u} = (u_x, 0, 0) = \vec{v} = (v, 0, 0), \quad \vec{B} = (0, B_y, 0), \quad \vec{u}' = \vec{0},$$

$$\vec{f} \perp \vec{u} \wedge \vec{f} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{f} = q \vec{u} \times \vec{B} = (0, 0, f_z) \quad \text{mit} \quad f_z = q u_x B_y = q v B_y$$

* Transformation der Felder von S nach S' gemäß (13.10) :

$$\vec{E}' = (0, 0, E'_z) = (0, 0, \gamma v B_y), \quad \vec{B}' = (0, B'_y, 0) = (0, \gamma B_y, 0).$$

Im *Ruhesystem* S' der Ladung q existiert also nicht nur die Magnetfeldkomponente $B'_y = \gamma B_y$ sondern insbesondere auch die elektrische oder genauer gesagt die *elektrostatische* Feldkomponente

$$E'_z = \gamma v B_y.$$

* Transformation der Lorentz-Kraft von S nach S' gemäß (13.22) :

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = \frac{f_z}{\gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \gamma \cdot f_z \Rightarrow f'_z > f_z,$$

$$f'_z = \gamma f_z = \gamma \cdot q v B_y \Rightarrow \lim_{\substack{v \rightarrow c \\ \gamma \rightarrow \infty}} f'_z = \infty.$$

Die Lorentz-Kraft ist in S' um den Faktor γ größer als im Laborsystem S . Weiterhin haben $\vec{f} = (0, 0, f_z)$ und $\vec{f}' = (0, 0, f'_z)$ die gleiche Richtung und Orientierung.

Weil q bezüglich \vec{B}' ruht, kann in S' das Magnetfeld im Gegensatz zum elektrischen Feld keine Kraft auf die Ladung ausüben.

Für die Lorentz-Kraft gilt also in diesem Fall

$$\begin{aligned} \text{in } S: \quad \vec{f} &= q \cdot \vec{u} \times \vec{B} &&= (0, 0, qvB_y), \\ \text{in } S': \quad \vec{f}' &= q \cdot (\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}') &&\stackrel{\vec{u}'=\vec{0}}{\implies} \\ & \vec{f}' = q \cdot \vec{E}' = (0, 0, qE'_z) &&= (0, 0, \gamma \cdot qvB_y). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die magnetische Kraft $\vec{f} = q \vec{u} \times \vec{B}$, die das \vec{B} -Feld in S auf q ausübt, von einem Beobachter in S' , d. h. von einem mit q bewegten Beobachter, als die elektrostatische Kraft $\vec{f}' = q \cdot \vec{E}'$ interpretiert wird.

Anders gesagt, die in S ausschließlich durch das Magnetfeld $(0, B_y, 0)$ auf q wirkende Kraft $(0, 0, f_z)$ erscheint in S' als die Kraft $(0, 0, f'_z)$, die ausschließlich durch das elektrische Feld $(0, 0, E'_z)$ hervorgerufen wird.

• **Beispiel zum Induktionseffekt** (in Standardkonfiguration)

Im Laborsystem S erzeugt ein dort ruhender Magnet das Feld $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$. Ein elektrisches Feld existiert in S nicht. Ein elektrischer Leiter mit der freien Ladung q bewegt sich in S und damit auch im \vec{B} -Feld mit der Geschwindigkeit v längs der x -Achse. S' ist das Ruhesystem der Ladung q .

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{0}, \quad \vec{u} = (u_x, 0, 0) = \vec{v} = (v, 0, 0), \quad \vec{B} = (B_x, B_y, B_z), \quad \vec{u}' = \vec{0}, \\ \vec{f} \perp \vec{u} \wedge \vec{f} \perp \vec{B} &\Rightarrow \vec{f} = q \vec{u} \times \vec{B} = (0, f_y, f_z) \end{aligned}$$

* Transformation der Felder von S nach S' gemäß (13.10) :

$$\vec{E}' = (0, E'_y, E'_z) = (0, -\gamma v B_z, \gamma v B_y), \quad \vec{B}' = (B'_x, B'_y, B'_z) = (B_x, \gamma B_y, \gamma B_z).$$

* Transformation der Lorentz-Kraft von S nach S' gemäß (13.20), (13.21) und (13.22) :

Weil q in S' und damit auch bezüglich des Magnetfeldes in S' ruht, kann das \vec{B}' -Feld im Gegensatz zum \vec{E}' -Feld keine Kraft auf die Ladung ausüben, sodass

$$\vec{f}' = q \cdot \vec{E}' = (0, f'_y, f'_z) = (0, -q\gamma v B_z, q\gamma v B_y).$$

„Wie wir ... gezeigt haben, kann mit der Lorentz-Kraft der in der Leiterschleife induzierte Strom erklärt werden. Wir haben hier also durch LORENTZ-Transformation des elektromagnetischen Tensors F_{ik} , also auf algebraischem Weg, gezeigt, daß die Strom erzeugende Kraft auf die Elektronen auch in dem Fall der Bewegung des Leiters im System S relativ zu dem dort ruhenden Magneten durch dasjenige elektrische Feld entsteht, das der relativ zur Leiterschleife ruhende Beobachter feststellt. Dadurch ist die Symmetrie in der Erklärung des experimentell von vornherein symmetrischen Induktionseffektes hergestellt.“⁷

⁷Zitiert aus: Helmut Günther, *Spezielle Relativitätstheorie – Ein neuer Einstieg in Einsteins Welt*, 1. Auflage, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2007, Seite 191.

- **Die kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum aus dem Viererpotential**

Wir benötigen im Folgenden den Vierergradient-Operator.

Die Ableitung nach den kontravarianten Koordinaten⁸ liefert den **kovarianten Vierergradient-Operator**

$$(\partial_\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right).$$

Die Ableitung nach den kovarianten Koordinaten liefert den **kontravarianten Vierergradient-Operator**

$$(\partial^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right).$$

Ausgehend vom Viererpotentialansatz (13.3), also vom Viererpotential A^μ , ist die kovariante (forminvariante) Form der Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{\square A^\mu = \mu_0 j^\mu} \quad \text{mit der Lorenz-Eichung} \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu = 0. \quad (13.23)$$

Diese kompakte Form der Maxwell-Gleichungen für das Vakuum ist äquivalent zu den Gleichungen (9.12) und (9.13). Dabei haben wir den D'Alembert-Operator \square benutzt. Er wird manchmal auch Quabla-Operator oder Wellenoperator genannt und hat folgende Bedeutung:

$$\square_{\varepsilon_0 \mu_0} \equiv \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \partial_\mu \partial^\mu$$

mit

$$\left(\eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = (\partial^\mu) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x^0 \\ -\partial/\partial x^1 \\ -\partial/\partial x^2 \\ -\partial/\partial x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \begin{pmatrix} \partial/\partial x^0 \\ \partial/\partial x^1 \\ \partial/\partial x^2 \\ \partial/\partial x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial/\partial x^0 \\ -\partial/\partial x^1 \\ -\partial/\partial x^2 \\ -\partial/\partial x^3 \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2},$$

$$\text{D'Alembert-Operator} \quad \square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Der D'Alembert-Operator für den Minkowski-Raum ist das Analogon zum Laplace-Operator für den Euklidischen Raum.

⁸Im Tensoralkül wird ein hochgestellter Index im Nenner eines Bruchterms als tiefgestellter (kovarianter) Index betrachtet.

Der Vollständigkeit halber stellen wir (13.23) in Matrixschreibweise dar:

$$\begin{aligned}
 (\square A^\mu) = (\partial_\nu \partial^\nu A^\mu) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \frac{\Phi}{c} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\Phi}{c} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\Phi}{c} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\Phi}{c} \\ \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} A_x - \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_x - \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_x - \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_x \\ \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} A_x - \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_y - \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_y - \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_y \\ \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} A_x - \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_z - \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_z - \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z \end{pmatrix} = \mu_0 \varrho \begin{pmatrix} c \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \\
 &= (\mu_0 j^\mu)
 \end{aligned}$$

mit $\varrho = \gamma_u \varrho_0$. Der D'Alembert-Operator ist ein skalarer Operator bzw. ein Lorentz-Skalar und folglich lorentz-invariant. Er wirkt in gleicher Weise skalar auf jede der vier Komponenten des Viererpotentials (A^μ) und erzeugt wegen seiner skalaren Wirkung wieder nur einen Vierervektor.

• Die kovariante Form der Lorenz-Eichung

Mit dem Viererpotential

$$(A^\mu) = (A^0, A^1, A^2, A^3) = \left(\frac{\Phi}{c}, A_x, A_y, A_z \right)$$

und mit

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

erhält die Lorenz-Eichung im Vakuum

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

die „einfachere“ Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu = \partial_\mu A^\mu = 0,$$

denn

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu = \frac{\partial}{c \partial t} \left(\frac{1}{c} \Phi \right) + \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Die Lorenz-Eichung im Vakuum ist eine Lorentz-Invariante. Weiterhin gilt für die Lorenz-Eichung im Vakuum

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu A^\mu &= \partial_\mu A^\alpha \delta_\alpha^\mu \\
 &= \partial_\mu A^\alpha \eta_\alpha^\mu = \eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\alpha} \partial_\mu A^\alpha = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \eta_{\nu\alpha} A^\alpha = \partial^\nu A_\nu = 0,
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = 0}.$$

- **Die kovariante Form der Kontinuitätsgleichung**

Wir benutzen

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad \partial_\mu A^\mu = 0, \quad \partial_\mu \square = \square \partial_\mu \quad \text{und}$$

$$\varrho = \gamma_u \cdot \varrho_0 \Rightarrow \begin{cases} (j^\mu) = \varrho_0(u^\mu) = \varrho(c, \vec{u}) = (c\varrho, \vec{j}) \\ (j_\mu) = \varrho_0(u_\mu) = \varrho(c, -\vec{u}) = (c\varrho, -\vec{j}) \end{cases}.$$

Dann liefert

$$\partial_\mu \square A^\mu = \square \underbrace{\partial_\mu A_\mu}_{=0} = \mu_0 \partial_\mu j^\mu = 0$$

die Kontinuitätsgleichung in der kovarianten Form

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0},$$

denn

$$\frac{\partial}{c\partial t} \varrho c + \frac{\partial}{\partial x} \varrho u_x + \frac{\partial}{\partial y} \varrho u_y + \frac{\partial}{\partial z} \varrho u_z = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y + \frac{\partial}{\partial z} j_z = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{\varrho} = -\operatorname{div} \vec{j}.$$

- **Die kovariante Formulierung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum mit Hilfe des Feldstärketensors**

Kehren wir mittels des elektromagnetischen Feldstärketensors von den Potentialen Φ und \vec{A} bzw. vom Vierer-Potential A^μ wieder zurück zu den Feldern \vec{E} und \vec{B} und zeigen wir, wie sich die Maxwell-Gleichungen mit den Feldern \vec{E} und \vec{B} aus dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ergeben.

Aus

$$F_{\nu\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\alpha - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_\nu = \partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu,$$

also dem Potentialansatz in tensorieller Form, und mit

$$\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$$

erhalten wir die folgende, zu den homogenen Maxwell-Gleichungen für das Vakuum äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned} & \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} \\ &= \partial_\mu (\partial_\nu A_\alpha - \partial_\alpha A_\nu) + \partial_\nu (\partial_\alpha A_\mu - \partial_\mu A_\alpha) + \partial_\alpha (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu A_\alpha - \partial_\nu \partial_\mu A_\alpha}_0 + \underbrace{\partial_\nu \partial_\alpha A_\mu - \partial_\alpha \partial_\nu A_\mu}_0 + \underbrace{\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu \partial_\alpha A_\nu}_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\nu\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F_{\alpha\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} F_{\mu\nu} = 0}. \quad (13.24)$$

(13.24) ist die **kovariante Formulierung der homogenen Maxwell-Gleichungen** im Vakuum mit Hilfe des Feldstärketensors.⁹ Die Indizes μ, ν, α können dabei Zahlen aus der Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ annehmen. Sind jedoch zwei Indizes gleich, so wird die linke Seite von (13.24) identisch Null (trivial) wie beispielsweise:

$$\nu = \mu : \quad \partial_\mu F_{\mu\alpha} + \partial_\mu F_{\alpha\mu} + \underbrace{\partial_\alpha F_{\mu\mu}}_{\equiv 0} = \partial_\mu (F_{\mu\alpha} + F_{\alpha\mu}) = \partial_\mu (F_{\mu\alpha} - F_{\mu\alpha}) \equiv 0 .$$

Es bleiben also für die drei Indizes μ, ν, α nur die vier relevanten Zahlenkombinationen

$$\underline{012} (\beta=3), \quad \underline{013} (\beta=2), \quad \underline{023} (\beta=1), \quad \underline{123} (\beta=0)$$

übrig, die *jeweils* $3! = 6$ Permutationen (drei gerade und drei ungerade) bzw. zyklische Vertauschungen liefern:

$$\begin{array}{ll} (\underline{012}, 120, 201) & (021, 102, 210) \\ (\underline{013}, 130, 301) & \text{und} \quad (031, 103, 310) \\ (\underline{023}, 230, 302) & (032, 203, 320) \\ (\underline{123}, 231, 312) & (132, 213, 321) \end{array} \quad (13.25)$$

In (13.25) stellt jede Zeile zwei Kombinationen zusammengehöriger zyklischer Vertauschungen dar, links aus geraden und rechts aus ungeraden Permutationen einer der vier relevanten Zahlenkombinationen. Die vier Kombinationen zyklischer Vertauschungen auf der rechten Seite von (13.25) brauchen nicht berücksichtigt zu werden, weil sich die zugehörigen Gleichungen gemäß

$$\partial_\mu F_{\alpha\nu} + \partial_\nu F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\nu\mu} = 0 = (-1) \cdot 0 = (-1) \cdot (\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu})$$

durch Multiplikation mit -1 ineinander überführen lassen. Somit bleiben nur die vier Kombinationen zyklischer Vertauschungen der linken Seite von (13.25) übrig. Die dazu gehörenden Gleichungen in der Reihenfolge von unten nach oben sind unter Verwendung des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ (13.5)

$$\underline{\partial_1 F_{23}} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = -\frac{\partial}{\partial z} B_z - \frac{\partial}{\partial x} B_x - \frac{\partial}{\partial y} B_y = 0, \quad (13.26)$$

$$\underline{\partial_0 F_{23}} + \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} = -\frac{\partial}{c \partial t} B_x - \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_z}{c} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{E_y}{c} = 0, \quad (13.27)$$

$$\underline{\partial_0 F_{13}} + \partial_1 F_{30} + \partial_3 F_{01} = +\frac{\partial}{c \partial t} B_y - \frac{\partial}{\partial x} \frac{E_z}{c} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{E_x}{c} = 0, \quad (13.28)$$

$$\underline{\partial_0 F_{12}} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = -\frac{\partial}{c \partial t} B_z - \frac{\partial}{\partial x} \frac{E_y}{c} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_x}{c} = 0. \quad (13.29)$$

Die Gleichung (13.26) liefert die **Maxwell-Gleichung**

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{B} = 0 .$$

⁹Mit dem total antisymmetrischen Einheitstensor $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ und dem dualen Feldstärketensor $\bar{F}^{\mu\nu}$ lässt sich (13.24) noch kompakter darstellen (siehe: Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 4, Spezielle Relativitätstheorie – Thermodynamik*, 7. Auflage, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010, Seite 73 bis Seite 75).

Die drei Gleichungen (13.27) bis (13.29) mit dem Index 0 liefern das **Induktionsgesetz** für das Vakuum:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \end{pmatrix} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} = \vec{0} .$$

Zur kovarianten Formulierung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen für das Vakuum gehen wir aus vom kovarianten Feldstärketensor

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha .$$

Daraus erhalten wir den kontravarianten Feldstärketensor wie folgt:

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \partial_\alpha A_\beta - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \partial_\beta A_\alpha ,$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu .$$

Unter Berücksichtigung der Lorenz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ stellen wir jetzt die Beziehung her zwischen dem Feldstärketensor und (13.23):

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \underbrace{\partial^\nu \partial_\mu A^\mu}_{=0} \\ &= \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \square A^\nu = \mu_0 j^\nu , \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu} . \quad (13.30)$$

Gleichung (13.30) ist die **kovariante Formulierung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen** im Vakuum mit Hilfe des Feldstärketensors. Im Fall des Index $\nu = 0$ resultiert mit $F^{00} = 0$, $j^0 = \varrho c$ und $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu 0} &= \frac{\partial}{\partial x} F^{10} + \frac{\partial}{\partial y} F^{20} + \frac{\partial}{\partial z} F^{30} = \mu_0 j^0 \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{E_x}{c} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_y}{c} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{E_z}{c} = \mu_0 c \varrho \\ \Rightarrow \quad \text{div} \vec{E} &= \mu_0 c^2 \varrho = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho . \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D}$ für das Vakuum ist dies die **Maxwellgleichung**

$$\text{div} \vec{D} = \varrho .$$

Im Fall der Indizes $\nu = 1, 2, 3$ resultiert aus (13.30) in Matrixschreibweise mit $F^{\mu\mu} = 0$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial_\mu F^{\mu 1} \\ \partial_\mu F^{\mu 2} \\ \partial_\mu F^{\mu 3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} \\ \partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_3 F^{32} \\ \partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 j^1 \\ \mu_0 j^2 \\ \mu_0 j^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{c \partial t} \frac{E_x}{c} + \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y \\ -\frac{\partial}{c \partial t} \frac{E_y}{c} - \frac{\partial}{\partial x} B_z + \frac{\partial}{\partial z} B_x \\ -\frac{\partial}{c \partial t} \frac{E_z}{c} + \frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 \varrho u_x \\ \mu_0 \varrho u_y \\ \mu_0 \varrho u_z \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \varrho \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varrho \vec{u}. \end{aligned}$$

Das ergibt für das Vakuum mit $\frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{H}$ das **Durchflutungsgesetz**

$$\text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varrho \vec{u} = \vec{j}.$$

- **Ebene Welle und Lorentz-Invarianz der Phase**

Zum Wellenvektor $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ist der **Viererwellenvektor**

$$(k^\mu) = \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z \right) \quad \longleftrightarrow \quad (k_\mu) = \left(\frac{\omega}{c}, -k_x, -k_y, -k_z \right).$$

Damit ist die Phase

$$\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} := \frac{\omega}{c} ct - k_x x - k_y y - k_z z = k_\mu x^\mu$$

lorentz-invariant, denn $k_\mu x^\mu$ ist ein Lorentz-Skalar. Analog zur klassischen ebenen Welle erhält man folglich die ebene Welle z. B. aus dem Viererpotential gemäß¹⁰

$$A^\nu = A_0^\nu e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = A_0^\nu e^{i k_\mu x^\mu},$$

wobei A_0^ν die Amplitude von A^ν beschreibt.

¹⁰Das i im Exponenten der Exponentialfunktion ist kein Index sondern die imaginäre Einheit, definiert durch $i^2 = -1$.

Teil II

Grundlegendes zur Quantenmechanik

Literaturtipps

- Rainer Müller und Hartmut Wiesner,
Das Münchener Unterrichtskonzept zur Quantenmechanik,
[https://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/archiv/
inhalt_materialien/milq/lehrtext_x_.pdf](https://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/archiv/inhalt_materialien/milq/lehrtext_x_.pdf)
- Josef Oswald, *Grundprinzipien der Quantenphysik*, Vorlesung – WS03/04,
https://oswald.unileoben.ac.at/qpvl_1/qpvl.pdf
- Timo Weigand, Kursvorlesung PTP4 Theoretische Quantenmechanik (digitalisiert von David Breyel), Institut für Theoretische Physik, Universität Heidelberg, 2011,
[https://www.thphys.uni-heidelberg.de/
courses/weigand/Skript-QM2011.pdf](https://www.thphys.uni-heidelberg.de/courses/weigand/Skript-QM2011.pdf)

1 Axiome der Quantentheorie

Bis zur Unterbrechungslinie auf dieser Seite ist dieses Kapitel zitiert aus: Franz Schwabl, *Quantenmechanik*, 6. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, Seite 41.

- I) Der Zustand wird durch die Wellenfunktion $\Psi(\vec{x})$ beschrieben.
- II) Den Observablen entsprechen hermitesche Operatoren $A \dots$, wobei Funktionen von Observablen Funktionen von Operatoren entsprechen.
- III) Der Mittelwert der Observablen mit zugehörigem Operator A ist im Zustand Ψ durch

$$\langle A \rangle = (\Psi, A\Psi)$$

gegeben.¹

- IV) Die Zeitentwicklung der Zustände wird durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi, \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x})$$

bestimmt.

- V) Wenn bei Messung von A der Wert a_n gefunden wurde, geht die Wellenfunktion in die entsprechende Eigenfunktion Ψ_n über.

Aus den Axiomen II und III folgt, daß die möglichen Meßwerte einer Observablen die Eigenwerte des zugehörigen Operators A sind und die Wahrscheinlichkeiten gegeben sind durch $|c_n|^2$, wobei c_n die Entwicklungskoeffizienten von $\Psi(\vec{x})$ nach den Eigenfunktionen von A sind. Insbesondere folgt, daß $|\Psi(\vec{x})|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Position ist.

Anmerkungen:

Das *Eigen* in *Eigenvektor*, *Eigenfunktion* und *Eigenwert* bezieht sich auf die *Eigenschaften* bzw. *Eigenheiten* der Eigenvektoren, Eigenfunktionen und Eigenwerte und hat nichts zu tun mit dem deutschen Physiker und Chemiker Manfred Eigen (1927–2019, Nobelpreis für Chemie 1967). In der englischsprachigen Fachliteratur werden die teilweise aus dem Deutschen entlehnten Begriffe *eigenvector* für Eigenvektor, *eigenfunction* für Eigenfunktion und *eigenvalue* für Eigenwert verwendet.

Eine quantenphysikalische Messgröße nennt man Observable. Der Observablen ist ein Operator zugeordnet. Operatoren werden meistens mit einem Dach-Symbol notiert wie beispielsweise \hat{A} . Leider ist die Notation von Observablen und Operatoren in der Literatur nicht einheitlich. Außerdem werden Observablen und Operatoren in der Notation oft gleichbedeutend behandelt. So findet man beispielsweise für den Erwartungswert einer Observablen A sowohl $\langle A \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$ als auch $\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$.

¹Wir werden im Folgenden für den Erwartungswert (Mittelwert) einer Observablen bzw. eines Operators \hat{A} die **bra-ket-Notation** $\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$ verwenden, genauso wie für das hermitesche Skalarprodukt bzw. Standardskalarprodukt $\langle u | v \rangle$ aus den beiden Hilbertraumvektoren $|u\rangle$ und $|v\rangle$. Die bra-ket-Notation geht auf Paul Dirac zurück und wird deshalb auch **Dirac-Notation** genannt.

Es existieren viele alternative Formulierungen der Axiome der Quantenmechanik wie beispielsweise die im Folgenden zitierte²:

Postulat 1 „Der quantenmechanische Zustand ist ein Vektor (genauer: ein Strahl) in einem komplexen Vektorraum. . . .
Der quantenmechanische Zustandsraum ist ein Hilbertraum.“

Postulat 2 „Eine quantenmechanische Observable ist eine Messgröße.
Jeder Observablen ordnen wir einen selbstadjungierten Operator \hat{A} auf dem Vektorraum der Zustände zu.
Eigenwerte von \hat{A} stellen alle in der Quantenmechanik möglichen Messwerte dar.“

Postulat 3 „Sei \hat{A} eine Observable mit nicht-degeneriertem Eigenwert λ_i und normierter Eigenbasis $\{|\lambda_i\rangle\}$.
Die Messung der Observablen am normierten Zustand $|\gamma\rangle = \sum_j c_j |\lambda_j\rangle$ ergibt λ_i mit Wahrscheinlichkeit $P(\lambda_i) = |c_i|^2 = |\langle \lambda_i | \gamma \rangle|^2$.
Nach Messung von λ_i befindet sich das System im Zustand $|\lambda_i\rangle$
Sei \hat{A} eine Observable mit (degenerierten) Eigenwerten λ_i und $\hat{\mathbb{P}}_i$ der . . .
Projektionsoperator auf den Eigenraum zu Eigenwert λ_i .
Die Wahrscheinlichkeit, den Wert λ_i bei Messung an einem normierten Zustand $|\gamma\rangle$ zu messen, ist

$$P(\lambda_i) = \langle \gamma | \hat{\mathbb{P}}_i | \gamma \rangle .$$

Bei der Messung kollabiert die Wellenfunktion gemäß

$$|\gamma\rangle \longrightarrow \frac{\hat{\mathbb{P}}_i |\gamma\rangle}{\|\hat{\mathbb{P}}_i |\gamma\rangle\|} .$$

. . . Dies ist die naheliegende Verallgemeinerung des Messaxioms für entartete Eigenwerte.“

Die von uns verwendete Notation weicht von der hier zitierten ab und ist:
für $\hat{\mathbb{P}}_i \rightarrow \hat{P}_i$, für $|\gamma\rangle \rightarrow |\Psi\rangle$, für $|\lambda_i\rangle \rightarrow$ abhängig vom Kontext $|a_i\rangle$, $|u_i\rangle$ oder $|v_i\rangle$.

Achtung!

„Selbstadjungiertheit $A = A^\dagger$ erfordert zusätzlich zu Hermitizität, dass auch der Definitionsbereich von A und A^\dagger übereinstimmen muss.

Dies ist auf endlich-dimensionalen Vektorräumen immer der Fall, stellt für unendlich-dimensionale VR aber eine nichttriviale Einschränkung dar.“²

²Zitiert aus: Timo Weigand, Kursvorlesung PTP4 Theoretische Quantenmechanik, Heidelberg, 2011, <https://www.thphys.uni-heidelberg.de/courses/weigand/Skript-QM2011.pdf>

2 Rechnen mit komplexen Vektoren und Matrizen bzw. Operatoren

2.1 Veranschaulichung des komplexen Standardskalarprodukts und der Multiplikation komplexer Vektoren mit komplexen Matrizen

Summen und Produkte aus komplexen Zahlen werde komplex konjugiert, indem alle Summanden und Faktoren jeweils für sich komplex konjugiert werden. Wir zeigen dies für das Produkt aus zwei komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} [(a + ib)(c + id)]^* &= [ac + i(ad + bc) - bd]^* \\ &= (a - ib)(c - id) = ac - i(ad + bc) - bd, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(a - ib)(c - id)]^* &= [ac - i(ad + bc) - bd]^* \\ &= (a + ib)(c + id) = ac + i(ad + bc) - bd, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(a + ib)(c - id)]^* &= [ac - i(ad - bc) + bd]^* \\ &= (a - ib)(c + id) = ac + i(ad - bc) + bd. \end{aligned}$$

Das komplexe Standardskalarprodukt (kurz Skalarprodukt) ist definiert durch

$$\langle u|v \rangle := \sum_{i=1}^n u_i^* \cdot v_i, \quad u_i, v_i \in \mathbb{C}.$$

Hierbei ist $|v\rangle$ ein komplexer Spaltenvektor und $\langle u|$ ein komplexer Zeilenvektor. Der Zusammenhang zwischen einem bra-Vektor $\langle w|$ und dem zugehörigen ket-Vektor $|w\rangle$ ist

$$(|w\rangle^*)^T = |w\rangle^\dagger = \langle w|.$$

Der hochgestellte Index $*$ bedeutet *komplex konjugiert*, T bedeutet *transponiert* und † bedeutet *adjungiert*, also sowohl komplex konjugiert als auch transponiert.

Zunächst zeigen wir

$$\langle u|v\rangle = \sum_i u_i^* \cdot v_i = \sum_i (v_i^* \cdot u_i)^* = \langle v|u\rangle^* \quad \Rightarrow \quad \vec{u}^* \cdot \vec{v} = (\vec{v}^* \cdot \vec{u})^*$$

am Beispiel der Vektoren¹

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} -2i \\ 2-3i \end{pmatrix} = \vec{u}, \quad |v\rangle = \begin{pmatrix} 1-i \\ i \end{pmatrix} = \vec{v} :$$

$$\langle u|v\rangle = (2i, 2+3i) \begin{pmatrix} 1-i \\ i \end{pmatrix} = -1 + 4i,$$

$$\langle v|u\rangle = (1+i, -i) \begin{pmatrix} -2i \\ 2-3i \end{pmatrix} = -1 - 4i,$$

$$\langle v|u\rangle^* = -1 + 4i = \langle u|v\rangle. \quad \square$$

Jetzt zeigen wir die Wirkung einer komplexen (komplexwertigen) Matrix innerhalb des Skalarprodukts am Beispiel der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 3i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}, \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} 2-i & 2i \\ -3i & 1+i \end{pmatrix} :$$

$$\langle u| \underbrace{A|v\rangle}_{=|w\rangle} = \langle u|w\rangle = \langle u| \cdot (A|v\rangle) =$$

$$= (2i, 2+3i) \cdot \begin{pmatrix} 2+i & 3i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ i \end{pmatrix}$$

$$= (2i, 2+3i) \cdot \begin{pmatrix} -i \\ -1-i \end{pmatrix} = 3 - 5i$$

mit

$$A|v\rangle = |w\rangle = \begin{pmatrix} -i \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

Zum gleichen Ergebnis kommen wir mit der Rechnung

$$\langle u| \underbrace{A|v\rangle}_{=|m\rangle} = \langle m|v\rangle = (\langle u|A) \cdot |v\rangle =$$

$$(2i, 2+3i) \cdot \begin{pmatrix} 2+i & 3i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ i \end{pmatrix} =$$

$$(4, -1+i) \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ i \end{pmatrix} = 3 - 5i.$$

¹Mit der Notation \vec{v} für Spaltenvektoren und \vec{v}^T für Zeilenvektoren ist $(\vec{u}^*)^T \cdot \vec{v} = \vec{u}^\dagger \cdot \vec{v} = \vec{u}^* \cdot \vec{v}$ das Punktprodukt $\vec{u}^* \cdot \vec{v} = \sum_i u_i^* \cdot v_i$. Man achte auf den Unterschied zwischen der Verwendung des Multiplikationspunktes \cdot und der Verwendung des fettgedruckten Symbols $\cdot \cdot$.

Mit

$$\begin{aligned} (A|v\rangle)^\dagger &= |w\rangle^\dagger = \langle w| = |v\rangle^\dagger A^\dagger = \langle v|A^\dagger \\ &= (1+i, -i) \cdot \begin{pmatrix} 2-i & 2i \\ -3i & 1+i \end{pmatrix} = (i, -1+i) \end{aligned} \quad (2.1)$$

und

$$A^\dagger|u\rangle = \begin{pmatrix} 2-i & 2i \\ -3i & 1+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2i \\ 2-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

zeigen wir schließlich

$$\begin{aligned} \langle u|w\rangle^* &= \langle w|u\rangle = \langle v|A^\dagger|u\rangle = 3+5i : \\ &(1+i, -i) \cdot \begin{pmatrix} 2-i & 2i \\ -3i & 1+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2i \\ 2-3i \end{pmatrix} = \\ &= (\langle v|A^\dagger) \cdot |u\rangle = (i, -1+i) \cdot \begin{pmatrix} -2i \\ 2-3i \end{pmatrix} = 3+5i, \\ &= \langle v| \cdot (A^\dagger|u\rangle) = (1+i, -i) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1-i \end{pmatrix} = 3+5i. \quad \square \end{aligned}$$

Wichtig für das Verständnis und für die Praxis sind die aus (2.1) abgeleiteten und im Einklang mit $(A \cdot B)^\dagger = B^\dagger \cdot A^\dagger$ stehenden Beziehungen

$$\langle m| = \langle u|A = |u\rangle^\dagger A = (A^\dagger|u\rangle)^\dagger = |m\rangle^\dagger \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \langle m| &= \langle u|A \quad \Leftrightarrow \quad |m\rangle = A^\dagger|u\rangle, \\ |w\rangle &= A|v\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle w| = \langle v|A^\dagger. \end{aligned}$$

Im Zusammenhang mit hermiteschen Matrizen werden uns diese Beziehungen noch beschäftigen.

2.2 Rechenregeln

- **Lineare Operatoren** \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} haben folgende Eigenschaften:

Addition :	Hintereinanderausführung :
$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$	$\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) = (\hat{A}\hat{B})\hat{C}$ (Assoziativität)
$\hat{A} + (\hat{B} + \hat{C}) = (\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C}$	$\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$ (Distributivität)
$\hat{A} + \hat{0} = \hat{A}, \hat{0} a\rangle = \hat{0}$	$\mathbb{1}\hat{A} = \hat{A}$ (Existenz der Eins)
$\hat{A} - \hat{A} = \hat{0}$	

Ein linearer Operator \hat{A} bzw. eine lineare Matrix A lässt sich zerlegen in einen hermiteschen Anteil A_h und einen antihermiteschen Anteil A_a gemäß

$$A = A_h + A_a, \quad A_h = \frac{A + A^\dagger}{2}, \quad A_a = \frac{A - A^\dagger}{2}.$$

- **Adjungiert** (hochgestellter Index \dagger) heißt komplex konjugiert (hochgestellter Index $*$) und zusätzlich transponiert (hochgestellter Index T), also sinngemäß

$$\dagger = (*)^T = (T)^*.$$

Beispiel Adjungieren einer Matrix A :

$$(A^*)^T = (A^T)^* = A^\dagger, .$$

Beispiel Adjungieren des Spaltenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ (analog zu $|v\rangle$):

$$(\vec{v}^*)^T = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{pmatrix}^T = (v_1^*, v_2^*) = \vec{v}^\dagger.$$

- Die Verallgemeinerung des transponierten Produkts $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ aus reellen Matrizen A, B ist das adjungierte Produkt aus den komplexen Matrizen A, B

$$(A \cdot B)^\dagger = B^\dagger \cdot A^\dagger.$$

- In **bra-ket-Notation** (Dirac-Notation) seien die abstrakten, d. h. **basisfreien Vektoren** beispielsweise der bra-Vektor (Zeilenvektor) $\langle u|$ und der ket-Vektor (Spaltenvektor) $|v\rangle$. Diese bilden das komplexe Standardskalarprodukt $\langle u|v\rangle$ und lassen sich in einer vollständigen Orthonormalbasis wie z. B. $\{|a\rangle_i\}$ darstellen bzw. entwickeln, sodass wir dann mit den **Entwicklungskoeffizienten** u_i

und v_i schreiben können:

$$|v\rangle = \sum_i \langle a_i | v \rangle |a_i\rangle = \sum_i v_i |a_i\rangle \quad (\text{mit (vektoriellen) Vektorkomponenten } v_i |a_i\rangle),$$

$$|v\rangle := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{mit skalaren Vektorkomponenten } v_i),$$

$$\begin{aligned} \langle u | &= \sum_i \langle a_i | \langle u | a_i \rangle = \sum_i \langle a_i | u_i^* \quad u_i^* \text{ ist Skalar} \quad = \sum_i u_i^* \langle a_i | \\ &= \sum_i \underbrace{\langle u | a_i \rangle}_{= u_i^*} \langle a_i | \stackrel{(2.2)}{=} \langle u | \sum_i |a_i\rangle \langle a_i| \stackrel{(2.3)}{=} \langle u | \mathbb{1} = \langle u |, \end{aligned}$$

$$\langle u | := (u_1^* \quad u_2^* \quad \cdots \quad u_i^* \quad \cdots) = (u^*)^T \Rightarrow \langle u | \neq (u^*)^T.$$

Analogie zwischen der Darstellung von (reellen) Vektoren \vec{v} in der Standardbasis $\{\vec{e}_i\}$ (VON-Basis im \mathbb{R}^3) und der Darstellung von (komplexen) ket-Vektoren $|v\rangle$ in einer VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ im \mathbb{C}^n :

$$\text{Vektorkomponenten-Darstellung: } \vec{v} = \sum_i v_i \vec{e}_i \quad \longrightarrow \quad |v\rangle = \sum_i v_i |a_i\rangle,$$

$$\text{Matrix-Darstellung: } \vec{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad |v\rangle := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Selbstverständlich gilt für die skalaren Vektorkomponenten v_i :

$$v_i \neq v_i \vec{e}_i \quad \longrightarrow \quad v_i \neq v_i |a_i\rangle.$$

Weil sich diese beiden Darstellungsformen voneinander unterscheiden, haben wir ganz bewusst in der Matrix-Darstellung nicht das Gleichheitszeichen sondern das Zeichen $:=$ für „definiert durch“ verwendet.

Basisfreie (abstrakte) Operatoren bezeichnen wir z. B. mit \hat{A} , die zugehörigen (assozierten) Matrizen aber mit $A = (A_{ij})$ und deren Matrixelemente mit A_{ij} . In einer zum Operator \hat{A} passenden VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ erhält \hat{A} die Darstellung²

$$\hat{A} = \sum_{i,j} |a_i\rangle \langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle \langle a_j | = \sum_{i,j} |a_i\rangle A_{ij} \langle a_j |$$

mit den Matrixelementen

$$\langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle = A_{ij}$$

und der aus diesen A_{ij} gebildeten und mit dem Operator \hat{A} **assozierten Matrix**

$$(A_{ij}) = A.$$

²Auch wenn im Grunde genommen ein abstrakter (basisfreier) Operator \hat{A} nicht das Gleiche ist wie seine basisabhängige Matrix-Darstellung $A = (A_{ij})$, werden wir salopp $\hat{A} = A = (A_{ij})$ schreiben.

- **Adjungieren des Zustands-ket-Vektors** $|v\rangle$:

$$(|v\rangle^*)^T = |v\rangle^\dagger = \langle v| .$$

Wird ein ket-Vektor $|v\rangle$ adjungiert, so resultiert der zugehörige bra-Vektor $\langle v|$ und umgekehrt.

Ein ket-Vektor wird dargestellt als Spaltenvektor.

Ein bra-Vektor wird dargestellt als Zeilenvektor, dessen Elemente bzw. skalare Vektorkomponenten die komplex konjugierten Elemente des zugehörigen ket-Vektors sind gemäß der Veranschaulichung

$$\begin{pmatrix} ia \\ ib \end{pmatrix}^\dagger = (-ia, -ib) .$$

- Das **dyadische Produkt** liefert eine Matrix gemäß

$$|u\rangle\langle v| = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot (v_1^* \quad v_2^* \quad \dots) = \begin{pmatrix} u_1 v_1^* & u_1 v_2^* & \dots \\ u_2 v_1^* & u_2 v_2^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} .$$

Analog zu $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ dürfen die Vektoren (Faktoren) des dyadischen Produkts in ihrer Reihenfolge nicht vertauscht werden. Dies wird deutlich beim

Adjungieren eines dyadischen Produkts:

$$(|u\rangle\langle v|)^\dagger = \langle v|^\dagger |u\rangle^\dagger = |v\rangle\langle u| .$$

- Betrachten wir eine **Vollständige Orthonormalbasis** (kurz VON-Basis) bzw. ein vollständiges Orthonormalsystem (kurz VONS) wie beispielsweise $\{|a_i\rangle\}$. Die Basis-ket-Vektoren $|a_i\rangle$ spannen einen linearen Vektorraum auf und die Basis-bra-Vektoren $\langle a_i| = |a_i\rangle^\dagger$ den zugehörigen antilinearen Vektorraum, auch Dualraum genannt. Die orthonormierten

Basis-bra-Vektoren $\langle a_i| := (0 \cdots 0 \ a_i^* \ 0 \cdots 0)$

und

Basis-ket-Vektoren $|a_j\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

liefern als Skalarprodukt

$$\langle a_i|a_j\rangle = (\langle a_i|a_j\rangle)^* = \delta_{ij} \Rightarrow \langle a_i|a_i\rangle = 1, \quad \langle a_i|a_j\rangle = 0$$

und als dyadisches Produkt

$$\sum_i |a_i\rangle\langle a_i| = \sum_i \hat{P}_i = \mathbb{1}$$

mit den

$$\text{Projektionsoperatoren } \hat{P}_i = |a_i\rangle\langle a_i|$$

und der Einheitsmatrix bzw. dem Einsoperator oder **Identitätsoperator** $\mathbb{1}$.

Darstellung des Identitätsoperators für $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \hat{P}_i &= \sum_{i=1}^2 |a_i\rangle\langle a_i| & (2.2) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (a_1^* \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot (0 \ a_2^*) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_2 a_2^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle a_1|a_1\rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \langle a_2|a_2\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} . \quad \square & (2.3) \end{aligned}$$

Achtung!

Wegen der Orthonormalität der Basisvektoren $|a_i\rangle$ gilt

$$\sum_{ij} |a_i\rangle\langle a_j| = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i| = \mathbb{1} , \quad (2.4)$$

weil die Matrizen $|a_i\rangle\langle a_j|$ für $i \neq j$ Nullmatrizen sind, also verschwinden.

- **Eigenschaften des Projektionsoperators \hat{P}_i**

Der Projektionsoperator ist das dyadische Produkt, also eine Matrix, aus einem normierten Eigenvektor mit sich selbst, wobei die Gesamtheit der Eigenvektoren zu einem Operator \hat{A} eine VON-Basis bilden.

$$\star \hat{P}_i^2 = \hat{P}_i: \quad |a_i\rangle \underbrace{\langle a_i| |a_i\rangle}_{=1} \langle a_i| = |a_i\rangle\langle a_i| .$$

$$\star \hat{P}_i^\dagger = \hat{P}_i: \quad (|a_i\rangle\langle a_i|)^\dagger = \langle a_i|^\dagger |a_i\rangle^\dagger = |a_i\rangle\langle a_i| .$$

★ Die Eigenwerte von \hat{P}_i sind $\{0, 1\}$:

$$\hat{P}_i |a_i\rangle = \lambda_i |a_i\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{P}_i^2 |a_i\rangle = \lambda_i^2 |a_i\rangle \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \{0, 1\} .$$

- **Das komplexe Standardskalarprodukt** (kurz Skalarprodukt)

$$(\alpha^* u_1^* \ \alpha^* u_2^* \ \dots) \cdot \begin{pmatrix} \beta v_1 \\ \beta v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha^* \beta (u_1^* v_1 + u_2^* v_2 + \dots)$$

liefert mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ einen Skalar gemäß

$$\begin{aligned} \langle \alpha u | \beta v \rangle &= \alpha^* \langle u | \beta v \rangle = \alpha^* \beta \langle u | v \rangle \\ &= \left(\langle \beta v | \alpha u \rangle \right)^* = \left(\beta^* \alpha \langle v | u \rangle \right)^* = \alpha^* \beta (\langle v | u \rangle)^* = \alpha^* \beta \langle u | v \rangle . \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt ist also antilinear (konjugiert linear) im ersten und linear im zweiten Argument.

Das Skalarprodukt c_i aus dem Zustandsvektor $|v\rangle$ und dem Basisvektor $|a_i\rangle$, also $c_i = \langle a_i|v\rangle$, ist die Projektion von $|v\rangle$ auf $|a_i\rangle$, gesprochen: „Skalarprodukt v in a_i “. c_i ist somit die komplexe skalare Vektorkomponente von $|v\rangle$ „in Richtung“ des Basisvektors $|a_i\rangle$.

- Darstellung des **komplexen Standardskalarprodukts** in der VON-Basis $\{a_i\}$:
Wir gehen dabei aus vom basisfreien Standardskalarprodukt $\langle u|v\rangle$ und müssen berücksichtigen, dass das komplexe Standardskalarprodukt **hermitesch** ist gemäß

$$\langle u|v\rangle = (\langle v|u\rangle)^* \stackrel{\text{i.A.}}{\implies} \langle u|v\rangle \neq \langle v|u\rangle : \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \langle u|v\rangle &= \sum_{ij} \langle a_i|\langle u|a_i\rangle \langle a_j|v\rangle|a_j\rangle = \sum_{ij} \langle a_i|u_i^* v_j|a_j\rangle \\ &= \sum_{ij} u_i^* v_j \underbrace{\langle a_i|a_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_i u_i^* v_i . \end{aligned}$$

Die Beziehung $\langle u|v\rangle = (\langle v|u\rangle)^*$ zeigt die **Konjugationssymmetrie** des hermiteschen Skalarprodukts.

- Aus der Hermitezität in (2.5) folgt für das Standardskalarprodukt eines komplexen Vektors $|v\rangle$ mit sich selbst:

$$\langle v|v\rangle = (\langle v|v\rangle)^* \implies \begin{cases} \langle v|v\rangle \in \mathbb{R} , \\ \langle v|v\rangle \geq 0 \text{ und somit } \mathbf{positiv\ definit} . \end{cases} \quad (2.6)$$

(2.6) lässt sich zurückführen auf das Normquadrat einer komplexen Zahl z :

$$z^* \cdot z = (a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 \implies \begin{cases} z^* z \in \mathbb{R} , \\ z^* z \geq 0 . \end{cases}$$

- **Adjungieren des Skalarprodukts** $\langle u|v\rangle$:

$$\begin{aligned} (\langle u|v\rangle)^\dagger &= |v\rangle^\dagger \cdot \langle u|^\dagger = \langle v|u\rangle = \sum_i v_i^* u_i \\ &= (\langle u|v\rangle)^* = \left(\sum_i u_i^* v_i \right)^* \implies \\ (\langle u|v\rangle)^\dagger &= (\langle u|v\rangle)^* = \langle v|u\rangle . \end{aligned}$$

- **Adjungieren eines Matrix-Vektor-Produkts**:

$$A|u\rangle = |v\rangle \implies$$

$$(A|u\rangle)^\dagger = (|u\rangle)^\dagger A^\dagger = \langle u|A^\dagger = |v\rangle^\dagger = \langle v| ,$$

wobei A^\dagger rechts von $\langle u|$ stehen muss, u. a. weil $\langle u|$ ein Zeilenvektor ist.

- **Adjungieren eines Matrix-Matrix-Vektor-Produkts :**

$$A(B|u\rangle) = |v\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\left[A(B|u\rangle) \right]^\dagger = |v\rangle^\dagger = \langle v| = (\langle u|B^\dagger) A^\dagger .$$

Hierbei ist die Reihenfolge von Matrizen und Vektor zu beachten.

- **Entwicklungssatz**

In Analogie zur Darstellung eines Vektors \vec{v} durch seine skalaren Vektorkomponenten v_1, v_2, v_3 in der VON-Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ im \mathbb{R}^3 gemäß

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (\vec{e}_1 \cdot \vec{v}) \cdot \vec{e}_1 + (\vec{e}_2 \cdot \vec{v}) \cdot \vec{e}_2 + (\vec{e}_3 \cdot \vec{v}) \cdot \vec{e}_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 \underbrace{(\vec{e}_i \cdot \vec{v})}_{v_i} \cdot \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \vec{e}_i := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wird die Darstellung (Entwicklung) eines (Zustands)vektors $|v\rangle$ nach der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ im \mathbb{C}^n beschrieben durch den Entwicklungssatz

$$\begin{aligned} |v\rangle &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle a_i|v\rangle}_{v_i} |a_i\rangle = \sum_{i=1}^n v_i |a_i\rangle := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1|v\rangle \\ \langle a_2|v\rangle \\ \vdots \\ \langle a_i|v\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.7) \\ &= \sum_{i=1}^n |a_i\rangle \langle a_i|v\rangle = \sum_{i=1}^n \hat{P}_i |v\rangle \\ &= \mathbb{1}|v\rangle = |v\rangle . \end{aligned}$$

Die Projektionen von $|v\rangle$ auf $|a_i\rangle$ bzw. die Skalarprodukte $\langle a_i|v\rangle$ sind die **Entwicklungskoeffizienten** $v_i \in \mathbb{C}$. In (2.7) steht ganz bewusst nicht das Gleichheitszeichen, sondern das Zeichen $:=$ für „definiert durch“, weil die Vektorkomponenten-Darstellung nicht das Gleiche ist wie die Matrix-Darstellung eines Vektors.

- **Hermitesche Operatoren bzw. Matrizen**

Eine Matrix A ist hermitesch, wenn $A = A^\dagger$, beispielsweise

$$A = \left(\begin{array}{cc} a & ic \\ -ic & b \end{array} \right) = A^\dagger, \quad \left. \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right\} \in \mathbb{R} .$$

Eine Matrix A ist antihermitesch, wenn $A = -A^\dagger$ bzw. $iA = (iA)^\dagger$, beispielsweise

$$A = \left(\begin{array}{cc} -ia & c \\ -c & ib \end{array} \right) = -A^\dagger, \quad \left. \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right\} \in \mathbb{R} .$$

- **Observablen = Messgrößen**

In der Quantenmechanik werden die physikalischen Messgrößen **Observablen** genannt. Observablen werden repräsentiert durch Operatoren und realisieren sich in Gestalt von Messwerten. Messwerte aber können nur reelle Zahlen sein. Deshalb sind alle zu den *üblichen* Observablen in der Quantenmechanik gehörigen **Operatoren hermitesch**, d. h. selbstadjungiert wie beispielsweise die mit dem Operator \hat{A} assoziierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2+i & i \\ 2-i & 2 & 1-2i \\ -i & 1+2i & 5 \end{pmatrix} = A^\dagger .$$

Hermitesche Operatoren bzw. ihre assoziierten Matrizen besitzen nämlich die folgenden Eigenschaften:

- ★ Ihre Hauptdiagonalelemente sind reell.
- ★ Ihre Eigenwerte sind reell und repräsentieren mögliche Messwerte wie z. B. in $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$ bzw. $\hat{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$.
- ★ Ihre Eigenfunktionen sind orthogonal und bilden ein VONS.

- **Synapse: Adjungierte** [$(AB)^T = B^T A^T \Rightarrow (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$]

- ★ Bra-Vektor $\langle u|$: $\langle u|^\dagger = |u\rangle$.

- ★ Ket-Vektor $|v\rangle$: $|v\rangle^\dagger = \langle v|$.

- ★ Skalarprodukt $\langle u|v\rangle$:

$$(\langle u|v\rangle)^\dagger = |v\rangle^\dagger \langle u|^\dagger = \langle v|u\rangle = \sum_i v_i^* u_i = (\langle u|v\rangle)^* .$$

- ★ dyadisches Produkt $|u\rangle\langle v|$:

$$(|u\rangle\langle v|)^\dagger = \langle v|^\dagger |u\rangle^\dagger = |v\rangle\langle u| .$$

- ★ Matrix-Vektor-Produkt $A|u\rangle = |v\rangle$:

$$(A|u\rangle)^\dagger = |v\rangle^\dagger = \langle v| = |u\rangle^\dagger A^\dagger = \langle u|A^\dagger ,$$

wobei A^\dagger rechts von $\langle u|$ stehen muss, u. a. weil $\langle u|$ ein Zeilenvektor ist.

- ★ Matrix-Matrix-Vektor-Produkt $A(B|u\rangle) = |v\rangle$:

$$\left[A(B|u\rangle) \right]^\dagger = |v\rangle^\dagger = \langle v| = (\langle u|B^\dagger) A^\dagger .$$

Hierbei ist die Reihenfolge von Matrizen und Vektor zu beachten.

2.3 Matrixdarstellung von Operatoren

Nach:

Christian B. Lang und Norbert Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*, Hochschultaschenbuch, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1998, Seite 425.

Siehe auch:

Torsten Fließbach, *Quantenmechanik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik III*, 4. Auflage, Elsevier-Spektrum Akademischer Verlag, München, 2005, Seite 235 bis Seite 237.

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass man einen Operator \hat{A} als Matrix auffassen kann bzw. dass jeder Operator mit einer zugehörigen Matrix $A = (A_{ij})$ assoziiert ist. Dazu gehen wir aus von der basisfreien **Operatorgleichung**

$$|v\rangle = \hat{A}|u\rangle. \quad (2.8)$$

Zunächst entwickeln wir diese Operatorgleichung nach der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$:

$$\begin{aligned} |v\rangle &= \sum_j \underbrace{\langle a_j|v\rangle}_{v_j} |a_j\rangle = \hat{A}|u\rangle = \hat{A} \sum_j \underbrace{\langle a_j|u\rangle}_{u_j} |a_j\rangle \\ \sum_j v_j |a_j\rangle &= \hat{A} \sum_j u_j |a_j\rangle = \sum_j u_j \hat{A}|a_j\rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dabei sind u_j und v_j die Entwicklungskoeffizienten von $|u\rangle$ und $|v\rangle$. Durch Multiplikation von (2.9) mit dem bra-Vektor $\langle a_i|$ (von links) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_j \langle a_i|v_j|a_j\rangle &= \sum_j v_j \underbrace{\langle a_i|a_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_j u_j \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \Rightarrow \\ v_i &= \sum_j \underbrace{\langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle}_{A_{ij}} \cdot u_j, \end{aligned} \quad (2.10)$$

also die **skalaren Vektorkomponenten** $v_i = \sum_j A_{ij} \cdot u_j$

des Vektors $|v\rangle$ und die **Matrixelemente** $A_{ij} = \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle$ des Operators \hat{A} , dargestellt in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$.

Damit können wir die basisfreie Operatorgleichung (2.8) als **Matrixgleichung** in der Basis $\{|a_i\rangle\}$ formulieren:

$$\underbrace{|v\rangle = \hat{A}|u\rangle}_{\text{basisfrei}} \longrightarrow |v\rangle := \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Matrixgleichung in } \{|a_i\rangle\}} = (A_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \end{pmatrix} =: \hat{A}|u\rangle.$$

Die Matrixelemente A_{ij} sind die Skalarprodukte $\langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle$, also Skalare. Sie wichten die $|u\rangle$ -Komponenten u_j bei der Summierung zu jeder $|v\rangle$ -Komponente v_i .

Aus den einzelnen Matrixelementen A_{ij} erhalten wir die **Matrixdarstellung** von $\hat{A} = (A_{ij})$ mit Hilfe der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ wie folgt:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle a_1|\hat{A}|a_1\rangle & \langle a_1|\hat{A}|a_2\rangle & \cdots & \langle a_1|\hat{A}|a_j\rangle & \cdots \\ \langle a_2|\hat{A}|a_1\rangle & \langle a_2|\hat{A}|a_2\rangle & \cdots & \langle a_2|\hat{A}|a_j\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle a_i|\hat{A}|a_1\rangle & \langle a_i|\hat{A}|a_2\rangle & \cdots & \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{A} = (A_{ij}) = \sum_{ij} |a_i\rangle A_{ij} \langle a_j| = \sum_{ij} A_{ij} |a_i\rangle \langle a_j|} . \quad (2.11)$$

Weil die Matrixelemente Skalare sind, konnten wir A_{ij} hier vorziehen.

Wir verifizieren die Matrixdarstellung (2.11) von \hat{A} für den 2-dimensionalen Fall, also mit der 2-dimensionalen VON-Basis $\{a_1, a_2\}$:

$$\begin{aligned} & A_{11}|a_1\rangle\langle a_1| + A_{12}|a_1\rangle\langle a_2| + A_{21}|a_2\rangle\langle a_1| + A_{22}|a_2\rangle\langle a_2| \\ &= A_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{21} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} . \quad \square \end{aligned}$$

Doch wie erhalten wir durch Anwendung des Operators \hat{A} auf den Vektor $|u\rangle$ die Darstellung des Vektors $|v\rangle$ in der Form

$$|v\rangle = v_1|a_1\rangle + v_2|a_2\rangle + \cdots + v_i|a_i\rangle + \cdots = \sum_i v_i|a_i\rangle ?$$

Wir multiplizieren (2.10) mit dem Basis-Ket-Vektor $|a_i\rangle$ von rechts und summieren über i :

$$\begin{aligned} \sum_i v_i|a_i\rangle = |v\rangle &= \sum_i \left(\sum_j \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \cdot u_j \right) |a_i\rangle \Rightarrow \\ \sum_i \underbrace{\langle a_i|v\rangle}_{v_i} |a_i\rangle &= \sum_{ij} \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \cdot \underbrace{\langle a_j|u\rangle}_{u_j} |a_i\rangle \Rightarrow \text{mit } v_i \cdot |a_i\rangle = |a_i\rangle \cdot v_i \\ \underbrace{\sum_i |a_i\rangle \langle a_i|}_{\mathbb{1}} v &= \underbrace{\sum_{ij} |a_i\rangle \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \langle a_j|}_{\hat{A}} u , \\ |v\rangle &= \hat{A}|u\rangle . \end{aligned}$$

Wie man sieht, gilt für die Matrixdarstellung (A_{ij}) eines Operators \hat{A} in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ mit (2.11) auch

$$\boxed{\hat{A} = \mathbb{1}\hat{A}\mathbb{1} = \sum_{ij} |a_i\rangle \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \langle a_j| = \sum_{ij} |a_i\rangle A_{ij} \langle a_j| = (A_{ij})} .$$

Als Übung zeigen wir, wie sich der Operator \hat{A} im

Skalarprodukt $\langle v|\hat{A}|u\rangle$

darstellt. Durch Einschleiben von zwei Identitätsoperatoren erhalten wir daraus in Komponentenschreibweise bezüglich der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$

$$\langle v|\hat{A}|u\rangle = \langle v|\mathbb{1}\hat{A}\mathbb{1}|u\rangle = \sum_{i,j} \underbrace{\langle v|a_i\rangle}_{v_i^*} \underbrace{\langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle}_{A_{ij}} \underbrace{\langle a_j|u\rangle}_{u_j} = \sum_{i,j} v_i^* A_{ij} u_j \quad (2.12)$$

mit den skalaren Vektorkomponenten $\langle v|a_i\rangle = v_i^*$ und $\langle a_j|u\rangle = u_j$. Wenn wir (2.12) vollständig ausschreiben, erkennen wir wieder die Matrixdarstellung (A_{ij}) des Operators \hat{A} :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} v_i^* A_{ij} u_j &= (v_1^* \quad v_2^* \quad \cdots \quad v_i^* \quad \cdots) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \\ & (\langle v|a_1\rangle \quad \langle v|a_2\rangle \quad \cdots \quad \langle v|a_i\rangle \quad \cdots) \begin{pmatrix} \langle a_1|\hat{A}|a_1\rangle & \langle a_1|\hat{A}|a_2\rangle & \cdots & \langle a_1|\hat{A}|a_j\rangle & \cdots \\ \langle a_2|\hat{A}|a_1\rangle & \langle a_2|\hat{A}|a_2\rangle & \cdots & \langle a_2|\hat{A}|a_j\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \langle a_i|\hat{A}|a_1\rangle & \langle a_i|\hat{A}|a_2\rangle & \cdots & \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a_1|u\rangle \\ \langle a_2|u\rangle \\ \vdots \\ \langle a_j|u\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \langle v|\mathbb{1}\hat{A}\mathbb{1}|u\rangle = \langle v|\hat{A}|u\rangle . \end{aligned}$$

In diesem Zusammenhang weisen wir noch einmal auf die Ungleichheit zwischen Vektorkomponenten-Darstellung und Matrix-Darstellung von Vektoren hin. So gilt beispielsweise bezüglich der skalaren Vektorkomponenten v_i der Operatorgleichung $|v\rangle = \hat{A}|u\rangle$:

$$\begin{array}{ll} \text{Matrixdarstellung :} & \text{Vektorkomponenten-Darstellung :} \\ v_i = \sum_j A_{ij} u_j & \neq v_i|a_i\rangle = \left(\sum_j A_{ij} u_j \right) |a_i\rangle \end{array}$$

Die Analogie dazu im \mathbb{R}^3 ist beispielsweise für die Komponente mit $i = 2$:

$$v_2 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 \quad \neq \quad v_2 \cdot \vec{e}_2 = (A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3) \cdot \vec{e}_2 .$$

3 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

Siehe auch:

Lothar Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*, 10. Auflage, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 2001, Seite 121 bis Seite 140
und

Christian B. Lang und Norbert Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*, Spektrum, Heidelberg, Berlin, 1998, Seite 204 bis 211, Seite 414 bis 422.

3.1 Eigenwertgleichung einer 2-reihigen reellen Matrix

Wir gehen aus von der linearen Abbildungsgleichung (Transformationsgleichung)

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

im \mathbb{R}^2 bzw. in der Ebene. Dabei seien die Funktion A eine 2-reihige (quadratische) reelle Matrix und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ die Ortsvektoren zur Beschreibung der Punkte $P_{\vec{x}} := \{x_1, x_2\}$ und $P_{\vec{y}} := \{y_1, y_2\}$. Die Wirkung von A auf den Ortsvektor \vec{x} kann allgemein sowohl in einer Drehung als auch in einer Längenänderung bestehen, woraus dann der Ortsvektor \vec{y} resultiert (s. Abb. 3.1 a). Beispielsweise liefern

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{y}.$$

Wir gehen jetzt der Frage nach, ob zur Matrix A Vektoren \vec{x} existieren, sodass \vec{y} kollinear zu \vec{x} verläuft (s. Abb. 3.1 b).

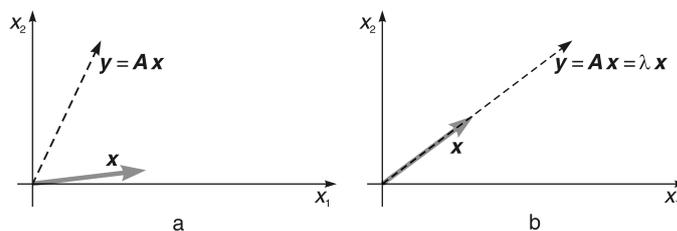


Abb. 3.1

a Die Matrix A bewirkt sowohl eine Längenänderung als auch eine Drehung am Vektor \vec{x} und überführt diesen so in den Vektor \vec{y} . Der Vektor \vec{x} ist folglich kein Eigenvektor zu A .

b Die Matrix A überführt den Vektor \vec{x} (ohne Drehung) in den zu \vec{x} kollinearen Vektor \vec{y} . Der Vektor \vec{x} ist somit ein Eigenvektor zur Matrix A .

In diesem Fall resultiert mit der Einheitsmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda \cdot E\vec{x} = \vec{y}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Um \vec{x} zu bestimmen bilden wir aus (3.1) durch die Äquivalenzumformung

$$A \cdot \vec{x} = \lambda E \cdot \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda E) \cdot \vec{x} = 0$$

das homogene lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Ein homogenes LGS besitzt nur dann nicht-triviale Lösungen \vec{x} , wenn die Koeffizientendeterminante $\det(A - \lambda E)$ verschwindet¹:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - [(-1)(-3)] \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 5 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$A - \lambda E$ ist die *charakteristische Matrix* von A und $\lambda^2 - 6\lambda + 5 \stackrel{!}{=} 0$ heißt die *charakteristische Gleichung* bzw. das *charakteristische Polynom* von A . Es ist in diesem Fall eine quadratische Gleichung in λ und somit nur erfüllt für

$$\lambda \Rightarrow \begin{cases} 3 + \sqrt{9-5} = \lambda_1 = 5, \\ 3 - \sqrt{9-5} = \lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Die Lösungen λ_1 und λ_2 dieser quadratischen Gleichung, d. h. die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A sind die *Eigenwerte der Matrix* A .

Allgemein können wir für die 2-reihige Determinate der Matrix A

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

und für das charakteristische Polynom der Matrix A

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\text{Sp}(A)} \lambda + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\det A} \end{aligned}$$

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \text{Sp}(A) \cdot \lambda + \det A = 0 \quad (3.3)$$

¹Die Determinante einer Matrix M verschwindet, wenn M singular (linear abhängig) ist. Folglich ist es erforderlich, dass die charakteristische Matrix $A - \lambda E$ singular ist.

schreiben. Durch Faktorisierung (Zerlegung in Linearfaktoren) erhält das charakteristische Polynom die Produktform

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \lambda + \lambda_1 \lambda_2. \quad (3.4)$$

Der Koeffizientenvergleich zwischen (3.3) und (3.4) zeigt, wie Spur und Determinante von A mit den Eigenwerten von A zusammenhängen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp}(A) &= a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det A &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

Mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 können wir jetzt das homogene LGS (3.2) lösen.

Für $\lambda_1 = 5$ resultiert

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 - \lambda_1 & -1 \\ -3 & 4 - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad -3x_1 - x_2 = 0 \\ \text{(II)} \quad -3x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow x_2 = -3x_1. \end{aligned}$$

x_1 ist frei wählbar. Wir setzen $x_1 = \alpha$ und erhalten für den normierten Lösungsvektor \vec{x}_1 zum Eigenwert λ_1

$$\boxed{\vec{x}_1(\lambda_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}.$$

Für $\lambda_2 = 1$ resultiert

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 - \lambda_2 & -1 \\ -3 & 4 - \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad x_1 - x_2 = 0 \\ \text{(II)} \quad -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow x_2 = x_1. \end{aligned}$$

x_1 ist frei wählbar. Wir setzen $x_1 = \beta$ und erhalten für den normierten Lösungsvektor \vec{x}_2 zum Eigenwert λ_2

$$\boxed{\vec{x}_2(\lambda_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Die Lösungsvektoren \vec{x}_1 und \vec{x}_2 sind die *Eigenvektoren bezüglich der Matrix A* . Die Eigenvektoren liegen im Kern der charakteristischen Matrix $A - \lambda E$.

Weil α und β frei gewählt werden durften, hätten wir sie auch gleich 1 setzen können. Es ist zwar Konvention, die Eigenvektoren zu normieren, aber nicht unbedingt notwendig. Deshalb führen wir die Probe mit

$$\alpha = 1 \Rightarrow \tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta = 1 \Rightarrow \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch:

$$A \cdot \tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \tilde{x}_1, \quad \lambda = \lambda_1 = 5 \in \mathbb{R},$$

$$A \cdot \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \tilde{x}_2, \quad \lambda = \lambda_2 = 1 \in \mathbb{R}.$$

Wirkt eine Matrix A auf einen ihrer Eigenvektoren \vec{x}_i , so erzeugt sie einen zu \vec{x}_i kollinearen Vektor \vec{y}_i , dessen Länge das λ_i -fache der Länge von \vec{x}_i beträgt. Hierbei ist λ_i der zum Eigenvektor \vec{x}_i gehörende Eigenwert der Matrix A . Die Länge der Eigenvektoren \vec{x}_i kann frei gewählt werden. Konventionsgemäß werden die Eigenvektoren aber auf die Länge 1 normiert.

Merke!

- Die charakteristische Matrix von A ist singulär und damit linear abhängig.
- Eine Eigenwertgleichung beschreibt die Wirkung einer Matrix A auf einen ihrer Eigenvektoren \vec{v} . Diese Wirkung ist die Multiplikation des Eigenvektors mit dem zugehörigen Eigenwert λ . A produziert folglich den Vektor $\lambda\vec{v}$ der parallel (kollinear) zum Eigenvektor \vec{v} ist.
- Auch Vielfache von Eigenvektoren sind Eigenvektoren.

3.2 Verallgemeinerungen für n -reihige Matrizen

Die für 2-reihige Matrizen gewonnenen Erkenntnisse lassen sich auf n -reihige Matrizen verallgemeinern.

- Insbesondere gilt für die Eigenwerte n -reihiger Matrizen A

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Spur } A, \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A.$$

- Zu n verschiedenen Eigenwerten gehören n linear unabhängige Eigenvektoren.
- Ein k -facher Eigenwert (Vielfachheit k) hat mindestens einen und höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
- Die Eigenwerte einer Dreiecks- oder Diagonalmatrix A sind identisch mit ihren Hauptdiagonalelementen. Dies resultiert aus den Rechenregeln für Determinanten beispielsweise wie folgt:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda_1)(a_{22} - \lambda_2)(a_{33} - \lambda_3) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22}, \quad \lambda_3 = a_{33}. \end{aligned}$$

- Vielfache von Eigenvektoren sind ebenfalls Eigenvektoren.
- Die Eigenvektoren bezüglich einer Diagonalmatrix sind die den Eigenwerten λ_i entsprechenden kanonischen Einheitsvektoren $|e_i\rangle$ der Standardbasis $\{|e_i\rangle\}$.
Beispiel zur Veranschaulichung mit dem Eigen- bzw. Basisvektor $|e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$A|e_i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

- Zusätzlich gilt für *reelle* symmetrische Matrizen $A = A^T$:
Alle n Eigenwerte sind reell und die Eigenvektoren von verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.²

²Die Beweise finden sich unter

www.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ss10/MFI2/kap46.pdf

oder unter dem Suchbegriff „Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen“.

4 Entartung von Eigenwerten

Die Eigenwerte λ_i einer $(n \times n)$ -Matrix A sind die n Lösungen bzw. die n Nullstellen des charakteristischen Polynoms (n -ten Grades)

$$\det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}) = 0, \quad \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}.$$

Existieren mehrere wie beispielsweise k gleiche Nullstellen unter den Lösungen des charakteristischen Polynoms, so spricht man von Vielfachheit (Multiplizität) dieser Nullstellen bzw. von k -fachen Nullstellen oder auch von Nullstellen der Ordnung k . Gibt es mehr als einen linear unabhängigen Eigenvektor \vec{v} als Lösung der zugehörigen Eigenwertgleichung

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

zu *einem* Eigenwert λ , so nennt man diesen **Eigenwert entartet**.

Das charakteristische Polynom einer $(n \times n)$ -Matrix A besitzt n Nullstellen. Die Matrix A besitzt demzufolge n Eigenwerte λ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Treten (gleiche) Nullstellen k -fach auf und zählen wir nur *verschiedene* Nullstellen bzw. Eigenwerte λ_j mit dem Laufindex $j = 1, 2, 3, \dots, m$, so gilt

$$\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m < n & \text{bei Entartung,} \\ m = n & \text{keine Entartung.} \end{cases}$$

Kurz gesagt:

Im Fall einer k_j -fachen Entartung eines Eigenwertes λ_j existieren k_j gleiche Nullstellen unter den n Lösungen des charakteristischen Polynoms n -ten Grades.

Beispiel reelle (3×3) -Matrix A mit 2-fach entartetem Eigenwert:

Die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

besitzt das charakteristische Polynom $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$ bzw.

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4$$

mit der einfachen Nullstelle $\lambda_1 = 4$ und der 2-fachen Nullstelle $\lambda_{2,3} = 1$. In faktorisierte Form lautet damit das charakteristische Polynom

$$(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda - 1).$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind also

$$\boxed{\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1}.$$

Der Graph dieser charakteristischen Polynom-Funktion tangiert die x -Achse an der mehrfachen Nullstelle.

Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren \vec{v}_i bezüglich der Matrix A :

Die nicht normierten Eigenvektoren werden dabei mit einer Tilde indiziert.

- $\lambda_1 = 4$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right] \tilde{\vec{v}}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$-2x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z,$$

$$x - 2y + z = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 2y + z = 0 \Leftrightarrow y = z,$$

$$x + y - 2z = 0 \Rightarrow x + y - 2y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Wir erhalten $x = y = z$, wählen $x = 1$ und erhalten

$$\boxed{\tilde{\vec{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

- $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{matrix}$$

Wir wählen $x = y = 1 \Rightarrow z = -2$ und erhalten

$$\boxed{\tilde{\vec{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}.$$

Die Eigenvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 sind zueinander orthogonal, denn

$$\tilde{\vec{v}}_1 \cdot \tilde{\vec{v}}_2 = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \tilde{\vec{v}}_1 \perp \tilde{\vec{v}}_2.$$

- $\lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können jetzt wieder zwei der drei Variablen frei wählen bzw. festlegen. Weil aber die drei Eigenvektoren linear unabhängig und sogar orthogonal zueinander sein sollen, wählen wir $\tilde{\vec{v}}_3$ gleich derart, dass

$$\tilde{\vec{v}}_3 \perp \tilde{\vec{v}}_1 \quad \text{und} \quad \tilde{\vec{v}}_3 \perp \tilde{\vec{v}}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{(I)} & \tilde{\vec{v}}_1 \cdot \tilde{\vec{v}}_3 = 0 \\ \text{(II)} & \tilde{\vec{v}}_2 \cdot \tilde{\vec{v}}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -y - z, \\ \text{(II)} \quad 1 \cdot x + 1 \cdot y - 2 \cdot z &= 0 \quad \Rightarrow \quad -y - z + y - 2z = -3z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten $z = 0$, $y = -x$, wählen $x = 1$ und erhalten

$$\boxed{\tilde{\vec{v}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Die drei Eigenvektoren \vec{v}_i bilden eine vollständige Orthonormalbasis. Überprüfen lässt sich dieses Ergebnis durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung

$$A \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad \text{bzw.} \quad A \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i.$$

5 Hilbertraum, Hermitesche Matrizen (Operatoren) und ihre Eigenschaften

Die Feststellungen über hermitesche Matrizen gelten auch für hermitesche Operatoren. Abhängig vom Zusammenhang werden wir deshalb im Folgenden entweder von Matrizen oder von Operatoren sprechen. Weil die hermiteschen Operatoren in der Quantenmechanik auf Zustandsvektoren, d. h. auf Elemente des Hilbert-Raums \mathcal{H} wirken, beginnen wir diesen Abschnitt mit der

Definition des Hilbert-Raums:

Im Allgemeinen sind Hilberträume \mathcal{H} *abzählbar-unendlichdimensionale, lineare Vektorräume über \mathbb{C} mit einem Standardskalarprodukt*. Weiterhin sind Hilberträume *vollständig* bezüglich der durch $\|\Psi\rangle\| = \sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle}$ definierten *Norm*, wobei $|\Psi\rangle$ abstrakte, basisfreie Hilbert-Raum-Vektoren (Hilbert-Raum-Elemente) sind.

Die Hilbert-Raum-Vektoren $|\Psi\rangle$ lassen sich nach ihren quadratsummablen Koordinaten entwickeln, die wiederum eine den Hilbertraum vollständig aufspannende Orthonormalbasis bilden. Der Hilbert-Raum zu einem Operator mit einem vollständigen Satz von n linear unabhängigen Eigenvektoren ist ebenfalls n -dimensional.

Hilbert-Räume sind z. B. der \mathbb{R}^n , der \mathbb{C}^n , der quadratsummable Folgenraum ℓ^2 , aber auch der L^2 -Raum der quadratintegrablen Funktionen.

Hermitesche Matrizen (Operatoren) und ihre Eigenschaften

- Hermitesche Matrizen A sind quadratisch und komplex. Sie lassen sich zerlegen in einen Realteil, die symmetrische reelle Matrix B , und in einen Imaginärteil, die antisymmetrische (schiefsymmetrische) Matrix C . Für eine n -reihige hermitesche Matrix

$$A = A_{n \times n} = B_{n \times n} + i C_{n \times n} \quad \Rightarrow \quad A = B + i C$$

gilt folglich

$$A^\dagger = (B + i C)^\dagger = B^\dagger + C^\dagger i^\dagger = B^T + C^T i^* = B - C(-i) = B + i C = A ,$$

$$A = A^\dagger .$$

Alle Hauptdiagonalelemente sind reell. Eine hermitesche Matrix ist z. B.

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3i & 1 - 4i \\ -3i & 2 & 8 - i \\ 1 + 4i & 8 + i & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3i & -4i \\ -3i & 0 & -i \\ 4i & i & 0 \end{pmatrix} .$$

- Die Determinante einer hermiteschen Matrix ist reell:

$$\det A \in \mathbb{R} .$$

- Hermitesche Matrizen (**lineare hermitesche Operatoren**) besitzen nur **reelle Eigenwerte**:¹

In (2.5) verwenden wir für $\langle u|$

$$\langle u| = A|v\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle u| = |u\rangle^\dagger = (A|v\rangle)^\dagger = \langle v|A^\dagger = \langle v|A$$

und erhalten

$$\langle u|v\rangle = (\langle u|v\rangle)^* = \langle v|A|v\rangle = (\langle v|A|v\rangle)^* .$$

Mit dem Eigenwert λ von A und dem Eigenvektor $|v\rangle$ zu λ und A gilt die **Eigenwertgleichung**

$$A|v\rangle = \lambda|v\rangle ,$$

woraus

$$\begin{aligned} \langle v|A|v\rangle &= \langle v|\lambda|v\rangle \\ &= \lambda\langle v|v\rangle = (\lambda\langle v|v\rangle)^* \end{aligned}$$

folgt. Wegen $\langle v|v\rangle \in \mathbb{R}$ muss also auch $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten.

- Die **Eigenvektoren** zu *verschiedenen* Eigenwerten einer hermiteschen Matrix (einem linearen hermiteschen Operator) sind **orthogonal**:¹

„Sei

$$A|u\rangle = \lambda_1|u\rangle, \quad A|v\rangle = \lambda_2|v\rangle, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 .$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\langle v|A = \lambda_2\langle v|$. Bildet man in dieser Gleichung das Skalarprodukt mit $|u\rangle$, in der ersten Gleichung das Skalarprodukt mit $\langle v|$ und subtrahiert anschließend die beiden Gleichungen voneinander, so erhält man

$$\langle v|A|u\rangle - \langle v|A|u\rangle = \lambda_1\langle v|u\rangle - \lambda_2\langle v|u\rangle ,$$

also

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v|u\rangle = 0 ,$$

also $\langle v|u\rangle = 0$.“

¹Nach bzw. zitiert aus: Jan-Markus Schwindt, *Tutorium Quantenmechanik*, Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2013, Seite 27 bis Seite 30.

- Die **Eigenvektoren** bezüglich einer hermiteschen Matrix (einem linearen hermiteschen Operator) spannen eine **vollständige Orthonormalbasis** (VON-Basis) in \mathcal{H} auf.² Kurz gesagt, die Eigenvektoren aller Eigenwerte einer hermiteschen Matrix (eines hermiteschen Operators) spannen den gesamten zugehörigen Hilbert-Raum auf.
- Der Eigenvektor bzw. „die Eigenvektoren zu einem bestimmten Eigenwert λ bilden einen Vektorraum, einen Unterraum von \mathcal{H} , den Eigenraum \mathcal{H}_λ zum Eigenwert λ .“² Insofern stellt jeder einzelne Eigenvektor einen eindimensionalen Unterraum von \mathcal{H} dar.
- Jeder durch eine quantenmechanische Messung zu beschreibende Zustand eines Objekts ist mathematisch gesehen ein **Strahl** bzw. die Vektorenmenge $\{\alpha|\Psi\rangle\}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und folglich ein eindimensionaler Unterraum von \mathcal{H} . $|\Psi\rangle$ ist dabei der im Allgemeinen gemäß $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ normierte Zustandsvektor und kann als Repräsentant des zu beschreibenden Zustands gewählt werden. Die Zustandsvektoren (Zustände) $|\Psi\rangle$ wiederum sind im Allgemeinen Linearkombinationen aus Eigenvektoren $|a_i\rangle$ bezüglich einer Observablen, d. h. bezüglich eines Operators \hat{A} .
- Wenn die Eigenvektoren $|a_i\rangle$ zum Operator \hat{A} die VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ bilden und wenn der Zustand $|\Psi\rangle$ die Linearkombination

$$|\Psi\rangle = \sum_i \langle a_i|\Psi\rangle |a_i\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$$

aus den Basisvektoren $|a_i\rangle$ ist, dann gelten mit den Eigenwerten λ_i von \hat{A} die zugehörigen

$$\textbf{Eigenwertgleichungen} \quad \hat{A}|a_i\rangle = \lambda_i |a_i\rangle .$$

Ist $|\Psi\rangle$ selbst ein Eigenvektor bzw. ein Eigenzustand zum Operator \hat{A} , dann erhält die Eigenwertgleichung mit dem zugehörigen Eigenwert λ die Form

$$\hat{A}|\Psi\rangle = \lambda |\Psi\rangle .$$

Ein Beispiel dafür ist die Eigenwertgleichung $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ zum Hamilton-Operator \hat{H} , wenn E ein Eigenwert von \hat{H} ist und $|\Psi\rangle$ der zugehörige Eigenzustand.

²Nach bzw. zitiert aus: Jan-Markus Schwindt, *Tutorium Quantenmechanik*, Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2013, Seite 27 bis Seite 30.

6 Unitäre Matrizen (Operatoren)

Ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle u|v \rangle = \vec{u}^T \cdot \vec{v} = \sum_i u_i \cdot v_i = \langle v|u \rangle$ heißt euklidischer Vektorraum.

Ein \mathbb{C} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle u|v \rangle = \vec{u}^\dagger \cdot \vec{v} = \sum_i u_i^* \cdot v_i = (\langle v|u \rangle)^*$ heißt unitärer Vektorraum.

Unitäre Operatoren bezeichnen wir mit \hat{U} und die zugehörigen unitären Matrizen (Operatorenmatrizen) mit $(U_{ij}) = U$. Zwei sehr einfache Beispiele für unitäre Matrizen sind die Matrix $U = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ und die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$. Vereinfachend verwenden wir in diesem Abschnitt für die (Zustands-)Vektoren gelegentlich die Darstellung

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{pmatrix} =: |v\rangle .$$

6.1 Eigenschaften unitärer Matrizen (Operatoren)

- Unitär heißt im weitesten Sinne normerhaltend. Das aber bedeutet, dass \hat{U} bzw. U auch das Skalarprodukt invariant lassen. Dann gilt für das Skalarprodukt aus $|\Phi\rangle$ und $|\Psi\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \Phi|\Psi \rangle &= \langle \hat{U}\Phi|\hat{U}\Psi \rangle = \langle \Phi|\underbrace{\hat{U}^\dagger \hat{U}}_{\mathbb{1}}|\Psi \rangle = \langle \Phi|\Psi \rangle , \\ \text{denn} \\ |a\rangle &= \hat{U}|\Phi\rangle = |\hat{U}\Phi\rangle , \quad |b\rangle = \hat{U}|\Psi\rangle = |\hat{U}\Psi\rangle \quad \Rightarrow \\ \langle a|b \rangle &= \langle \hat{U}\Phi|\hat{U}\Psi \rangle = \langle \Phi|\hat{U}^\dagger \hat{U}|\Psi \rangle = \langle \Phi|\Psi \rangle . \quad \square \end{aligned}$$

- Daraus folgt

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = U^\dagger U = \mathbb{1} \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger = U^{-1} , \quad \hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1} .$$

- Damit ist U stets invertierbar und regulär.
- Inverse und Produkt unitärer Matrizen (Operatoren) sind unitär.
- Der Betrag der Determinante von U ist stets

$$|\det U| = 1 .$$

- Unitär im Komplexen entspricht orthogonal im Reellen, denn Zeilen und Spalten unitärer Matrizen (Operatoren) sind orthonormiert. Mit der unitären Matrix $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und der orthogonalen Matrix $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt das

$$U^\dagger U = U^{-1} U = \mathbb{1} \quad \longleftrightarrow \quad O^T O = O^{-1} O = \mathbb{1} .$$

- $|u_i\rangle$ seien die Eigenzustände bezüglich \hat{U} und $\lambda_i \in \mathbb{C}$ die zugehörigen Eigenwerte. Aus der entsprechenden Eigenwertgleichung

$$\hat{U}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle$$

erhalten wir das Skalarprodukt (gleicher Zeilen oder gleicher Spalten)

$$\begin{aligned} \langle \hat{U}u_i | \hat{U}u_i \rangle &= \langle u_i | U^\dagger U | u_i \rangle = \langle u_i | u_i \rangle = 1 \\ &= \langle \lambda_i u_i | \lambda_i u_i \rangle = \lambda_i^* \lambda_i \langle u_i | u_i \rangle = \langle u_i | u_i \rangle = 1 \\ \Rightarrow \lambda_i^* \lambda_i &= |\lambda_i|^2 = 1. \end{aligned}$$

Das Betragsquadrat jedes Eigenwerts λ_i des unitären Operators \hat{U} bzw. der unitären Matrix U ist gleich 1.

6.2 Unitäre Transformation

Nach: Christian B. Lang und Norbert Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*, Hochschultaschenbuch, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1998, Seite 430 und Seite 431.

Bei der unitären Transformation wird durch eine unitäre Matrix (einen unitären Operator) ein normerhaltender Darstellungswechsel bewirkt. Die unitäre Transformation ändert also das Basissystem im Vektorraum z. B. im Sinne einer Drehung oder Spiegelung. Die Orthogonalitätseigenschaften des Basissystems bleiben dabei erhalten.

Analog zu einer Drehmatrix vermittelt so ein unitärer Operator \hat{U} die unitäre Transformation zwischen den zwei verschiedenen Orthonormalbasen $\{|a_i\rangle\}$ und $\{|b_i\rangle\}$ gemäß

$$\hat{U}|a_i\rangle = |b_i\rangle \quad \longleftrightarrow \quad \langle b_i| = \langle a_i| \hat{U}^\dagger. \quad (6.1)$$

Die Matrixelemente des unitären Operators \hat{U} (s. Matrixdarstellung von Operatoren) sind damit

$$\langle a_i | \hat{U} | a_j \rangle = \langle a_i | b_j \rangle = U_{ij}.$$

Die Umkehroperation von (6.1) ist

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} | a_i \rangle = \hat{U}^\dagger | b_i \rangle = | a_i \rangle.$$

Ein Vektor $|v\rangle$ hat in den beiden verschiedenen Orthonormalbasen $\{|a_i\rangle\}$ und $\{|b_i\rangle\}$ die verschiedenen Komponentendarstellungen

$$\sum_i \alpha_i |a_i\rangle = |v\rangle \equiv |\widetilde{v}\rangle = \sum_i \beta_i |b_i\rangle.$$

Der Darstellungswechsel des Vektors $|v\rangle$ von der einen in die andere Orthonormalbasis mittels unitärer Transformation erfolgt in Komponentenschreibweise wie folgt:

$$\begin{aligned} \beta_j = \langle b_j | v \rangle &= \langle b_j | \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \\ &= \sum_i \alpha_i \langle b_j | a_i \rangle \\ \beta_j &= \sum_i U_{ji}^* \alpha_i. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Für die zu den U_{ij} adjungierten Matrixelementen haben wir dabei U_{ji}^* geschrieben, weil für die zu (U_{ij}) adjungierte Matrix $(U_{ij})^\dagger = (U_{ji})^* = (U_{ji}^*)$ gilt. Die Matrixelemente U_{ji}^* erhalten wir aus den Matrixelementen U_{ij} wie folgt:

$$\begin{aligned} U_{ij} &= \langle a_i | b_j \rangle && \text{mit Zeilenindex } i \text{ und Spaltenindex } j \\ \Rightarrow \langle a_i | b_j \rangle^\dagger &= \langle a_i | b_j \rangle^* = \langle b_j | a_i \rangle \\ \Rightarrow \langle b_j | a_i \rangle &= U_{ji}^* && \text{mit Zeilenindex } j \text{ und Spaltenindex } i . \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ist (6.2)

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \vdots \end{pmatrix} =: |\widetilde{v}\rangle = \widehat{U}^\dagger |v\rangle := U^\dagger \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

Unitäre Transformation einer Matrix bzw. eines Operators

Auch die Darstellung einer Matrix bzw. eines Operators ändert sich bei einem Basiswechsel. Betrachten wir also die unitäre Transformation der Matrixelemente A_{kl} , dargestellt in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$, in die Matrixelemente \widetilde{A}_{ij} , dargestellt in der VON-Basis $\{|b_i\rangle\}$. Dafür erinnern wir an die Matrixdarstellung

$$A = (A_{kl}) = \sum_{kl} |a_k\rangle \underbrace{\langle a_k | \hat{A} | a_l \rangle}_{A_{kl}} \langle a_l| = \sum_{kl} |a_k\rangle A_{kl} \langle a_l|$$

eines Operators \hat{A} in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ (siehe Abschnitt 2.3). Mit (6.1) und mit den Komponenten von U und A erhalten wir:

$$\begin{aligned} A_{kl} &= \langle a_k | A | a_l \rangle = \langle b_k | \underbrace{U^\dagger A U}_{= \widetilde{A}} | b_l \rangle \Rightarrow \\ &\widetilde{A} = U^\dagger A U \Rightarrow \end{aligned}$$

in Komponentendarstellung:

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{ij} \text{ in Basis } \{|b_i\rangle\} &\longleftarrow A_{kl} \text{ in Basis } \{|a_i\rangle\} , \\ \widetilde{A}_{ij} &= \sum_{kl} U_{kl}^\dagger A_{kl} U_{lj} , \\ \widetilde{A}_{ij} &= \sum_{kl} \langle b_i | a_k \rangle A_{kl} \langle a_l | b_j \rangle = \sum_{kl} \langle b_i | a_k \rangle \underbrace{\langle a_k | A | a_l \rangle}_{A_{kl}} \langle a_l | b_j \rangle \end{aligned}$$

mit $U_{lj} = \langle a_l | b_j \rangle$ und $U_{kl}^\dagger = \langle b_i | a_k \rangle$.

$U_{lj} = \langle a_l | b_j \rangle$, also $|b_j\rangle$ in $|a_l\rangle$, ist die Projektion von $|b_j\rangle$ auf $|a_l\rangle$. Analog ist $U_{ik}^\dagger = \langle b_i | a_k \rangle = (\langle a_k | b_i \rangle)^*$ die Projektion von $|b_i\rangle^*$ auf $|a_k\rangle^*$.

In Matrixschreibweise gilt also

$$U^\dagger AU = \tilde{A}.$$

Dies entspricht dem basisfreien Operatorenprodukt

$$\hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} = \tilde{\hat{A}}.$$

Die unitäre Transformation von Polynomen $(A + B)$ erfolgt durch

$$\widetilde{(A + B)} = U^\dagger(A + B)U = U^\dagger(AU + BU) = U^\dagger AU + U^\dagger BU = \tilde{A} + \tilde{B}$$

und von Potenzreihen $(A \cdot B)$ durch

$$\widetilde{(A \cdot B)} = U^\dagger(A \cdot B)U = U^\dagger(A \cdot UU^\dagger \cdot B)U = U^\dagger AU \cdot U^\dagger BU = \tilde{A} \cdot \tilde{B}.$$

Merke!

Die unitäre Transformation von der Basis $\{|a_i\rangle\}$ in die Basis $\{|b_i\rangle\}$ erfolgt durch

$$\hat{U}|a_i\rangle = |b_i\rangle$$

$$\text{mit der Umkehroperation } |a_i\rangle = \hat{U}^\dagger|b_i\rangle.$$

Die unitäre Transformation eines Vektors $|v\rangle$ erfolgt durch

$$\hat{U}^\dagger|v\rangle = \widetilde{|v\rangle}$$

$$\text{mit der Umkehroperation } |v\rangle = U\widetilde{|v\rangle}.$$

Die unitäre Transformation einer Matrix A bzw. eines Operators \hat{A} erfolgt durch

$$U^\dagger AU = \tilde{A} \iff \hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} = \tilde{\hat{A}}$$

$$\text{mit der Umkehroperation } A = U\tilde{A}U^\dagger \iff \hat{A} = \hat{U}\tilde{\hat{A}}\hat{U}^\dagger.$$

Dabei ist $(A_{ij}) = A$ die zum Operator \hat{A} gehörende und $(\tilde{A}_{ij}) = \tilde{A}$ die zum Operator $\tilde{\hat{A}}$ gehörende Matrix. $U(\dots)U^\dagger$ ist die zu $U^\dagger(\dots)U$ inverse Operation.

6.3 Diagonalisierung von Matrizen (Operatoren)

Nach: Christian B. Lang und Norbert Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*, Hochschultaschenbuch, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1998, Seite 418 und Seite 419.

In diesem Abschnitt folgen wir im Wesentlichen der Argumentation von Lang und Pucker (s. Literaturhinweis). Wie wir in unseren bisherigen Betrachtungen über den Umgang mit Matrizen und Operatoren unter Berücksichtigung der Matrixdarstellung von Operatoren feststellen konnten, lassen sich die Ergebnisse für Matrizen mühelos auf Operatoren übertragen. Deshalb gehen wir jetzt vereinfachend nur von einer Matrix A aus.

Diese Matrix A habe die spezielle Eigenschaft, dass ihre Eigenvektoren $|v_i\rangle$ orthogonal aufeinander stehen und gleichzeitig auch eine zu A passende VON-Basis $\{|v_i\rangle\}$ bilden. Dies gilt stets für *hermitesche* und folglich auch für *symmetrische reelle* Matrizen. Selbstverständlich erfüllen diese Basisvektoren (Eigenvektoren) $|v_i\rangle$ die Eigenwertgleichung

$$A|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle .$$

Wenn wir aus den orthonormierten Eigen- bzw. Basisvektoren $|v_i\rangle$ eine Matrix bilden derart, dass die Basisvektoren die Spalten der Matrix darstellen, so erhalten wir die *unitäre* Matrix U sinngemäß durch

$$U := (|v_1\rangle \quad |v_2\rangle \quad \cdots \quad |v_i\rangle \quad \cdots) ,$$

denn wegen der Orthonormalität der $|v_i\rangle$ gemäß $\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$ gilt

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} (v_1)_1^* & (v_1)_2^* & \cdots & (v_1)_j^* & \cdots \\ (v_2)_1^* & (v_2)_2^* & \cdots & (v_2)_j^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ (v_i)_1^* & (v_i)_2^* & \cdots & (v_i)_j^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v_1)_1 & (v_2)_1 & \cdots & (v_i)_1 & \cdots \\ (v_1)_2 & (v_2)_2 & \cdots & (v_i)_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ (v_1)_j & (v_2)_j & \cdots & (v_i)_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \mathbb{1} \quad (6.3)$$

Wie man sieht, sind die Elemente der Matrix U die Entwicklungskoeffizienten $(v_i)_j$ der Eigenvektoren $|v_i\rangle$ in einer anderen VON-Basis, z. B. $\{|a_j\rangle\}$:

$$|v_i\rangle = \sum_j \langle a_j|v_i\rangle |a_j\rangle = \sum_j (v_i)_j |a_j\rangle := \begin{pmatrix} (v_i)_1 \\ (v_i)_2 \\ \vdots \\ (v_i)_j \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

Wären die $|a_j\rangle$ selbst die Eigenvektoren zur Matrix A , hätte U die Gestalt einer Diagonalmatrix.

Jetzt multiplizieren wir U in (6.3) mit der Matrix A .¹ Entsprechend der Eigenwertgleichung

$$A|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle := \lambda_i \begin{pmatrix} (v_i)_1 \\ (v_i)_2 \\ \vdots \\ (v_i)_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i (v_i)_1 \\ \lambda_i (v_i)_2 \\ \vdots \\ \lambda_i (v_i)_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

bezüglich der Eigenvektoren (Spalten) $|v_i\rangle$ von U gilt für die Elemente der resultierenden Matrix $U^\dagger A U$, d. h. für „Zeile k von U^\dagger mal λ_i mal Spalte i von U “

$$\sum_j (v_k)_j^* \lambda_i (v_i)_j = \lambda_i \sum_j (v_k)_j^* (v_i)_j = \lambda_i \delta_{ki} ,$$

¹Die Multiplikation der Matrix U mit der Matrix A entspricht der Wirkung des Operators \hat{A} auf den unitären Operator \hat{U} .

sodass

$$U^\dagger A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & \\ & 0 & & & \ddots \end{pmatrix} = \Lambda .$$

Die Hauptdiagonalelemente der Diagonalmatrix Λ sind die Eigenwerte der Matrix A .

Damit haben wir ein Verfahren zur Diagonalisierung von hermiteschen bzw. symmetrischen reellen Matrizen A (Operatoren \hat{A}) gefunden:

1. Wir bilden die orthonormierten Eigenvektoren $|v_i\rangle$ zu A (zu \hat{A}).
2. Diese Eigenvektoren bilden die Spalten der unitären Matrix U . Auf die Reihenfolge der Eigenvektoren bzw. Spalten ist zu achten. Sie ist nicht beliebig, denn eine Vertauschung der Reihenfolge der Eigenvektoren $|v_i\rangle$ in U bewirkt eine entsprechende Vertauschung der Reihenfolge der Diagonalelemente λ_i in Λ .
3. Das Matrixprodukt $U^\dagger A U$ bewirkt dann die Diagonalisierung von A und liefert die Diagonalmatrix Λ , deren Hauptdiagonalelemente die Eigenwerte λ_i von A (von \hat{A}) sind.

Die Diagonalisierung einer Matrix ist äquivalent zur Bestimmung ihrer Eigenwerte und Eigenvektoren.

Beispiel

Betrachten wir die hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3i \\ 3i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihre Eigenwerte sind

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4 + \sqrt{16 + 9} = 9, \\ \lambda_2 &= 4 - \sqrt{16 + 9} = -1, \end{aligned}$$

also erwartungsgemäß reell. Die (normierten) Eigenvektoren zu A sind

$$\begin{aligned} |v_1\rangle_{(\lambda_1)} &:= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix}, \\ |v_2\rangle_{(\lambda_2)} &:= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$|v_1\rangle$ und $|v_2\rangle$ sind tatsächlich orthogonal, denn

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix}^\dagger \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} i \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} (-3i + 3i) = 0.$$

Die Eigenvektoren sind die Spalten der unitären Matrix $U = \left(|v_1\rangle \ |v_2\rangle \right)$, die A wie folgt diagonalisiert:

$$U^\dagger A U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-i}{\sqrt{10}} \\ \frac{-i}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -3i \\ 3i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} \\ \frac{i}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \Lambda.$$

Die Umkehroperation dazu ist

$$U \Lambda U^\dagger = U (U^\dagger A U) U^\dagger = U U^\dagger A U U^\dagger = \mathbb{1} A \mathbb{1} = A.$$

Eine Änderung der Reihenfolge der Eigenvektoren $|v_i\rangle$ in U bewirkt eine entsprechende Änderung der Reihenfolge der Diagonalelemente λ_i in Λ :

$$\begin{pmatrix} |v_2\rangle & |v_1\rangle \end{pmatrix} =: \check{U} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \Rightarrow \check{U}^\dagger A \check{U} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

7 Spur einer Matrix

- Die Spur einer Matrix A ist die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente. Für die Darstellung der Spur in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ gilt somit

$$\text{Sp}\{A\} = \sum_i \langle a_i | A | a_i \rangle = \sum_i A_{ii} .$$

- Die Spur einer Matrix ist unabhängig von der verwendeten VON-Basis (hier $\{|a_i\rangle\}$ und $\{|b_k\rangle\}$) von \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} \text{Sp}\{A\} &= \sum_i \langle a_i | A | a_i \rangle \\ &= \sum_i \sum_{k,l} \langle a_i | b_k \rangle \langle b_k | A | b_l \rangle \underbrace{\langle b_l | a_i \rangle}_{=1} \\ &= \sum_i \sum_{k,l} \underbrace{\langle b_l | a_i \rangle}_{=1} \langle a_i | b_k \rangle \langle b_k | A | b_l \rangle \\ &= \sum_{k,l} \langle b_l | \left(\underbrace{\sum_i |a_i\rangle \langle a_i|}_{=1} \right) | b_k \rangle \langle b_k | A | b_l \rangle \\ &= \sum_{k,l} \underbrace{\langle b_l | b_k \rangle}_{\delta_{kl}} \langle b_k | A | b_l \rangle \\ &= \sum_{k,l} \delta_{kl} \langle b_k | A | b_l \rangle \\ \text{Sp}\{A\} &= \sum_k \langle b_k | A | b_k \rangle . \quad \square \end{aligned}$$

- Die zyklische Invarianz der Spur:

Zunächst zeigen wir

$$\text{Sp}\{AB\} = \text{Sp}\{BA\} :$$

$$\begin{aligned} \text{Sp}\{AB\} &= \sum_i \langle a_i | AB | a_i \rangle = \sum_{i,k} \langle a_i | A | a_k \rangle \langle a_k | B | a_i \rangle \\ &= \sum_k \sum_i \langle a_k | B | a_i \rangle \langle a_i | A | a_k \rangle \\ &= \sum_k \langle a_k | BA | a_k \rangle = \text{Sp}\{BA\} . \quad \square \end{aligned}$$

Daraus folgt die zyklische Invarianz der Spur

$$\begin{aligned} \text{Sp}\{A \cdot BC\} &= \text{Sp}\{BC \cdot A\} \\ &= \text{Sp}\{B \cdot CA\} = \text{Sp}\{CA \cdot B\} \end{aligned}$$

und für die unitäre Transformation der Spur einer Matrix A

$$\text{Sp}\{\tilde{A}\} = \text{Sp}\{U^\dagger A U\} = \text{Sp}\{\underbrace{U U^\dagger}_{=1} A\} = \text{Sp}\{A\} .$$

•

$$\text{Sp}\{AB\} = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ji} \neq \text{Sp}\{A\} \cdot \text{Sp}\{B\} = \sum_i A_{ii} \cdot \sum_j B_{jj} .$$

• Spur des dyadischen Produkts

$$D = |u\rangle\langle v| , \quad |u\rangle \text{ orthogonal zu } |v\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle = 0 :$$

$$\begin{aligned} \text{Sp}\{D\} &= \sum_i \langle a_i|u\rangle \langle v|a_i\rangle \\ &= \sum_i \langle v|a_i\rangle \langle a_i|u\rangle = \langle v| \underbrace{\sum_i |a_i\rangle\langle a_i|}_{=1} |u\rangle \end{aligned}$$

$$\text{Sp}\{D\} = \langle v|u\rangle = 0 .$$

Veranschaulichendes Beispiel:

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Sp}\{D\} = 0 .$$

8 Tabelle: Quadratische Matrizen

A reell	A komplex	Eigenschaften
normal: $AA^T = A^T A$	normal: $AA^\dagger = A^\dagger A$	
symmetrisch: $A = A^T$	hermitesch: $A = A^\dagger$	normal, selbstadjungiert
orthogonal: $A^T = A^{-1}$ $\Rightarrow AA^T = \mathbb{1}$	unitär: $A^\dagger = A^{-1}$ $\Rightarrow AA^\dagger = \mathbb{1}$	normal, Drehmatrizen

9 Messen und Messproblem in der Quantenmechanik

Ein physikalisches System befinde sich vor dem Messvorgang in einem quantenmechanischen Zustand, den wir hier den *ursprünglichen Zustand* nennen wollen. Dieser wird beschrieben durch den normierten Zustandsvektor $|\Psi\rangle$ oder ggf. durch die normierte Zustandsfunktion bzw. Wellenfunktion Ψ . Wie wir im Folgenden sehen werden, ist der Zustand $|\Psi\rangle$ im Allgemeinen kein Eigenzustand zu einem Operator, sondern eine **Linearkombination von Eigenzuständen**.

Während des Messvorgangs „springt“ das System vom ursprünglichen Zustand $|\Psi\rangle$ oder ggf. von der ursprünglichen Wellenfunktion Ψ in einen nach der Messung bestehenden und von der Observablen abhängigen bzw. zum „Messoperator“ gehörenden **Eigenzustand**. Letzteren beschreiben wir durch einen entsprechenden Eigenvektor $|a_i\rangle$ oder ggf. durch eine entsprechende Eigenfunktion.

Ist der ursprüngliche Zustand bereits ein Eigenzustand, ändert sich dieser beim Messvorgang nicht und das Messergebnis ist mit Sicherheit der zugehörige Eigenwert (siehe Eigenwertgleichung).

Die durch die Messung bedingte instantane Reduktion des ursprünglichen Zustands auf einen zugehörigen Eigenzustand wird **Zustandsreduktion** und die durch die Messung bedingte instantane Änderung der Wellenfunktion wird **Kollaps der (ursprünglichen) Wellenfunktion** genannt.

Das **Messproblem** besteht in der Interpretation dieses Sachverhalts.

9.1 Observable, Messvorgang, Erwartungswert

Nach: Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 5/1, Quantenmechanik – Grundlagen*, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 130 bis Seite 137 und Seite 180 bis Seite 183.

Die zu messende physikalische bzw. quantenmechanische Größe bezeichnet man als **Observable**. Sie ist eine „quantendynamische Variable (Operator) mit direkt beobachtbaren, reellen Messwerten.“¹ Im Folgenden werden wir die basisfreien Operatoren zur besseren Unterscheidung mit einem Dach kennzeichnen wie z. B. beim Operator \hat{A} .

Eine **Messung** impliziert notwendigerweise die Wechselwirkung zwischen der Messapparatur und dem zu messenden System. Außerdem muss die Messapparatur zur Messung der Observablen geeignet sein. Mathematisch gesehen entspricht der Messvorgang der Anwendung eines linearen hermiteschen Operators \hat{A} auf einen Zustandsvektor (kurz Zustand) $|\Psi\rangle$ des Systems. In der Quantenmechanik lassen sich diese Operatoren \hat{A} als die Observablen identifizieren. Anders gesagt, die Operatoren werden auch als Observablen bezeichnet. Weiterhin bezeichnen wir im Folgenden die Eigenwerte von \hat{A} mit λ_i und die Eigenvektoren bezüglich \hat{A} mit $|a_i\rangle$. Letztere sollen eine vollständige Orthonormalbasis $\{|a_i\rangle\}$ in dem zu \hat{A} passenden Hilbert-Raum

¹Zitiert aus: Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 5/1, Quantenmechanik – Grundlagen*, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 137.

\mathcal{H} aufspannen. Weiterhin nehmen wir vereinfachend an, $|\Psi\rangle$ sei ein reiner Systemzustand. Warum $|\Psi\rangle$ ein **reiner Zustand** ist, werden wir verstehen, wenn wir im nächsten Abschnitt die gemischten Zustände kennenlernen.

Weil in der Quantenmechanik wegen der Heisenberg'schen Unschärferelation die Orte \vec{x} und die Impulse \vec{p} der Phasenraumpunkte $\vec{\pi} = (\vec{x}, \vec{p})$ nicht gleichzeitig scharf sein können, haben wir es in der Quantenmechanik mit Zustandsvektoren und Erwartungswerten zu tun. Zustandsvektoren sind im Allgemeinen Linearkombinationen von Eigenvektoren bezüglich einer Observablen. Bei der Messung einer Observablen an einem System, dessen Zustand durch einen Zustandsvektor beschrieben wird, resultiert ein (reeller) Eigenwert der Observablen. Durch die Messung hat folglich das System den zum gemessenen Eigenwert gehörenden Eigenzustand angenommen und der ursprüngliche Zustand des Systems ist vernichtet. Das Ergebnis der Einzelmessung ist in der Regel nicht vorhersagbar. Bestimmte Messwerte (Eigenwerte) realisieren sich bei der Messung mit einer zugehörigen bestimmten Wahrscheinlichkeit, die sich aus den Eigenfunktionen zur Observablen ergibt. Der quantenmechanische Mittelwert aus allen möglichen Messwerten unter Berücksichtigung ihrer Wahrscheinlichkeit heißt Erwartungswert.

Wir werden jetzt das mathematische Modell des quantenmechanischen Messvorgangs, d. h. der Messung der Observablen \hat{A} bzw. der Messung bezüglich des Operators \hat{A} am reinen Zustand

$$|\Psi\rangle = \sum_i \langle a_i | \Psi \rangle |a_i\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle = \sum_i \hat{P}_i |\Psi\rangle$$

entwickeln. Wie man sieht, ist dabei der Zustand $|\Psi\rangle$ **kein Eigenzustand** zum Operator \hat{A} . Die (normierten) Eigenzustände zum Operator \hat{A} sind nämlich die Basisvektoren $|a_i\rangle$, welche die VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ bilden. Der quantenmechanische Messvorgang erfolgt formal (nicht real!) in zwei Schritten, nämlich

1. Spektralzerlegung von $|\Psi\rangle$ und 2. Zustandsreduktion von $|\Psi\rangle$:

Spektralzerlegung des reinen Zustands $|\Psi\rangle$

Zu Beginn des Messvorgangs zerlegt die Messapparatur den Zustand $|\Psi\rangle$ in alle seine Komponenten $c_i |a_i\rangle$ parallel zu den Eigenzuständen (Eigenvektoren) $|a_i\rangle$ bezüglich \hat{A} . Die $c_i = \langle a_i | \Psi \rangle$, $c_i \in \mathbb{C}$, sind die Entwicklungskoeffizienten von $|\Psi\rangle$. Mathematisch betrachtet bewirkt hierbei der Operator \hat{A} diese Spektralzerlegung des Zustands $|\Psi\rangle$ wie folgt:

$$\hat{A}|\Psi\rangle = \sum_i \lambda_i \underbrace{\langle a_i | \Psi \rangle}_{c_i} |a_i\rangle = \sum_i \lambda_i \underbrace{|a_i\rangle \langle a_i |}_{\hat{P}_i} |\Psi\rangle, \quad (9.1)$$

$$\hat{A}|\Psi\rangle = \sum_i c_i \cdot \lambda_i |a_i\rangle = \sum_i \lambda_i \cdot \hat{P}_i |\Psi\rangle. \quad (9.2)$$

(9.1) ist eine Summe aus Vektoren, die alle parallel zu den Basisvektoren bzw. Eigenzuständen von \hat{A} verlaufen. $|\Psi\rangle$ ist also die **Linearkombination** aus den Vektoren $\langle a_i | \Psi \rangle |a_i\rangle$ gemäß der Entwicklung $|\Psi\rangle = \sum_i \langle a_i | \Psi \rangle |a_i\rangle$. Aus dem Vergleich von linker

und rechter Seite der Gleichung (9.1) entnehmen wir mit $\sum_i |a_i\rangle\langle a_i| = \mathbb{1}$

$$\hat{A} = \sum_i \lambda_i |a_i\rangle\langle a_i| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \\ & 0 & & & \ddots \end{pmatrix} = \text{Diagonalmatrix } (A_{ii})$$

mit den Matrixelementen $A_{ii} = \lambda_i$.

Dies ist die Spektraldarstellung des linearen hermiteschen Operators \hat{A} oder kurz das Spektrum von \hat{A} , also die Gesamtheit aller Eigenwerte λ_i von \hat{A} , dargestellt als Diagonalmatrix.

Zustandsreduktion von $|\Psi\rangle$

Jede Messung kann nur *einen* Wert ergeben. Deshalb wird der Messvorgang abgeschlossen, indem ein Eigenzustand $|a_i\rangle$ mit dem zugehörigen Eigenwert λ_i als Messwert aus dem Spektrum (9.2) „herausgefiltert“ wird. Mathematisch erfolgt diese Zustandsreduktion durch den Projektionsoperator $\hat{P}_i = |a_i\rangle\langle a_i|$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \hat{P}_i|\Psi\rangle &= |a_i\rangle\langle a_i| \sum_j \underbrace{\langle a_j|\Psi\rangle}_{c_j} |a_j\rangle \\ &= |a_i\rangle\langle a_i| \sum_j |a_j\rangle c_j \\ &= \sum_j |a_i\rangle \underbrace{\langle a_i|a_j\rangle}_{\delta_{ij}} c_j \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{P}_i|\Psi\rangle = c_i |a_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |a_i\rangle = \frac{\hat{P}_i|\Psi\rangle}{c_i}}.$$

Welcher der Eigenzustände $|a_i\rangle$ bei der Zustandsreduktion herausgefiltert und welcher zugehörige Eigenwert λ_i dabei gemessen wird, ist nicht vorhersagbar. Allerdings lassen sich die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der einzelnen Zustände $|a_i\rangle$ mit den zugehörigen Messwerten λ_i aus den Entwicklungskoeffizienten c_i exakt berechnen. Die Entwicklungskoeffizienten werden deshalb auch als Wahrscheinlichkeitsamplituden bezeichnet. Jede Einzelmessung ergibt nämlich mit der bestimmten, naturgegebenen **Wahrscheinlichkeit**²

$$p_i = c_i^* c_i = |c_i|^2 = \langle \Psi|a_i\rangle\langle a_i|\Psi\rangle = \langle \Psi|\hat{P}_i|\Psi\rangle = \|\hat{P}_i|\Psi\rangle\|^2$$

den zugehörigen Eigen- bzw. Messwert λ_i , sodass die Wahrscheinlichkeit, überhaupt einen Wert aus dem Eigenwertspektrum $\{\lambda_i\}$ der Observablen \hat{A} zu messen, erwartungsgemäß

$$\sum_i p_i = \sum_i c_i^* c_i = \sum_i |c_i|^2 = \sum_i \langle \Psi|a_i\rangle\langle a_i|\Psi\rangle = 1$$

ist.

² $\|\hat{P}_i|\Psi\rangle\|^2 = \langle \Psi|\underbrace{\hat{P}_i \cdot \hat{P}_i}_{=\hat{P}_i}|\Psi\rangle = \langle \Psi|\hat{P}_i|\Psi\rangle = |c_i|^2 = p_i \quad \square \quad \Rightarrow \quad |c_i| = \|\hat{P}_i|\Psi\rangle\|.$

Erwartungswert einer Observablen \hat{A}

Abschließend bilden wir noch den Erwartungswert der Observablen \hat{A} . In der Quantenmechanik wird der Mittelwert über die N Messwerte einer Messreihe bezüglich einer Observablen für $N \rightarrow \infty$ Erwartungswert genannt. Mit den

$$\text{Eigenwertgleichungen } \hat{A} |a_j\rangle = \lambda_j |a_j\rangle$$

hat \hat{A} den **Erwartungswert**

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle &= \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \Psi | a_i \rangle \langle a_i | \underbrace{\hat{A} | a_j \rangle}_{\lambda_j | a_j \rangle} \langle a_j | \Psi \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \Psi | a_i \rangle \langle a_i | \underbrace{\lambda_j | a_j \rangle}_{\lambda_j | a_j \rangle} \langle a_j | \Psi \rangle \\ &= \sum_{i,j} c_i^* \langle a_i | \lambda_j | a_j \rangle c_j \\ &= \sum_{i,j} c_i^* \lambda_j \underbrace{\langle a_i | a_j \rangle}_{\delta_{ij}} c_j \\ &= \sum_i c_i^* c_i \cdot \lambda_i = \sum_i |c_i|^2 \cdot \lambda_i \quad (9.3) \\ \langle \hat{A} \rangle &= \sum_i p_i \cdot \lambda_i . \end{aligned}$$

An (9.3) erkennt man, dass das Betragsquadrat $c_i^* c_i = |c_i|^2$ der Entwicklungskoeffizienten c_i die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der zugehörigen Messwerte λ_i ist. Damit wird deutlich, dass $\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$ tatsächlich der Erwartungswert der Observablen \hat{A} ist.

Im Fall **reiner Zustände** $|\Psi\rangle$ existieren *vollständige Informationen* über das durch Messungen seiner Observablen zu beschreibende System. Und dennoch treten die möglichen Messwerte λ_i nur mit einer bestimmten, **prinzipiell-quantenmechanischen**, aber exakt berechenbaren Wahrscheinlichkeit auf. Dieser Sachverhalt ist Ausdruck des *spezifisch-quantenmechanischen Indeterminismus*.

9.2 Gemischte Zustände

Nach: Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 6, Statistische Physik*, 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, Seite 103 und Seite 104.

Im Unterschied zu reinen Zuständen existieren bei den gemischten Zuständen $|\Phi\rangle$ nur *unvollständige Informationen* über das durch die Messung seiner Observablen \hat{A} zu beschreibende System. Unter dieser Bedingung befindet sich das System jeweils mit der Wahrscheinlichkeit w_n in einem der reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Diese angenommenen reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$ seien orthonormiert, aber *nicht* notwendigerweise die Eigenzustände zur Observablen \hat{A} . Die Eigenzustände $|a_i\rangle$ bezüglich \hat{A} bilden die VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$.

Die Wahrscheinlichkeiten w_n sind hier, z. B. durch äußere Einflüsse bzw. Messfehler bedingt, rein klassisch-statistischer und nicht grundsätzlicher (prinzipieller) Natur. Sie resultieren also aus der Unvollständigkeit der Information und wären prinzipiell vermeidbar – im Gegensatz zu den prinzipiell-quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten infolge des spezifisch-quantenmechanischen Indeterminismus.

Ein gemischter, normierter Zustand $|\Phi\rangle$ werde also repräsentiert von der Gesamtheit der reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$ jeweils mit ihrer statistischen Wahrscheinlichkeit w_n , sodass für den Erwartungswert von \hat{A} gilt:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{A} \rangle &= \langle \Phi | \hat{A} | \Phi \rangle = \sum_n w_n \langle \Psi_n | \hat{A} | \Psi_n \rangle \\
 &= \sum_n w_n \sum_{i,j} \underbrace{\langle \Psi_n | a_i \rangle}_{c_{in}^*} \langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle \underbrace{\langle a_j | \Psi_n \rangle}_{c_{jn}} \\
 &= \sum_n w_n \sum_{i,j} c_{in}^* c_{jn} \langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle \\
 &\quad \text{mit } \langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle = \langle a_i | \lambda_j | a_j \rangle = \lambda_j \langle a_i | a_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij} \\
 &\quad \Rightarrow \langle a_i | \hat{A} | a_i \rangle = \lambda_i \\
 &= \sum_n w_n \sum_i |c_{in}|^2 \lambda_i \\
 &= \sum_i \lambda_i \cdot \sum_n w_n \cdot |c_{in}|^2 \\
 &= \sum_i \lambda_i \cdot \underbrace{\sum_n w_n \cdot p_{in}}_{W_i} \\
 \langle \hat{A} \rangle &= \sum_i W_i \cdot \lambda_i \\
 &\quad \text{oder} \\
 \langle \hat{A} \rangle &= \sum_i W_i \langle a_i | \hat{A} | a_i \rangle .
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit

$$W_i = \sum_n w_n \cdot p_{in} ,$$

mit der die Messwerte λ_i des gemischten Zustands $|\Phi\rangle$ auftreten (*bei Messung am gemischten Zustand*), setzt sich also aus zwei verschiedenen Wahrscheinlichkeiten zusammen. Darin ist

$$p_{in} = |c_{in}|^2 = |\langle a_i | \Psi_n \rangle|^2$$

die prinzipiell-quantenmechanische Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Messwertes λ_i bezüglich der reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$ (*bei Messung am reinen Zustand*) und die w_n sind die klassisch-statistischen Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$.

Entsprechend beinhaltet der Erwartungswert $\langle \hat{A} \rangle$ der Observablen \hat{A} in einem gemischten Zustand zwei verschiedene Mittelungen.

Die erste Mittelung ist die rein-quantenmechanische Mittelung:

- Sie ist prinzipieller Natur.
- Sie erfolgt direkt auf der Grundlage reiner Zustände bzw. der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsamplituden (Entwicklungskoeffizienten)
 $c_{in} \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow$
- Die daraus resultierenden Zustände können miteinander interferieren.

Die zweite Mittelung ist die klassische Mittelung:

- Sie ist praktischer Natur. Die diesbezüglichen Abweichungen vom Mittelwert wären im Prinzip durch den Ausschluss von Messfehlern vermeidbar.
- Sie „greift dagegen direkt Erwartungswerte und nicht Zustände an“³, erfolgt also auf der Grundlage der klassisch-statistischen Wahrscheinlichkeiten
 $w_n \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$
- Die Folge davon ist, „dass die verschiedenen reinen Zustände $|\Psi_m\rangle$ des Gemisches nicht miteinander interferieren. Der gemischte Zustand resultiert also aus einer inkohärenten Superposition von reinen Zuständen.“³

9.3 Der statistische Operator (Dichtematrix)

Nach:

Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 5/1, Quantenmechanik – Grundlagen*, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 189 bis Seite 194
 und

Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 6, Statistische Physik*, 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005, Seite 104 bis Seite 106.

Von besonderer Bedeutung für die Bestimmung der Erwartungswerte und für die Quantenstatistik ist der statistische Operator

$$\hat{\rho} = \sum_n w_n |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n|,$$

³Zitiert aus: Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 5/1, Quantenmechanik – Grundlagen*, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 191.

der auch kurz Dichtematrix genannt wird. Die Zustände $|\Psi_n\rangle$ seien die gleichen wie im Abschnitt 9.2, also reine, orthonormierte Zustandsvektoren gemäß $\langle\Psi_m|\Psi_n\rangle = \delta_{mn}$, aber nicht notwendigerweise Eigenzustände zum Operator \hat{A} . Wir leiten $\hat{\rho}$ aus dem quantenmechanischen Erwartungswert der Observablen bzw. des Operators \hat{A} in einem gemischten Zustand $|\Phi\rangle$ her, d. h. für ein statistisches Ensemble. Der gemischte Zustand $|\Phi\rangle$ wird repräsentiert durch die reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$, die jeweils mit ihrer klassisch-statistischen Wahrscheinlichkeit w_n auftreten. Die reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$ können entwickelt werden nach den Eigenzuständen $|a_i\rangle$ zum Operator \hat{A} . Bezüglich der reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$ treten die zu den Eigenzuständen $|a_i\rangle$ gehörenden Mess- bzw. Eigenwerte λ_i mit der prinzipiellen, quantenmechanischen Wahrscheinlichkeit $p_{in} = |c_{in}|^2$ auf.

Bei der Bestimmung des Erwartungswerts von \hat{A} im gemischten Zustand ermöglicht der statistische Operator $\hat{\rho}$ die Zusammenfassung der quantenmechanischen mit der klassischen Mittelungsprozedur und liefert so den Erwartungswert $\langle\hat{A}\rangle$ aus den Eigenwerten λ_i , die dann jeweils mit der kombinierten Wahrscheinlichkeit $W_i = \sum_n w_n \cdot p_{in}$ auftreten:

$$\begin{aligned}
 \langle\hat{A}\rangle &= \underbrace{\sum_n w_n}_{\text{klass. Mittel.}} \underbrace{\langle\Psi_n|\hat{A}|\Psi_n\rangle}_{\text{qm. Mittel.}} \\
 &= \sum_n w_n \sum_{i,j} \underbrace{\langle\Psi_n|a_i\rangle}_{\text{Zahl}} \underbrace{\langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle}_{\text{Zahl}} \underbrace{\langle a_j|\Psi_n\rangle}_{\text{Zahl}} \\
 &\quad \text{Zahlen sind beliebig vertauschbar} \quad \Rightarrow \\
 &= \sum_n w_n \sum_{i,j} \langle a_j|\Psi_n\rangle \langle\Psi_n|a_i\rangle \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \\
 &= \sum_{i,j} \langle a_j| \underbrace{\sum_n w_n |\Psi_n\rangle \langle\Psi_n|}_{\hat{\rho}} |a_i\rangle \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \\
 &= \sum_{i,j} \langle a_j|\hat{\rho}|a_i\rangle \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle = \sum_{i,j} \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \langle a_j|\hat{\rho}|a_i\rangle \\
 \langle\hat{A}\rangle &= \sum_j \langle a_j|\hat{\rho}\hat{A}|a_j\rangle = \sum_i \langle a_i|\hat{A}\hat{\rho}|a_i\rangle
 \end{aligned}$$

$$\langle\hat{A}\rangle = \text{Sp}\{\hat{\rho}\hat{A}\} = \text{Sp}\{\hat{A}\hat{\rho}\}$$

Eigenschaften des statistischen Operators

1. $\hat{\rho}$ ist hermitesch, weil der Projektionsoperator $|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$ hermitesch ist und die Wahrscheinlichkeiten w_n reell sind:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger .$$

2. Mit $\hat{A} = \mathbb{1}$ folgt

$$\text{Sp}\{\hat{\rho}\hat{A}\} = \text{Sp}\{\hat{\rho}\mathbb{1}\} = \sum_n w_n \langle\Psi_n|\Psi_n\rangle = \sum_n w_n = 1 ,$$

$$\boxed{\text{Sp}\{\hat{\rho}\} = 1} .$$

3. $\hat{\rho}$ bzw. der Erwartungswert von $\hat{\rho}$ sind nicht-negativ:

$$\begin{aligned} \langle\Phi|\hat{\rho}|\Phi\rangle &= \langle\Phi|\sum_n w_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|\Phi\rangle = \sum_n w_n \langle\Phi|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|\Phi\rangle \\ &= \sum_n w_n |\langle\Psi_n|\Phi\rangle|^2 \geq 0 . \quad \square \end{aligned}$$

4. $\hat{\rho}^2$ (Operatorquadrat) in gemischten Zuständen bzw. in gemischter Gesamtheit:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_n w_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| , \\ \hat{\rho}^2 &= \sum_{m,n} w_m w_n |\Psi_m\rangle\langle\Psi_m|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \\ &\quad \underbrace{\langle\Psi_m|\Psi_n\rangle}_{\delta_{mn}} \\ \hat{\rho}^2 &= \sum_n w_n^2 |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \\ \Rightarrow \text{Sp}\{\hat{\rho}^2\} &= \sum_n w_n^2 < \sum_n w_n = 1 , \end{aligned}$$

$$\boxed{0 < \text{Sp}\{\hat{\rho}^2\} < 1} .$$

5. $\hat{\rho}^2$ (Operatorquadrat) in reinen Zuständen bzw. in reiner Gesamtheit:

Der reine Zustand $|\Psi\rangle$ einer reinen Gesamtheit besitzt die klassisch-statistische Wahrscheinlichkeit $w_n = w = 1$, sodass

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\Psi\rangle\langle\Psi| , \\ \hat{\rho}^2 &= |\Psi\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle\langle\Psi| = \hat{\rho} \\ &\quad \underbrace{\langle\Psi|\Psi\rangle}_{=1} \\ \Rightarrow \text{Sp}\{\hat{\rho}^2\} &= \sum_n w_n^2 = w^2 = 1 , \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Sp}\{\hat{\rho}^2\} = 1} .$$

6. Die zeitliche Entwicklung von $\hat{\varrho}$ mit dem Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$, der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = i\hbar |\dot{\Psi}\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$$

und ihrer Adjungierten

$$-i\hbar \frac{d\langle\Psi|}{dt} = -i\hbar \langle\dot{\Psi}| = \langle\Psi|\hat{H} :$$

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\hat{\varrho}}(t) &= i\hbar \frac{d}{dt} \sum_n w_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \\ &= \sum_n w_n \overbrace{\left(i\hbar |\dot{\Psi}_n\rangle\langle\Psi_n| + i\hbar |\Psi_n\rangle\langle\dot{\Psi}_n| \right)}^{\text{durch Produktregel}} \\ &= \sum_n w_n \left(\hat{H} |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| - |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \hat{H} \right) \\ i\hbar \dot{\hat{\varrho}}(t) &= \hat{H} \hat{\varrho}(t) - \hat{\varrho}(t) \hat{H} \quad (\text{Kommutator}) . \end{aligned} \tag{9.4}$$

(9.4) ist die Von-Neumann-Gleichung

$$\boxed{\dot{\hat{\varrho}}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\varrho}(t)]} .$$

Die Von-Neumann-Gleichung ist das quantenmechanische Analogon zur Liouville-Gleichung der klassischen statistischen Mechanik.

10 Dirac-Formalismus

Nach: Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 5/1, Quantenmechanik – Grundlagen*, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 147 bis Seite 151.

Literaturtip: Cornelius C. Noack, *Hilbertraum–Kompendium für Physiker zum Gebrauch neben der Vorlesung*, Mathematik zur Quantentheorie, Universität Bremen, Institut für Theoretische Physik, 2003.

10.1 Übergang Hilbert-Vektor – Dirac-Vektor

Um von Anfang an Klarheit zu schaffen, werde schon an dieser Stelle folgendes festgestellt:

- **Hilbert-Vektoren** sind abzählbar, also diskret, und werden auch **eigentliche Zustandsvektoren** genannt.
- Hilbert-Vektoren lassen sich darstellen durch ihre Entwicklungskoeffizienten (Skalarprodukte) in einer abzählbaren (diskreten) VON-Basis, die den Hilbert-Raum aufspannt.
- Dirac-Vektoren sind nicht abzählbar, also kontinuierlich.
- **Dirac-Vektoren** sind keine Elemente des Hilbert-Raums. Sie werden entwickelt nach einer kontinuierlichen Basis und werden deshalb auch **uneigentliche Zustandsvektoren** genannt.
- Dirac-Vektoren sind auf δ -Funktionen normiert.
- Die Menge der eigentlichen Zustandsvektoren (Hilbert-Vektoren) und die Menge der uneigentlichen Zustandsvektoren (Dirac-Vektoren) bilden gemeinsam den **erweiterten Hilbert-Raum**.

Wir werden uns in diesem Abschnitt den Übergang von den (diskreten) Hilbert-Vektoren zu den (kontinuierlichen) Dirac-Vektoren erarbeiten. Dabei gehen wir von der Entwicklung des Hilbert-Vektors $|\Psi\rangle$ nach der VON-Basis $\{|v_i\rangle\}$ aus:

$$|\Psi\rangle = \sum_i |v_i\rangle \langle v_i | \Psi \rangle = \sum_i c_i \cdot |v_i\rangle = \sum_i \Psi_i \cdot |v_i\rangle, \quad c_i = \Psi_i = \langle v_i | \Psi \rangle.$$

Wie wir bereits festgestellt hatten, sind die Entwicklungskoeffizienten (Skalarprodukte bzw. skalaren Vektorkomponenten) Ψ_i die Wahrscheinlichkeitsamplituden und deren Betragsquadrat $|\Psi_i|^2$ die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten des Hilbert-Vektors $|\Psi\rangle$ bezüglich der Basisvektoren $|v_i\rangle$ mit $\sum_i |\Psi_i|^2 = 1$. Wenn wir die Wahrscheinlichkeitsamplituden Ψ_i bzw. deren Betragsquadrate $|\Psi_i|^2$ über den zugehörigen Basisvektoren z. B. in Form eines Histogramms auftragen, erhalten wir die diskrete Darstellung ihrer Verteilungsdichte in Abhängigkeit von den Basisvektoren (s. Abb. 10.1). Anders

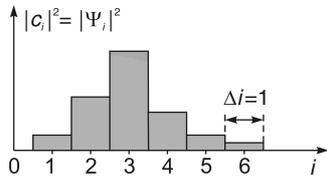


Abb. 10.1 Die Betragsquadrate $|\Psi_i|^2$ der Projektionen $\Psi_i = c_i$ des Zustandes $|\Psi\rangle$ auf die Basisvektoren $|v_i\rangle := i \in \mathbb{N}$ sind in Form eines Histogramms über den i aufgetragen. Ein Histogramm ist eine diskrete „Differentialdarstellung“ und repräsentiert die Verteilungsdichte. Es ist also die Darstellung der Differenzenquotienten $\frac{\Delta N_i}{\Delta x_i}$ über den x_i bzw. die Aufteilung von N_{ges} auf die Δx_i gemäß

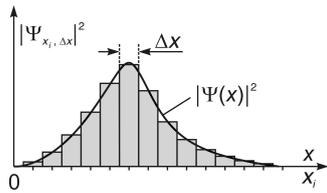
$$\sum_i \frac{\Delta N_i}{\Delta x_i} \cdot \Delta x_i = \sum_i \Delta N_i = N_{ges}.$$

Hierzu analog mit $|\Psi\rangle^2 = \sum_i |\Psi_i|^2 = 1$ und $\Delta i = 1$ ist

$$\sum_i \frac{|\Psi_i|^2}{\Delta i} \cdot \Delta i = \sum_i \frac{|\Psi_i|^2}{1} \cdot 1 = \sum_i |\Psi_i|^2 = 1.$$

gesagt, die diskrete Darstellung der Verteilungsdichte der Wahrscheinlichkeitsamplituden Ψ_i , d. h. die Aufteilung des Zustands $|\Psi\rangle$ auf die diskrete Basis $\{|v_i\rangle\}$ bzw. $\{|i\rangle\}$, entspricht der diskreten Darstellung der Verteilungsdichte der Wahrscheinlichkeiten $|\Psi_i|^2$ im Histogramm.

Abb. 10.2 Veranschaulichung des Übergangs von der diskreten Darstellung der Verteilungsdichte wie in Abb. 10.1 zur kontinuierlichen Verteilungsdichte gemäß



$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta N_i}{\Delta x_i} \cdot \Delta x_i = \int \frac{dN(x)}{dx} \cdot dx = \int f(x) \cdot dx = N_{ges}$$

mit der Analogie

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i \frac{|\Psi_{x_i, \Delta x}|^2}{\Delta x} \cdot \Delta x = \int |\Psi(x)|^2 \cdot dx = 1$$

und den Differentialquotienten $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Psi_{x_i, \Delta x}|^2}{\Delta x} = |\Psi(x_i)|^2$.

Was passiert, wenn wir die Basis $\{|i\rangle\}$ entsprechend $i = 1, 2, 3, \dots$ immer mehr verfeinern (s. Abb. 10.2) und die Intervalle $\Delta i = (i + 1) - i = 1$ schließlich gegen Null gehen lassen?¹ Für den Laufindex schreiben wir dann wegen der Verfeinerung nicht mehr i sondern x und an Stelle der Basisvektoren $|v_i\rangle$ schreiben wir $|v_{x, \Delta x}\rangle$, sodass zusammenfassend gilt

$$i = 1, 2, 3, \dots \text{ mit } \Delta i = 1 \quad \Rightarrow \quad |v_i\rangle \quad \longrightarrow$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < \Delta x < 1 \quad \Rightarrow \quad |v_{x, \Delta x}\rangle \quad \cdot$$

¹Im Fall diskreter Basisvektoren gilt auch bei einer Verfeinerung stets $\Delta i = (i + 1) - i = 1$. Gegen Null gehen können die Intervalle selbstverständlich nur im Fall kontinuierlicher „Basisvektoren“ z. B. auf der x -Achse. Diese kontinuierlichen „Basisvektoren“ zu konstruieren ist aber gerade das Ziel unserer Überlegungen.

Für die Entwicklungskoeffizienten bzw. skalaren Vektorkomponenten des Zustandsvektors $|\Psi\rangle$ erhalten wir damit

$$c_i = \Psi_i = \langle v_i | \Psi \rangle \quad \longrightarrow$$

$$c_{x, \Delta x} = \Psi_{x, \Delta x} = \langle v_{x, \Delta x} | \Psi \rangle$$

(10.1)

Analog zu einem Differenzenquotienten $\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}$ konstruieren wir uns jetzt den Differenzenquotienten aus der skalaren Vektorkomponente (10.1), nämlich

$$\frac{\langle v_{x, \Delta x} | \Psi \rangle}{\sqrt{\Delta x}}$$

Hierbei ist der Zähler $\langle v_{x, \Delta x} | \Psi \rangle$ eine bestimmte skalare Vektorkomponente $\Psi_{x, \Delta x}$ von $|\Psi\rangle$ bzw. die „Änderung von $|\Psi\rangle$ pro Basisvektor $|v_{x, \Delta x}\rangle$ “. Der Nenner $\sqrt{\Delta x}$ entspricht dem Intervall Δx , welches ein Basisvektor auf der x -Achse einnimmt. Sinngemäß resultiert also die Änderung von $|\Psi\rangle$ pro Wurzel aus der Änderung von x . Aus Gründen der Normierung verwenden wir hier im Nenner $\sqrt{\Delta x}$ und nicht Δx , was später noch deutlich werden wird.

Aus diesem Differenzenquotienten bilden wir den Differentialquotienten für Δx gegen Null:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\langle v_{x, \Delta x} | \Psi \rangle}{\sqrt{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\langle \frac{v_{x, \Delta x}}{\sqrt{\Delta x}} \middle| \Psi \right\rangle = \left\langle \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v_{x, \Delta x}}{\sqrt{\Delta x}} \middle| \Psi \right\rangle. \quad (10.2)$$

Hierbei konnten wir $|\Psi\rangle$ aus dem Quotienten herausziehen, weil $|\Psi\rangle$ basisfrei und unabhängig von x ist. Der Differentialquotient (10.2) ist eine Verteilungsfunktion, abhängig von x , die wir wie folgt notieren:

$$\Psi(x) = \left\langle \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v_{x, \Delta x}}{\sqrt{\Delta x}} \middle| \Psi \right\rangle = \langle v'_x | \Psi \rangle$$

Der Strichindex steht hier für die erste Ableitung und

$$|v'_x\rangle = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|v_{x, \Delta x}\rangle}{\sqrt{\Delta x}} = \frac{|v_{x, dx}\rangle}{\sqrt{dx}} \quad (10.3)$$

ist der formale **Dirac-Vektor**, welcher der *ersten Ableitung* der diskreten Basisvektoren $|v_i\rangle$ nach x entspricht und eine kontinuierliche Basis repräsentiert. Die *kontinuierliche Funktion* $\Psi(x)$ entspricht der *ersten Ableitung* der (diskreten) Entwicklungskoeffizienten $\langle v_i | \Psi \rangle$ nach x . $\Psi(x)$ nennt man die Wahrscheinlichkeitsamplitude und $|\Psi(x)|^2$, also das Betragsquadrat der Wahrscheinlichkeitsamplitude, die Wahrscheinlichkeitsdichte. Folglich erhält man durch Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x)|^2$ über den gesamten „ x -Raum“ die Wahrscheinlichkeit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int \Psi^*(x) \cdot \Psi(x) dx = \int \Psi(x) \cdot \Psi^*(x) dx = 1$$

für eine mögliche Realisierung von $|\Psi\rangle$ beispielsweise in Gestalt eines Messwertes.

10.2 Entwicklungssatz, Orthonormalität, Vollständigkeit und Skalarprodukt in kontinuierlicher Basis

Der (diskrete) Entwicklungssatz

$$|\Psi\rangle = \sum_i |v_i\rangle \langle v_i | \Psi\rangle$$

erhält mit $\langle v_i | \Psi\rangle \longrightarrow \langle v_{x, \Delta x} | \Psi\rangle$ die Form

$$|\Psi\rangle = \sum_i |v_{x, \Delta x}\rangle \langle v_{x, \Delta x} | \Psi\rangle$$

und für $\Delta x \rightarrow 0$

$$|\Psi\rangle = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i |v_{x, \Delta x}\rangle \langle v_{x, \Delta x} | \Psi\rangle . \quad (10.4)$$

Der formale Dirac-Vektor (10.3) liefert nach Äquivalenzumformung

$$|v'_x\rangle = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |v_{x, \Delta x}\rangle}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\Delta x}} \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |v_{x, \Delta x}\rangle = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\Delta x} \cdot |v'_x\rangle \implies \quad (10.5)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |v_{x, \Delta x}\rangle \langle v_{x, \Delta x} | = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{\Delta x} \cdot |v'_x\rangle \langle v'_x | \cdot \sqrt{\Delta x} ,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |v_{x, \Delta x}\rangle \langle v_{x, \Delta x} | = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |v'_x\rangle \langle v'_x | \cdot \Delta x . \quad (10.6)$$

Einsetzen von (10.6) in (10.4) ergibt die Riemann-Summe

$$|\Psi\rangle = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_x |v'_x\rangle \langle v'_x | \Psi\rangle \cdot \Delta x ,$$

die man als Integral, den **Entwicklungssatz** für den Hilbert-Vektor $|\Psi\rangle$ bezüglich einer kontinuierlichen Basis, schreiben kann:

$$\boxed{|\Psi\rangle = \int |v'_x\rangle \langle v'_x | \Psi\rangle dx = \int |v'_x\rangle \Psi(x) dx} . \quad (10.7)$$

Die Multiplikation von links mit dem bra-Vektor $\langle v'_{x'} |$ liefert

$$\langle v'_{x'} | \Psi\rangle = \int \langle v'_{x'} | v'_x\rangle \langle v'_x | \Psi\rangle dx$$

und zeigt für beliebige $|\Psi\rangle$

$$\langle v'_{x'} | \Psi\rangle = \int \delta(x - x') \langle v'_x | \Psi\rangle dx .$$

Wie wir sehen, sind die formalen Dirac-Vektoren $|v'_x\rangle$ über die δ -Funktion

$$\langle v'_{x'} | v'_x \rangle = \delta(x - x') = \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{für } x = x' , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (10.8)$$

als Orthonormierungsbedingung (**Orthonormalitätsbedingung**) gemäß

$$\int \langle v'_{x'} | v'_x \rangle dx = \int \delta(x - x') dx = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x' \text{ im Integrationsbereich liegt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auf 1 normiert. Die formalen Dirac-Vektoren leisten also nur an der Stelle $x = x'$ unter dem Integral den Beitrag 1, sonst, für $x \neq x'$, aber den Beitrag 0. Das bedeutet, dass die formalen Dirac-Vektoren nur unter dem Integral das Analogon zu den Hilbert-Basis-Vektoren darstellen. Dies erkennt man auch daran, dass die formalen Dirac-Vektoren selbst gemäß der Orthonormalitätsbedingung (10.8) an der Stelle $x = x'$ die Norm $\sqrt{\langle v'_{x'} | v'_{x'} \rangle} \rightarrow \infty$, also eine unendliche „Länge“ besitzen.

Die Herleitung der Vollständigkeitsrelation für eine kontinuierliche Basis beginnen wir mit dem Skalarprodukt eines orthonormierten Hilbert-Vektors $|\Psi\rangle$ mit sich selbst in der (diskreten) VON-Basis $\{|v_i\rangle\}$:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_i \langle \Psi | v_i \rangle \langle v_i | \Psi \rangle = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i |v_i\rangle \langle v_i| = \mathbb{1} \quad (10.9)$$

Diese Darstellung bzw. dieses Ergebnis ist nur dann möglich, wenn die Basis $\{|v_i\rangle\}$ den zu $|\Psi\rangle$ gehörenden Hilbert-Raum \mathcal{H} *vollständig* aufspannt. Deshalb ist (10.9) die Vollständigkeitsrelation bezüglich der diskreten VON-Basis $\{|v_i\rangle\}$.

Im Fall einer kontinuierlichen Basis gehen wir aus vom Entwicklungssatz (10.7) :

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \int |v'_x\rangle \langle v'_x | \Psi \rangle dx \\ &= \underbrace{\int dx |v'_x\rangle \langle v'_x |}_{=1} |\Psi\rangle \end{aligned} \quad (10.10)$$

Aus (10.10) folgt die **Vollständigkeitsrelation** für eine kontinuierliche Basis mit der Einheitsmatrix bzw. dem Identitätsoperator $\mathbb{1}$:

$$\int |v'_x\rangle \langle v'_x | dx = \mathbb{1} \quad (10.11)$$

Aus den beiden basisfreien Zustandsvektoren $|\Phi\rangle$ und $|\Psi\rangle$ erhalten wir in der diskreten VON-Basis $\{|v_i\rangle\}$ das Skalarprodukt

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_i \underbrace{\langle \Phi | v_i \rangle}_{k_i^*} \underbrace{\langle v_i | \Psi \rangle}_{c_i} = \sum_i k_i^* c_i$$

und analog dazu in der kontinuierlichen Basis $\{|v'_x\rangle\}$ unter Verwendung der entsprechenden Vollständigkeitsrelation das äquivalente Skalarprodukt

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int \langle \Phi | v'_x \rangle \langle v'_x | \Psi \rangle dx = \int \Phi^*(x) \Psi(x) dx .$$

10.3 Darstellung des formalen Dirac-Vektors in kontinuierlicher Basis und sein Eigendifferential

Um Näheres über die Eigenschaften des formalen Dirac-Vektors zu erfahren, entwickeln zunächst den ket-Vektor $|v_{x, \Delta x}\rangle$ in der kontinuierlichen Basis gemäß (10.7). Dabei ist die Änderung der Strichindizierung von x zu beachten. Diese erfolgt zur besseren Unterscheidung der Integrationsvariablen in dem sich später ergebenden Doppelintegral:

$$|v_{x, \Delta x}\rangle = \int dx' |v'_{x'}\rangle \langle v'_{x'} | v_{x, \Delta x}\rangle = \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} dx' |v'_{x'}\rangle \underbrace{\langle v'_{x'} | v_{x, \Delta x}\rangle} . \quad (10.12)$$

Für das in (10.12) unterklammerte Skalarprodukt resultiert unter Berücksichtigung von (10.5)

$$\begin{aligned} \langle v'_{x'} | v_{x, \Delta x}\rangle &= \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \left\langle \frac{v_{x', \Delta x'}}{\sqrt{\Delta x'}} | v_{x, \Delta x}\rangle \right\rangle & (10.13) \\ &= \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x'}} \underbrace{\langle v_{x', \Delta x'} | v_{x, \Delta x}\rangle}_{\delta_{x'x}} \\ \langle v'_{x'} | v_{x, \Delta x}\rangle &= \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x'}} \delta_{x'x} . \end{aligned}$$

Die damit verdeutlichte Orthogonalität in (10.13) rechtfertigt die Festlegung der Integrationsgrenzen in (10.12). Für *hinreichend kleine*² $\Delta x'$ bzw. Δx und für $x' = x \Rightarrow \delta_{x'x} = 1$ wird das unterklammerte Skalarprodukt zu

$$\langle v'_{x'} | v_{x, \Delta x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$$

und lässt sich vor das Integral (10.12) ziehen:

$$|v_{x, \Delta x}\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} dx' |v'_{x'}\rangle = |ED(x)\rangle . \quad (10.14)$$

²Vereinfachend verzichten wir darauf, in den Integrationsgrenzen und im Radikanden für die hinreichend kleinen Δx bzw. $\Delta x'$ die Differentialnotation dx bzw. dx' zu verwenden. Man kommt auch ohne diese Umbenennung zum richtigen Ergebnis.

(10.14) heißt **Eigendifferential** des formalen Dirac-Vektors $|v'_x\rangle$.

Die (kontinuierlichen) formalen Dirac-Vektoren mit ihrer unendlichen Länge sind keine Elemente des Hilbert-Raums. Ihre Eigendifferentiale erfüllen jedoch die Hilbert-Raum-Axiome. Z. B. sind sie normiert:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{ED}(x) | \text{ED}(x) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} dx'' \langle v'_{x''} | \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} dx' |v'_{x'}\rangle \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} \int dx' dx'' \underbrace{\langle v'_{x''} | v'_{x'} \rangle}_{(10.8)} \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} \int dx' dx'' \delta(x'' - x') \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} dx' \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \cdot x \Big|_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} = \frac{(x + \frac{1}{2}\Delta x) - (x - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

$$\langle \text{ED}(x) | \text{ED}(x) \rangle = 1 . \quad \square$$

10.4 Darstellung von Zustandsvektoren und Operatoren in einer kontinuierlichen Basis

Nach: Torsten Fließbach, *Quantenmechanik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik III*, 4. Auflage, Elsevier Spektrum Akademischer Verlag, München, 2005, Seite 233 und Seite 234.

Analog zur Vektorrechnung im \mathbb{R}^3 ist der Kalkül der basisfreien Zustandsvektoren und Operatoren in \mathcal{H} bzw. der Dirac-Formalismus „leider“ abstrakt. Um physikalische Probleme bzw. physikalische Größen berechnen zu können, ist deshalb die algebraische Darstellung der Zustandsvektoren und Operatoren in einer zur Berechnung geeigneten Basis erforderlich. So müssen die basisfreien Zustandsvektoren in Funktionen überführt werden, die die Abhängigkeit z. B. von Energie, Impuls oder Ort zum Ausdruck bringen und zusammen mit den in der gleichen Basis dargestellten Operatoren die Berechnung dieser physikalischen Größen ermöglichen.³ Hierbei kommen uns die aus

³Vielleicht stellt sich an dieser Stelle die Frage, wozu man den abstrakten Dirac-Formalismus überhaupt braucht, wenn man am Ende die Berechnungen quantenmechanischer Probleme trotzdem in irgendeiner Darstellung durchführen muss. Tatsächlich sind viele Herleitungen und Zusammenhänge in abstrakter Form viel bequemer und übersichtlicher darstellbar. Ein einfaches, bekanntes Beispiel dafür ist die Beschreibung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators u. a. mit Hilfe des Erzeugungsoperators \hat{a}^\dagger und des Vernichtungsoperators \hat{a} .

dem *Korrespondenzprinzip* hervorgehenden *Ersetzungsregeln* (Korrespondenzregeln) zu Hilfe. Das Korrespondenzprinzip stellt den Zusammenhang her zwischen dem abstrakten Dirac-Formalismus und der Wellenmechanik von Erwin Schrödinger (1887 – 1961), insbesondere der von ihm postulierten und nach ihm benannten Schrödinger-Gleichung.

Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) = E\Psi(\vec{r}, t) \quad (10.15)$$

ist im weitesten Sinne grundlegend für die Energie-Verhältnisse in (quantenmechanischen) Teilchensystemen. Mit dem Hamilton-Operator in Ortsdarstellung

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V = H_{\text{klassisch}}$$

erhält sie die Form

$$H\Psi(\vec{r}, t) = E\Psi(\vec{r}, t),$$

woran wir die Ersetzungsregeln für die Energie E und den Impuls \vec{p} ablesen können. In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten Ersetzungsregeln übersichtlich dargestellt:

basisfrei		Ortsdarstellung	Impulsdarstellung
\hat{H}	Hamilton-Operator	$\rightarrow H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}, t)$	
E	Energie	$\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$	
\hat{p}	Impulsoperator	$\rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$	p
$\hat{\vec{p}}$	Impulsoperator	$\rightarrow -i\hbar\nabla_{\vec{r}}$	\vec{p}
\hat{x}	Ortsoperator	$\rightarrow x$	$i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$
$\hat{\vec{r}}$	Ortsoperator	$\rightarrow \vec{r}$	$i\hbar\nabla_{\vec{p}}$
$\mathbf{1}$	Identitätsoperator	$= \int d^3r \vec{r}\rangle\langle\vec{r} $	$\int d^3p \vec{p}\rangle\langle\vec{p} $
\hat{O}	Operator	$\rightarrow \langle x \hat{O} x'\rangle = \delta(x-x')O(x')$	

Es fällt bei den Ersetzungsregeln auf, dass die Wirkung des Ortsoperators in Ortsdarstellung einfach nur in der Multiplikation mit x bzw. \vec{r} und die Wirkung des Impulsoperators in Impulsdarstellung einfach nur in der Multiplikation mit p bzw. \vec{p} besteht.

Anstelle der bisher allgemein im Dirac-Formalismus verwendeten (uneigentlichen) formalen Dirac-Vektoren $|v'_x\rangle$ verwenden wir jetzt, je nach Darstellung, die uneigentlichen Impuls- oder Ortseigenzustände. Die uneigentlichen Impulseigenzustände $|p\rangle$ bzw. $|\vec{p}\rangle$ bilden die kontinuierliche Basis $\{|p\rangle\}$ bzw. $\{|\vec{p}\rangle\}$ und die uneigentlichen Ortseigenzustände $|x\rangle$ bzw. $|\vec{r}\rangle$ bilden die kontinuierliche Basis $\{|x\rangle\}$ bzw. $\{|\vec{r}\rangle\}$.

Die Eigenwertgleichungen für den Orts- und für den Impulsoperator sind damit

$$\begin{aligned}\hat{r}|\vec{r}\rangle &= \vec{r}|\vec{r}\rangle, \\ \hat{p}|\vec{p}\rangle &= \vec{p}|\vec{p}\rangle\end{aligned}$$

und die Wahrscheinlichkeitsamplituden für einen basisfreien Zustand $|\Psi\rangle$ in Orts- und in Impulsdarstellung sind

$$\begin{aligned}\langle\vec{r}|\Psi\rangle &= \Psi(\vec{r}), \\ \langle\vec{p}|\Psi\rangle &= \Psi(\vec{p}).\end{aligned}$$

Warum zwischen einem basisfreien Operator \hat{O} allein und seiner Darstellung $O(x)$ nur eine Ersetzungsregel existiert und sich keine mathematische Gleichung herstellen lässt, wollen wir uns jetzt anschauen. Dabei gehen wir rekursiv vor und beginnen mit der Operatorgleichung, dargestellt in Abhängigkeit von der Größe x . Wenn x z. B. der Ort ist, dann wirkt der Operator \hat{O} in Form seiner Ortsdarstellung $O(x)$ auf eine Funktion $\Psi(x)$ und erzeugt dabei eine andere Funktion $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = O(x)\Psi(x). \quad (10.16)$$

Es handele sich hier nicht um den speziellen Fall einer Eigenwertgleichung! Dieser Gleichung entspricht im Dirac-Formalismus die abstrakte, basisfreie Gleichung

$$|\Phi\rangle = \hat{O}|\Psi\rangle. \quad (10.17)$$

(10.16) ist also die Ortsdarstellung von (10.17). Mit dem Identitätsoperator schreiben wir für (10.17)

$$|\Phi\rangle = \hat{O}\mathbf{1}|\Psi\rangle = \hat{O}\int dx' |x'\rangle\langle x'| |\Psi\rangle = \int dx' \hat{O}|x'\rangle\langle x'|\Psi\rangle. \quad (10.18)$$

Die Multiplikation von links mit dem bra-Vektor $\langle x|$, d. h. die Projektion von (10.18) auf $|x\rangle$ liefert

$$\begin{aligned}\langle x|\Phi\rangle = \Phi(x) &= \int dx' \langle x|\hat{O}|x'\rangle \langle x'|\Psi\rangle \\ &= \int dx' \underbrace{\langle x|\hat{O}|x'\rangle}_{\delta(x-x')} \Psi(x') \\ &= \int dx' \overbrace{\delta(x-x') O(x')} \Psi(x') \\ \Phi(x) &= O(x)\Psi(x).\end{aligned}$$

Wie wir sehen, kommt der Zusammenhang zwischen dem Operator \hat{O} und seiner Ortsdarstellung $O(x)$ in der Gleichung

$$\langle x|\hat{O}|x'\rangle = \delta(x - x') O(x')$$

zum Ausdruck, wobei $\langle x|\hat{O}|x'\rangle$ das Matrixelement von \hat{O} bezüglich der kontinuierlichen Basis $\{|x\rangle\}$ ist. Zur Verdeutlichung geben wir noch einige Operator-Ortsdarstellungen in dieser Form an:

$$\text{Hamilton-Operator: } \langle x|\hat{H}|x'\rangle = \delta(x - x') \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + V(x', t) \right),$$

$$\text{Ortsoperator: } \langle x|\hat{x}|x'\rangle = \delta(x - x') x' = \delta(x - x') x,$$

$$\text{Impulsoperator: } \langle x|\hat{p}|x'\rangle = \delta(x - x') \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \right).$$

In den folgenden Abschnitten zeigen wir noch die Überführung der basisfreien Orts- und Impulseigenzustände in ihre Orts- und ihre Impulsdarstellung.

10.4.1 Ortsdarstellung der Impulseigenzustände

Wir beginnen mit der Ortsdarstellung der Impulseigenzustände $|p\rangle$ und gehen aus von der entsprechenden Impuls-Eigenwertgleichung:

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle.$$

Durch Multiplikation mit dem uneigentlichen bra-Vektor $\langle x|$ aus der Basis, die der kontinuierlichen Ortsbasis $\{|x\rangle\}$ entspricht, erhalten wir die abstrakte Ortsdarstellung der Impuls-Eigenwertgleichung:

$$\langle x|\hat{p}|p\rangle = p\langle x|p\rangle. \quad (10.19)$$

In ihr erkennen wir die Ortsdarstellung $\langle x|p\rangle = \Psi_p(x)$ der Impulseigenzustände $|p\rangle$. Zur Berechnung der Funktion $\Psi_p(x)$ verwenden wir jetzt die Ersetzungsregel $-i\hbar d/dx$ für den Impulsoperator \hat{p} und überführen damit (10.19) in die algebraische Form der Eigenwertgleichung:

$$-i\hbar \frac{d}{dx} \Psi_p(x) = p \Psi_p(x).$$

Als allgemeine Lösung für diese Differentialgleichung finden wir mit dem Exponentialansatz $\Psi_p(x) = e^{\alpha x}$ und daraus resultierend mit $\alpha = \frac{i}{\hbar} p$

$$\Psi_p(x) = C \cdot e^{\frac{i}{\hbar} p x}.$$

Wie wir sehen, ist der Impulseigenzustand $|p\rangle$ in Ortsdarstellung die ortsabhängige Impulseigenfunktion $C \cdot e^{\frac{i}{\hbar} p x}$. Bei ihr handelt es sich um eine Wellenfunktion im

Ortsraum, die einer *ebenen Welle* entspricht. Ebene Wellen sind aber nicht quadratintegrabel und folglich nicht normierbar, sodass unter Berücksichtigung der Fourier-Transformation (11.1) die folgende Orthonormalitätsbedingung resultiert:

$$\begin{aligned}\langle p|p'\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi_p^*(x) \Psi_{p'}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p'x}, \\ \langle p|p'\rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x} = \delta(p-p').\end{aligned}\quad (10.20)$$

Die Fourier-Transformierte einer ebenen Welle ist nämlich die δ -Funktion. Wie man sieht, ergibt sich aus dieser Darstellung der Normierungsfaktor $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$, sodass

$$\boxed{\langle x|p\rangle = \Psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}px}}. \quad (10.21)$$

Das Integral über die Orthonormalitätsbedingung (10.20), d. h. über die δ -Funktion, liefert die Orthonormalität der auch bezüglich p kontinuierlichen Impulseigenfunktion $\Psi_p(x)$:

$$\begin{aligned}\int dp \langle p|p'\rangle &= \int dp \int dx \Psi_p^*(x) \Psi_{p'}(x) \\ &= \int dp \int dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p'x} \\ &= \int dp \delta(p-p') = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p' \text{ im Integrationsbereich,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

mit dem Skalarprodukt in Ortsdarstellung

$$\langle p|p'\rangle = \int dx \Psi_p^*(x) \Psi_{p'}(x) = \int dx \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x} = \delta(p-p'),$$

das auch gleichzeitig die **Impulsdarstellung der Eigenfunktionen zum Impulsoperator** ist. Das Integral über die δ -Funktion liefert *nur* an der Stelle $p = p'$ einen Beitrag mit dem Wert 1.

Im speziellen Fall, z. B. für die Bewegung eines Teilchens im eindimensionalen, unendlich hohen Potentialtopf der Breite L und symmetrisch zu $x = 0$, ist aber unter Verwendung der sich dann daraus ergebenden *periodischen Randbedingungen* die Nor-

normierung möglich:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \Psi_p^*(x) \Psi_p(x) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx C^* e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x} \cdot C e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot x} \\
 &= \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx |C|^2 = |C|^2 \cdot x \Big|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = |C|^2 \cdot L \stackrel{!}{=} 1 \\
 \Leftrightarrow C &= \frac{1}{\sqrt{L}} .
 \end{aligned}$$

Die normierten Impulseigenfunktionen in Ortsdarstellung für ein Teilchen im eindimensionalen, unendlich hohen Potentialtopf sind schließlich

$$\Psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{i}{\hbar} p \cdot x} ,$$

$$p = \frac{2\pi\hbar}{L} n , \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots ,$$

wie man sich unter Berücksichtigung der periodischen Randbedingungen und der Heisenberg'schen Unschärferelation überlegen kann. Diese Impulseigenfunktionen sind ordentliche, orthonormierte Eigenvektoren gemäß

$$p - p' = m \cdot \frac{2\pi\hbar}{L} , \quad m \in \mathbb{Z} ,$$

$$\begin{aligned}
 p \neq p' : \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \Psi_p^*(x) \Psi_{p'}(x) &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x} \\
 &= \frac{1}{L} \frac{1}{\frac{i}{\hbar}(p-p')} \left[e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')\frac{L}{2}} - e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')\frac{L}{2}} \right] \\
 &= \frac{\hbar}{L i(p-p')} 2i \sin \left[\frac{1}{\hbar} (p-p') \frac{L}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{m \cdot \pi} \sin(m \cdot \pi) = 0 ,
 \end{aligned}$$

sodass

$$\langle p|p' \rangle = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x} = \begin{cases} 1 & \text{für } p = p' \\ 0 & \text{für } p \neq p' \end{cases} = \delta_{p'p} .$$

Wir stellen fest:

Die Impulseigenfunktionen $\Psi_p(x)$ sind bezüglich x , d. h. bezüglich des Ortsraums, kontinuierliche Funktionen.

Im Fall des unbegrenzten (unbeschränkten) Ortsraums sind die Impulseigenfunktionen $\Psi_p(x)$ auch bezüglich des Impulses p kontinuierlich. Es handelt sich dann um Kontinuumseigenfunktionen mit einem kontinuierlichen Eigenwertspektrum. Bezüglich p kontinuierliche Impulseigenfunktionen sind dann über die δ -Funktion $\delta(p - p')$ orthonormiert.

Im Fall des begrenzten Ortsraums dagegen sind die Impulseigenfunktionen $\Psi_p(x)$ bezüglich des Impulses p diskret (diskontinuierliches) verteilt, besitzen ein diskretes Eigenwertspektrum und sind gemäß dem Kronecker- $\delta_{p'p}$ orthonormiert.

10.4.2 Impulsdarstellung der Ortseigenzustände

Die Impulsdarstellung der Ortseigenzustände erhält man analog zur Ortsdarstellung der Impulseigenzustände. Deshalb wird die entsprechende Herleitung nur skizziert:

$$\begin{aligned}\hat{x}|x\rangle &= x|x\rangle, \\ \langle p|\hat{x}|x\rangle &= x\langle p|x\rangle, \\ i\hbar \frac{d}{dp} \Psi_x(p) &= x \Psi_x(p),\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle p|x\rangle = \Psi_x(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}x \cdot p}}. \quad (10.22)$$

Hinsichtlich der Orthonormalität der Ortseigenfunktionen gilt analog zu den Impulseigenfunktionen

$$\begin{aligned}\int dx \langle x|x'\rangle &= \int dx \delta(x - x') \quad \text{falls Impulsraum unbeschränkt,} \\ \langle x|x'\rangle &= \delta_{x'x} \quad \text{falls Impulsraum beschränkt}\end{aligned}$$

mit dem Skalarprodukt in Impulsdarstellung

$$\langle x|x'\rangle = \int dp \Psi_x^*(p) \Psi_{x'}(p) = \int dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x')p} = \delta(x - x'),$$

das auch gleichzeitig die **Ortsdarstellung der Eigenfunktionen zum Ortsoperator** ist.

11 Fourier-Transformation der Impuls- und Ortseigenfunktionen

Wir zeigen jetzt die Überführung der Impulseigenfunktionen in Ortsdarstellung in die Ortseigenfunktionen in Impulsdarstellung und umgekehrt mit Hilfe der entsprechenden Fourier-Transformation. Allgemein, also 3-dimensional und ohne Berücksichtigung physikalischer Inhalte, verwenden wir die übliche Form der Fourier-Transformation

$$f(\vec{r}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}},$$

$$\tilde{f}(\vec{k}) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(\vec{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}}.$$

Hier ist \mathcal{F} die Fourier-Transformation und \mathcal{F}^{-1} die Umkehroperation, die inverse Fourier-Transformation. Wenn die Funktion $f(\vec{r})$ die Originalfunktion ist, dann heißt $\tilde{f}(\vec{k})$ Fourier-Transformierte von $f(\vec{r})$ und $f(\vec{r})$ heißt inverse Fourier-Transformierte von $\tilde{f}(\vec{k})$. Das Vorzeichen im Exponenten der e -Funktion und die Aufteilung des Normierungsfaktors $1/(2\pi)^{3/2}$ auf die Funktionen f und \tilde{f} sind Konvention.

Angewandt auf die Ortsdarstellung der Impulseigenfunktion $\Psi_p(x)$ als Originalfunktion bedeutet das die Fourier-Transformation

$$\Psi_p(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \Psi_p(x) e^{-\frac{i}{\hbar}px},$$

$$\tilde{\Psi}(p) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \Psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \tilde{\Psi}(p) e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

und angewandt auf die Impulsdarstellung der Ortseigenfunktion $\Psi_x(p)$ als Originalfunktion analog

$$\Psi_x(p) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{\Psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \Psi_x(p) e^{\frac{i}{\hbar}px},$$

$$\tilde{\Psi}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \Psi_x(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \tilde{\Psi}(x) e^{-\frac{i}{\hbar}px}.$$

Es zeigt sich, dass bei breiter Verteilung einer Funktion die zugehörige Fourier-Transformierte eine schmale Verteilung besitzt und umgekehrt. Wir hatten bereits festgestellt, dass die Impulseigenfunktionen (10.21) und die Ortseigenfunktionen (10.22) (unendlich breit verteilten) ebenen Wellen entsprechen. Demzufolge müssen ihre Fourier-Transformierten jeweils δ -Funktionen sein.

$\Psi_{p'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p'x}$ sei die Originalfunktion, entsprechend einer ebenen Welle :

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \tilde{\Psi}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \Psi_{p'}(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p'x} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x} \quad (11.1)
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\Psi}(p) = \delta(p - p') = \langle p|p' \rangle ,$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi}(p) = \delta(p - p') \quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad \Psi'_p(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \tilde{\Psi}(p) \cdot e^{\frac{i}{\hbar}px} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \delta(p - p') \cdot e^{\frac{i}{\hbar}px} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p'x} = \Psi_{p'}(x) . \quad \square
 \end{aligned}$$

$\Psi_{x'}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px'}$ sei die Originalfunktion, entsprechend einer ebenen Welle :

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \tilde{\Psi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \Psi_{x'}(p) \cdot e^{\frac{i}{\hbar}px} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px'} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}px} \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar}p(x-x')}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\Psi}(x) = \delta(x - x') = \langle x|x' \rangle ,$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi}(x) = \delta(x - x') \quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad \Psi_{x'}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \tilde{\Psi}(x) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \delta(x - x') \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}px} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px'} = \Psi_{x'}(p) . \quad \square
 \end{aligned}$$

Im speziellen Fall der Impulseigenfunktionen in Ortsdarstellung ist das Skalarprodukt $\langle p|p' \rangle$ gleich der Fourier-Transformierten von $\Psi_{p'}(x)$, also gleich $\mathcal{F}\{\Psi_{p'}(x)\}$:

$$\begin{aligned} \langle p|p' \rangle &= \int dx \Psi_p^*(x) \Psi_{p'}(x) = \int dx \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x} = \\ &= \delta(p-p') = \mathcal{F}\{\Psi_{p'}(x)\} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}}_{= \Psi_{p'}(x)} \int dx \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}p'x}}_{= \Psi_p^*(x)} \cdot \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}p'x}}_{= \Psi_{p'}(x)}, \end{aligned}$$

weil

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}p'x} = \Psi_p^*(x).$$

Analog gilt für die Ortseigenfunktionen in Impulsdarstellung

$$\langle x|x' \rangle = \delta(x-x') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar}p(x-x')} = \mathcal{F}\{\Psi_{x'}(p)\}.$$

3-dimensional und vereinfachend schreibt man oft $|\vec{p}\rangle$ für die basisfreien Impulseigenzustände und $|\vec{r}\rangle$ für die basisfreien Ortseigenzustände. Damit erhalten die Fourier-Transformationen der entsprechenden δ -Funktion die Form:

$$\boxed{\langle \vec{p}|\vec{p}' \rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}-\vec{p}')\vec{r}}},$$

$$\boxed{\langle \vec{r}|\vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')}}.$$

Eindimensional und für $p = \hbar k$ und $dp = \hbar dk$ gilt einfach

$$\begin{aligned} \langle k|k' \rangle &= \delta(k-k') = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-i(k-k')x}, \\ \langle x|x' \rangle &= \delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-x')}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Veranschaulicht kann man sich z. B. (11.2) folgendermaßen vorstellen:

$$\text{an der Stelle } x = x' \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^0 = \frac{1}{2\pi} k \Big|_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow \infty,$$

$$\text{für } x \neq x' \Rightarrow \text{mit } x - x' = \Delta x$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\cos(k \cdot \Delta x) + i \sin(k \cdot \Delta x) \right] \xrightarrow{\Delta x \neq 0} 0,$$

denn wenn das Integral über den ganzen k -Raum von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, heben sich alle Beiträge der Sinus- und Kosinusfunktion auf.

12 Zusammenfassung Dirac-Formalismus

1. Wie wir feststellen konnten, sind die formalen Dirac-Vektoren keine Elemente des Hilbert-Raums \mathcal{H} . Sie werden deshalb auch **uneigentliche Zustandsvektoren** genannt. Ihre Konstruktion in der Dirac-Notation erlaubt aber ihre widerspruchsfreie Eingliederung in den Hilbert-Raum, den man dann als **erweiterten Hilbert-Raum** bezeichnet.

Gelegentlich bezeichnet man den Hilbert-Raum, in dem die abstrakten, basisfreien Zustandsvektoren „leben“, auch als den **Zustandsraum**. Den Raum mit einer diskreten oder kontinuierlichen VON-Basis, in der die Zustandsvektoren dargestellt werden, nennt man **Darstellungsraum**. Die beiden wichtigsten Darstellungsräume sind der (kontinuierliche) Ortsraum und der (kontinuierliche) Impulsraum, oder genauer gesagt, der Raum, der von den Ortseigenfunktionen oder von den Impulseigenfunktionen aufgespannt wird.

Ist das betrachtete quantenmechanische System im Ortsraum oder Impulsraum beschränkt, sind die in ihnen dargestellten Größen diskontinuierlich (diskret) verteilt. Ist das betrachtete quantenmechanische System im Ortsraum oder Impulsraum nicht beschränkt, bilden die in ihnen dargestellten Größen ein Kontinuum.

2. **Formale Dirac-Vektoren** $|v'_x\rangle$ entsprechen Differentialquotienten (1. Ableitungen) aus Basisvektoren und den zugehörigen Basisvariablenabschnitten:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|v_{x, \Delta x}\rangle}{\sqrt{\Delta x}} = \frac{|v_{x, dx}\rangle}{\sqrt{dx}} = |v'_x\rangle .$$

Dirac-Vektoren sind also sinngemäß kontinuierliche Verteilungsfunktionen.

3. Die formalen Dirac-Vektoren $|v'_x\rangle$ bilden eine **kontinuierliche Basis** $\{|v'_x\rangle\}$, sind deshalb nicht abzählbar und liegen folglich unendlich dicht beieinander.
4. Formal besitzen Dirac-Vektoren eine **unendlich große Norm** (Länge):

$$\langle v'_x | v'_x \rangle \rightarrow \infty .$$

5. **Entwicklungssatz** für einen Zustandsvektor $|\Psi\rangle$ in der **diskreten** VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$:

$$|\Psi\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i | \Psi \rangle$$

mit den **Entwicklungskoeffizienten**

$$\langle a_i | \Psi \rangle = c_i .$$

6. **Entwicklungssatz** für einen Zustandsvektor $|\Psi\rangle$ in der **kontinuierlichen** Basis $\{|v'_x\rangle\}$:

$$|\Psi\rangle = \int |v'_x\rangle \langle v'_x | \Psi \rangle dx = \int |v'_x\rangle \Psi(x) dx$$

mit der **Wahrscheinlichkeitsamplitude** (Funktion)

$$\langle v'_x | \Psi \rangle = \Psi(x) .$$

7. **Orthonormalität** der **diskreten** Basisvektoren $|a_i\rangle$ des Hilbert-Raums \mathcal{H} :

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij} .$$

8. **Orthonormalitätsbedingung** für (**kontinuierliche**) Dirac-Vektoren $|v'_x\rangle$:

$$\langle v'_x | v'_{x'} \rangle = \delta(x - x') .$$

Dirac-Vektoren sind also auf δ -Funktionen normiert gemäß

$$\int \langle v'_x | v'_{x'} \rangle dx = \int \delta(x - x') dx = \begin{cases} 1 : & x' \text{ im Integrationsbereich,} \\ 0 : & \text{sonst .} \end{cases}$$

9. **Vollständigkeit** einer (**diskreten**) VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ im Hilbert-Raum \mathcal{H} :

$$\sum_i |a_i\rangle \langle a_i| = \mathbb{1} .$$

10. **Vollständigkeitsrelation** für eine **kontinuierliche** Basis $\{|v'_x\rangle\}$ aus den Dirac-Vektoren $|v'_x\rangle$:

$$\int |v'_x\rangle \langle v'_x| dx = \mathbb{1} .$$

$\mathbb{1}$ ist auch hier die Einheitsmatrix bzw. der Identitätsoperator.

11. **Skalarprodukt** aus den basisfreien Zustandsvektoren $|\Phi\rangle$ und $|\Psi\rangle$ in der kontinuierlichen Basis $\{|v'_x\rangle\}$ unter Verwendung der entsprechenden Vollständigkeitsrelation:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int \langle \Phi | v'_x \rangle \langle v'_x | \Psi \rangle dx = \int \Phi^*(x) \Psi(x) dx .$$

12. **Operator** \hat{A} dargestellt in VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$:
Hierbei ist $\langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle = A_{ij}$ ein Matrixelement.

$$\hat{A} = \mathbb{1} \hat{A} \mathbb{1} = \sum_{i,j} |a_i\rangle \underbrace{\langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle}_{A_{ij}} \langle a_j|$$

$$\hat{A} = \sum_{i,j} A_{ij} |a_i\rangle \langle a_j|$$

Matrixelement des Operators \hat{A} in Ortsdarstellung:

$$\langle x | \hat{A} | x' \rangle = \delta(x - x') A(x') .$$

13. Erwartungswert:

Der quantenmechanische Mittelwert heißt Erwartungswert. Der Erwartungswert $\langle \hat{A} \rangle$ der Observablen bzw. des Operators \hat{A} bezüglich eines Zustands $|\Psi\rangle$ in der Entwicklung nach der VON-Eigenbasis $\{|a_i\rangle\}$ zu \hat{A} und mit dem diskreten Eigenwertspektrum $\{\lambda_i\}$ ist

$$\begin{aligned}\langle \hat{A} \rangle &= \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \sum_i \langle \Psi | \underbrace{\hat{A} | a_i \rangle}_{\lambda_i | a_i \rangle} \underbrace{\langle a_i | \Psi \rangle}_{c_i} \\ &= \sum_i \lambda_i \underbrace{\langle \Psi | a_i \rangle}_{c_i^*} c_i = \sum_i \lambda_i \cdot c_i^* c_i \\ \langle \hat{A} \rangle &= \sum_i |c_i|^2 \cdot \lambda_i = \sum_i p_i \cdot \lambda_i .\end{aligned}$$

Den Erwartungswert in Ortsdarstellung erhält man durch geeignetes Einschleiben von Identitätsoperatoren:

$$\begin{aligned}\langle \hat{A} \rangle &= \langle \Psi | \mathbb{1} | \hat{A} | \mathbb{1} | \Psi \rangle \\ &= \int dx \int dx' \underbrace{\langle \Psi | x \rangle}_{\Psi^*(x)} \underbrace{\langle x | \hat{A} | x' \rangle}_{A(x-x')} \underbrace{\langle x' | \Psi \rangle}_{\Psi(x')} \\ &= \int dx \int dx' \Psi^*(x) \cdot \delta(x - x') A(x') \cdot \Psi(x') \\ \langle \hat{A} \rangle &= \int dx \Psi^*(x) A(x) \Psi(x) .\end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist eine basisunabhängige Zahl und lässt sich mit jeder beliebigen VON-Basis als $\mathbb{1}$ -Operator bzw. Identitätsoperator darstellen.

14. Reine Zustände:

Im Fall reiner Zustände $|\Psi\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i | \Psi \rangle$ existieren über das betrachtete quantenmechanische System vollständige Informationen. Die **prinzipiell-quantenmechanische Wahrscheinlichkeit** p_i mit der dann die Messwerte (Eigenwerte) λ_i auftreten, ist deshalb Ausdruck des **spezifisch quantenmechanischen Indeterminismus**.

15. Wahrscheinlichkeit p_i für das Auftreten des Messwertes λ_i bzw. des reinen Zustands $|\Psi\rangle$, dargestellt in der diskreten VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$:

$$p_i = |c_i|^2 = \langle \Psi | a_i \rangle \langle a_i | \Psi \rangle \quad \Rightarrow \quad \sum_i p_i = \sum_i \langle \Psi | a_i \rangle \langle a_i | \Psi \rangle = 1 .$$

Die Wahrscheinlichkeiten $|c_i|^2$ besitzen keine Maßeinheit, sind also dimensionslos. Die diskreten Entwicklungskoeffizienten c_i nennt man auch Wahrscheinlichkeitsamplituden.

16. **Wahrscheinlichkeit** Δp für das Auftreten eines **reinen Zustands** $|\Psi\rangle$ bezüglich einer **kontinuierlichen** Basis $\{|v'_x\rangle\}$:

$$\Delta p = \int_{x_1}^{x_2} dx \langle \Psi | v'_x \rangle \langle v'_x | \Psi \rangle = \int_{x_1}^{x_2} dx \Psi^*(x) \Psi(x)$$

$$\Rightarrow p = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi^*(x) \Psi(x) = 1$$

mit der **Wahrscheinlichkeitsdichte** $\Psi^*(x) \Psi(x) = |\Psi(x)|^2$. Die Funktion $\Psi(x)$ heißt ebenfalls **Wahrscheinlichkeitsamplitude**, auch wenn sie sich in ihrem mathematischen Wesen von den diskreten Entwicklungskoeffizienten c_i unterscheidet. Denn genau genommen ist die Funktion $\Psi(x)$ die Änderung der Wahrscheinlichkeitsamplitude c_i pro Wurzel aus der Änderung von x . Die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x)|^2$ besitzt die Maßeinheit $[x]^{-1}$.

17. **Gemischte Zustände:**

Im Fall gemischter Zustände $|\Phi\rangle$ existieren über das betrachtete quantenmechanische System keine vollständigen Informationen. Ein gemischter Zustand $|\Phi\rangle$ besteht dabei aus einer Gesamtheit von reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$, die jeweils mit ihrer **klassisch-statistischen Wahrscheinlichkeit** w_n auftreten. Die w_n resultieren z. B. aus den „prinzipiell vermeidbaren“ Messfehlern.

18. **Kombinierte Wahrscheinlichkeit** W_i für das Auftreten des Messwertes (Eigenwertes) λ_i im Fall eines **gemischten Zustands** $|\Phi\rangle$, repräsentiert durch die Gesamtheit der in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ dargestellten reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$:

$$W_i = \sum_n w_n \cdot p_{in} = \sum_n w_n \cdot |c_{in}|^2 = \sum_n w_n |\langle a_i | \Psi_n \rangle|^2.$$

Die kombinierte Wahrscheinlichkeit W_i setzt sich also zusammen aus den prinzipiell-quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten p_{in} für das Auftreten eines Messwertes λ_i bezüglich der reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$ und den klassisch-statistischen Wahrscheinlichkeiten w_n für das Auftreten der reinen Zustände $|\Psi_n\rangle$.

19. **Ortsdarstellung eines Zustands** $|\Psi\rangle$ in der kontinuierlichen Basis $\{|x\rangle\}$ aus den Ortseigenzuständen $|x\rangle$:

$$\langle x | \Psi \rangle = \langle x | \int dx' |x'\rangle \underbrace{\langle x' | \Psi \rangle}_{\Psi(x')}$$

$$= \int dx' \underbrace{\langle x | x' \rangle}_{\delta(x-x')} \Psi(x') = \Psi(x)$$

$$\Rightarrow |\Psi\rangle = \int dx |x\rangle \underbrace{\langle x | \Psi \rangle}_{\Psi(x)} = \int dx \Psi(x) |x\rangle.$$

20. **Entwicklung** eines Zustands $|\Psi\rangle$ nach einer diskreten VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ in Ortsdarstellung:

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= \sum_i |a_i\rangle \langle a_i|\Psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \quad \Rightarrow \\
 \Psi(x) = \langle x|\Psi\rangle &= \sum_i \langle x|a_i\rangle \langle a_i|\Psi\rangle \\
 &= \sum_i \int dx' \underbrace{\langle x|x'\rangle}_{\delta(x-x')} \underbrace{\langle x'|a_i\rangle}_{a_i(x')} \langle a_i|\Psi\rangle \\
 &= \sum_i a_i(x) \cdot \langle a_i|\Psi\rangle = \sum_i a_i(x) \cdot c_i \\
 &= \sum_i a_i(x) \int dx \langle a_i|x\rangle \langle x|\Psi\rangle \\
 &= \sum_i a_i(x) \int dx a_i^*(x) \Psi(x)
 \end{aligned}$$

mit

$$c_i = \langle a_i|\Psi\rangle = \int dx a_i^*(x) \Psi(x) .$$

21. **Ortsdarstellung der Ortseigenfunktionen**, d. h. der Eigenfunktionen $|x\rangle$ zum Ortsoperator \hat{x} :

$$|x\rangle \quad \longrightarrow \quad \langle x'|x\rangle = \delta(x - x') .$$

Daraus folgt dann

$$\int dx' \langle x'|x\rangle = \int dx' \delta(x - x') = 1 .$$

$\delta(x-x')$ ist der Ausdruck für eine Dichte, die (streng) lokalisiert im Punkt $x' = x$ unter dem Integral einen Betrag mit dem Wert 1 liefert. Die Ortsdarstellung der Ortseigenfunktionen besitzt deshalb die Maßeinheit $\frac{1}{[x]}$.

22. **Fourier-Transformation:**

Die Fourier-Transformation einer Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ vom Orts- in den Impulsraum ist

$$\mathcal{F} : \quad \tilde{\Psi}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \int d^3r \Psi(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} .$$

Die zugehörige inverse Fourier-Transformation (Rücktransformation) der Funktion $\tilde{\Psi}(\vec{p})$ vom Impuls- in den Ortsraum ist

$$\mathcal{F}^{-1} : \quad \Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \int d^3p \tilde{\Psi}(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} .$$

Die δ -**Funktion im Impulsraum** ist sowohl gleich der Impulsdarstellung der Impulseigenfunktion als auch gleich der Fouriertransformierten der Ortsdarstellung der Impulseigenfunktion:

$$\delta(\vec{p} - \vec{p}') = \langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3r e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{r}}.$$

Die Ortsdarstellung der Impulseigenfunktion ist nämlich

$$\langle \vec{r} | \vec{p}' \rangle = \Psi_{\vec{p}'}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}'\cdot\vec{r}}$$

und beschreibt eine ebene Welle zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die δ -**Funktion im Ortsraum** ist sowohl gleich der Ortsdarstellung der Ortseigenfunktion als auch gleich der Fouriertransformierten der Impulsdarstellung der Ortseigenfunktion:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}.$$

Die Impulsdarstellung der Ortseigenfunktion ist nämlich

$$\langle \vec{p} | \vec{r}' \rangle = \Psi_{\vec{r}'}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}'}$$

und beschreibt eine ebene Welle zum Zeitpunkt $t = 0$.

13 Produktansatz bzw. Separationsansatz

Die stationäre Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen der Masse m im dreidimensionalen (mehrdimensionalen) Ortsraum ist

$$\hat{H} \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r})$$

mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \hat{U}(\vec{r}) .$$

Wenn sich dieses Teilchen im unendlich hohen dreidimensionalen Potentialtopf mit der kinetischen Energie $\vec{p}^2/(2m) = \hbar^2 \vec{k}^2/(2m) = \hbar^2 k^2/(2m)$ frei bewegt, ist innerhalb des Topfs die potentielle Energie¹ $\hat{U} = 0$. Die stationäre Schrödinger-Gleichung hat unter diesen Bedingungen die einfache Form

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{k}^2 \Psi(\vec{r}) .$$

Entsprechende Äquivalenzumformung führt auf die homogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \Delta \Psi(\vec{r}) + \vec{k}^2 \Psi(\vec{r}) &= 0 , \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi(x, y, z) + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \Psi(x, y, z) &= 0 . \end{aligned} \quad (13.1)$$

Der Lösungsansatz

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(x, y, z) = e^{\vec{\lambda} \cdot \vec{r}} = e^{\lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z} \quad (13.2)$$

liefert durch Einsetzen in die Differentialgleichung (13.1)

$$\begin{aligned} \lambda_x^2 e^{\vec{\lambda} \cdot \vec{r}} + \lambda_y^2 e^{\vec{\lambda} \cdot \vec{r}} + \lambda_z^2 e^{\vec{\lambda} \cdot \vec{r}} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{\vec{\lambda} \cdot \vec{r}} &= 0 , \\ \underbrace{\lambda_x^2 e^{\vec{\lambda} \cdot \vec{r}} + k_x^2 e^{\vec{\lambda} \cdot \vec{r}}}_{\lambda_x^2 + k_x^2 = 0} + \underbrace{\lambda_y^2 e^{\vec{\lambda} \cdot \vec{r}} + k_y^2 e^{\vec{\lambda} \cdot \vec{r}}}_{\lambda_y^2 + k_y^2 = 0} + \underbrace{\lambda_z^2 e^{\vec{\lambda} \cdot \vec{r}} + k_z^2 e^{\vec{\lambda} \cdot \vec{r}}}_{\lambda_z^2 + k_z^2 = 0} &= 0 , \end{aligned}$$

drei voneinander unabhängige quadratische Bestimmungsgleichungen für die Parameter λ_i . Deren Lösungen

$$\lambda_{x1} = +ik_x , \quad \lambda_{y1} = +ik_y , \quad \lambda_{z1} = +ik_z$$

und

$$\lambda_{x2} = -ik_x , \quad \lambda_{y2} = -ik_y , \quad \lambda_{z2} = -ik_z$$

¹Es ist üblich aber nicht korrekt für die potentielle Energie den Begriff „Potential“ zu verwenden.

setzen wir jeweils in den Ansatz (13.2) ein und erhalten so die Fundamentalbasis:

$$\Psi(\vec{r}) = e^{\lambda_{x1}x + \lambda_{y1}y + \lambda_{z1}z} + e^{\lambda_{x2}x + \lambda_{y2}y + \lambda_{z2}z} = e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Mit dieser Fundamentalbasis ist die allgemeine Lösung der mehrdimensionalen stationären Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf schließlich

$$\Psi(\vec{r}) = C_1 e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}} + C_2 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}.$$

Produkt- bzw. Separationsansatz

Wir zeigen jetzt ein allgemeines Verfahren zur Lösung von partiellen linearen Differentialgleichungen mit Hilfe des Produkt- bzw. Separationsansatzes am Beispiel des Hamilton-Operators für die drei Ortsraumdimensionen.

Der dreidimensionale Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \hat{U}$$

ist die Summe der entsprechenden drei eindimensionalen Hamilton-Operatoren:

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + (U_x(x) + U_y(y) + U_z(z))$$

mit der potentiellen Energie $U(\vec{r}) = U_x(x) + U_y(y) + U_z(z)$. Die dreidimensionale stationäre Schrödinger-Gleichung

$$\hat{H} \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r})$$

lässt sich dann mit dem Produktansatz bzw. dem Separationsansatz

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_x(x) \cdot \Psi_y(y) \cdot \Psi_z(z)$$

und wegen z. B.

$$\hat{H}_x \Psi(\vec{r}) = \hat{H}_x \Psi_x(x) \Psi_y(y) \Psi_z(z) = \Psi_y \Psi_z \cdot \hat{H}_x \Psi_x$$

wie folgt in drei eindimensionale stationäre Schrödinger-Gleichungen separieren:

$$\Psi_y \Psi_z \cdot \hat{H}_x \Psi_x + \Psi_z \Psi_x \cdot \hat{H}_y \Psi_y + \Psi_x \Psi_y \cdot \hat{H}_z \Psi_z = E \Psi_x \Psi_y \Psi_z.$$

Die Division durch $\Psi_x \Psi_y \Psi_z$ ergibt schließlich

$$\underbrace{\frac{\hat{H}_x \Psi_x}{\Psi_x}}_{=E_x} + \underbrace{\frac{\hat{H}_y \Psi_y}{\Psi_y}}_{=E_y} + \underbrace{\frac{\hat{H}_z \Psi_z}{\Psi_z}}_{=E_z} = E_x + E_y + E_z = E.$$

Wie man sieht, vereinfacht sich die Lösung der partiellen (mehrdimensionalen) linearen Differentialgleichung durch die Separation in eindimensionale lineare Differentialgleichungen. Diese sind, jede für sich, leicht lösbar.

14 Randbedingungen

Wir wollen einige Überlegungen zu den Randbedingungen bei der Lösung von Wellengleichungen anstellen. Vereinfachend verwenden wir dabei statt des Impulses p die Wellenzahl $k = \frac{1}{\hbar} p$. Die Ersetzung von p durch k hat ihren Ursprung in der de Broglie-Gleichung

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

und führt auf

$$\begin{aligned} dp = \hbar dk & \longleftrightarrow dk = \frac{1}{\hbar} dp, \\ \frac{1}{2\pi} \int dk \dots & \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{\hbar} dp \dots = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \dots \end{aligned}$$

Es gibt im Wesentlichen zwei Möglichkeiten zur Festlegung der Randbedingungen.

- Das betrachtete System, z. B. ein quaderförmiger Potentialtopf oder ein Festkörper, besitze feste Grenzen im Sinne eines Anfangs und eines Endes hinsichtlich der Wellenausbreitung.

L sei die Länge, die der Wellenausbreitung zur Verfügung steht. Für stehende Wellen mit den Wellenzahlen k_n und festen Enden ergeben sich dann folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}, \quad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} & \Leftrightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}, \\ L = n \cdot \frac{\pi}{k_n} \Rightarrow k_n = \frac{\pi}{L} \cdot n, \quad n = 1, 2, 3, \dots & \Rightarrow k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{L}. \end{aligned} \tag{14.1}$$

- Das betrachtete System, z. B. auf einer Kugeloberfläche, besitze zwar eine endliche räumliche Ausdehnung, sei aber hinsichtlich der Wellenausbreitung nicht begrenzt, sodass der räumliche Anfang und das räumliche Ende des „Wellenumlaufs“ ineinander übergehen.

Es wird deshalb die *periodische Randbedingung* für die Lösungen Ψ der Wellengleichungen (z. B. der Schrödinger-Gleichung) festgelegt gemäß:

$$\Psi(x) = \Psi(x + L) \Rightarrow \text{z. B. } e^{ikx} = e^{ik(x+L)} = e^{i(kx+kL)}.$$

Diese Bedingung ist nur erfüllt für

$$kL = n \cdot 2\pi = k_n L, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Im Unterschied zu (14.1) folgt daraus

$$L = n \cdot \frac{2\pi}{k_n} \Rightarrow k_n = \frac{2\pi}{L} \cdot n \Rightarrow k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{L}. \tag{14.2}$$