Reinhard Weiß

PLANETENBAHNEN

Der Zusammenhang zwischen Kepler'schen Gesetzen und klassischer Mechanik

05.01.2025

Inhaltsverzeichnis

0 Vorbemerkungen

Das Lebenswerk des dänischen Astronomen **Tycho Brahe** (1546 – 1601) war eine sehr umfangreiche Sammlung von zu seiner Zeit äußerst genauen Beobachtungsdaten von Stern- und Planetenpositionen. Bekannt waren allerdings bis 1781 nur die Planeten (Wandelsterne) Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn. Diese Datensammlung vererbte Brahe an seinen 25 Jahre jüngeren Kollegen, den deutschen Astronomen, Physiker und Mathematiker **Johannes Kepler** (1571 – 1630) zur mathematischen Auswertung. Dieser leitete daraus die drei nach ihm benannten Gesetze zu den Planetenbahnen ab: 1. und 2. Kepler'sches Gesetz 1609 und 3. Kepler'sches Gesetz 1618. Diese waren grundlegend für die Entdeckung des Gravitationsgesetzes von **Isaac Newton** (1643 – 1727), dem Begründer der klassischen Mechanik bzw. der klassischen theoretischen Physik.

Wir werden im Folgenden die drei Kepler'schen Gesetze durch die Anwendung der klassischen Mechanik und insbesondere des Newton'schen Gravitationsgesetzes herleiten. Dabei stützen wir uns auf die Ausführungen in

- LEIFIphysik, Erstes KEPLER'sches Gesetz, Zweites KEPLER'sches Gesetz, Drittes KEPLER'sches Gesetz:
- `https://www.leifiphysik.de/astronomie/planetensystem/ausblick/herleitung-des-ersten-keplerschen-gesetzes`,
- `https://www.leifiphysik.de/astronomie/planetensystem/ausblick/herleitung-des-zweiten-keplerschen-gesetzes`,
- `https://www.leifiphysik.de/astronomie/planetensystem/ausblick/herleitung-des-dritten-keplerschen-gesetzes`.
- Martin Gubler, Herleitung der Keplergesetze aus dem Gravitationsgesetz, Kantonschule Frauenfeld, 2001, `https://www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/Kepler/Kepler_01.pdf`
- Jens Eisert, Analytische Mechanik (20113401), Kapitel 4: Drehimpuls, die Keplerschen Gesetze und der Virialsatz, `https://www.physik.fu-berlin.de/en/einrichtungen/ag/ag-eisert/teaching/ss-21/KlassischeMechanikKapitel4.pdf`

0.1 Gültigkeitsbereich der Kepler'schen Gesetze

Die Kepler'schen Gesetze implizieren der Reihe nach die folgenden vereinfachenden Näherungen und Anpassungen:

1. Die Betrachtung erfolgt im Gültigkeitsbereich der klassischen Physik, also nicht relativistisch.

2. Im Grunde genommen handelt es sich bei Stern- bzw. Planetensystemen allgemein um n-Körperprobleme mit $n > 2$. Wir aber reduzieren die Problematik *zunächst* auf ein Einplanetensystem, d. h. auf ein **Zweikörperproblem**, indem wir nur einen Planeten berücksichtigen und alle übrigen ignorieren. Die beiden verbleibenden Körper sind dann ein Stern der Masse M und ein Planet mit der Masse m. Beim Zweikörperproblem ist es ratsam, den gemeinsamen Massenschwerpunkt von Stern und Planet in den Koordinatenursprung zu legen, also ein sog. Schwerpunktsystem zu bilden. Der Stern besitzt dann den Abstand r_M vom Koordinatenursprung und der Planet den Abstand

r_m. Sowohl Stern als auch Planet bewegen sich gekoppelt jeweils auf einer eigenen, allgemein elliptischen Bahn um den gemeinsamen Schwerpunkt, wobei

$$M \cdot r_M \;=\; m \cdot r_m \quad \Leftrightarrow \quad r_M \;=\; \frac{m \cdot r_m}{M}$$

gilt (siehe Abbildung 8 im Abschnitt 5.1).

3. Durch die Einführung der reduzierten Masse

$$\mu \;=\; \frac{M \cdot m}{M + m}$$

wird aus dem ursprünglichen Zeikörperperproblem ein **äquivalentes Einkörperproblem**. Wir können dann den Stern als ruhenden Zentralstern betrachten, sodass sich allein der Planet im Abstand

$$r \;=\; r_m + r_M \;=\; r_m + \frac{m \cdot r_m}{M} \;=\; r_m \left(1 + \frac{m}{M}\right) \tag{1}$$

im Allgemeinen auf einer elliptischen Bahn um den Zentralstern bewegt. Damit haben wir die Beschreibung der Bewegung von Planet und Stern auf eine Gleichung reduziert.

4. Die Kepler'schen Gesetze gelten für den Fall, dass die Masse des Planeten im Vergleich zur Masse des Zentralsterns gemäß $m \lll M$ sehr viel kleiner und damit nahezu vernachlässigbar ist, sodass man schließlich auch noch die reduzierte Masse vereinfachen kann. In erster Näherung[1] gilt nämlich dann für $\mu = \mu(m)$:

$$m \to 0 \quad \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} \quad \mu \to m \,, \qquad\qquad \frac{m}{M} \to 0 \quad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \quad r \to r_m \,.$$

Tatsächlich liegt der gemeinsame Schwerpunkt beispielsweise von Erde und Sonne annähern 500 km neben dem Mittelpunkt der Sonne, also deutlich innerhalb der Sonne. Diese Tatsache zeigt, dass die zuletzt durchgeführte Näherung der reduzierten Masse sowie der Abstände von Planet und Zentralstern vom Schwerpunkt gerechtfertigt ist.

Für die Herleitung der Kepler'schen Gesetze bedeutet das:

Wir betrachten einen Planeten der Punktmasse m, der sich im Abstand r um einen Zentralstern der Punktmasse M bewegt. Dabei sollen Zentralstern und Planet gemäß dem **Newton'schen Gravitationsgesetz**

$$\vec{\boldsymbol{F}} \;=\; -F \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r} \;=\; -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r} \qquad \text{bzw.} \qquad F(r) \;=\; G\,\frac{M\,m}{r^2}$$

miteinander wechselwirken. Hier sind G die Gravitationskonstante, $\vec{\boldsymbol{r}}$ der Vektor vom Zentralstern bis zum Planeten und r der Betrag von $\vec{\boldsymbol{r}}$. Als Zentralstern wählen wir unsere Sonne.

[1] Die erste bzw. **lineare Näherung** von $\mu = \mu(m)$ für $m \lll M$ können wir beschreiben durch die Taylor-Entwicklung von $\mu(m)$ bis zur 1. Ordnung an der Stelle $m = 0$:

$$\mu(m) \;\approx\; Mm(M+m)^{-1}\Big|_{m=0} \cdot m^0 + \Big[M(M+m)^{-1} - Mm(M+m)^{-2}\Big]_{m=0} \cdot m^1 \;=\; \left[\frac{M}{M+m}\right]_{m=0} \cdot m \;=\; m \,. \tag{2}$$

0.2 Ellipsen und ihre Parameter

Weil sich die Planeten allgemein auf elliptischen Bahnen bewegen, werden wir in diesem Abschnitt die wesentlichen Parameter von Ellipsen demonstrieren.[2]

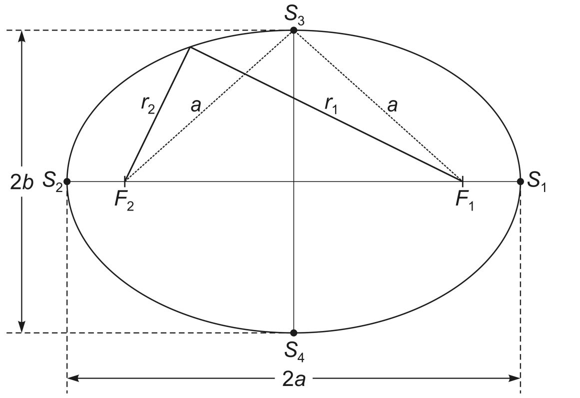


Abb. 1 Ellipsen-Gärtnerkonstruktion mit $r_1 + r_2 = 2a$.

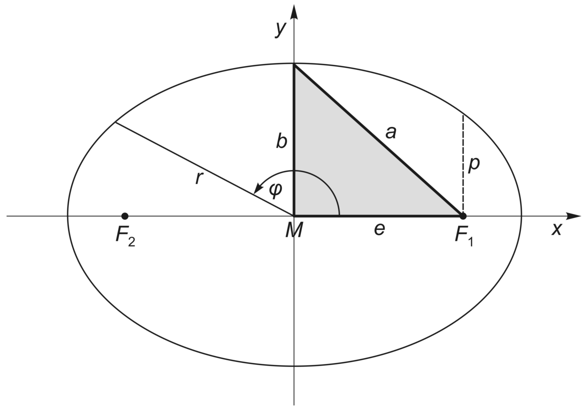


Abb. 2 Ellipse in Mittelpunktlage.

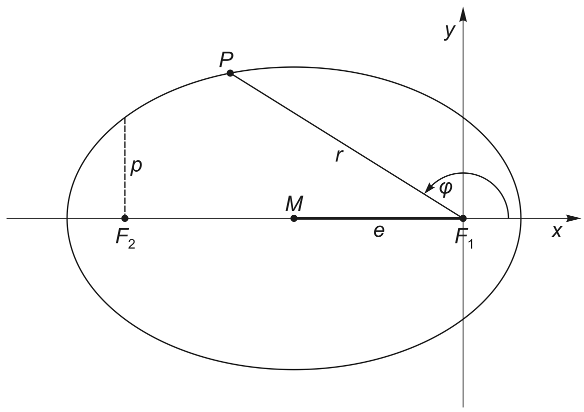


Abb. 3 Ellipsenbrennpunktlage in F_1 . r ist hier die Länge des sog. Fahrstrahls.

M	Mittelpunkt
S_1, S_2	Hauptscheitel bzw. Hauptscheitelpunkte
S_3, S_4	Nebenscheitel bzw. Nebenscheitelpunkte
F_1, F_2	Brennpunkte
$\overline{S_1S_2}$	Hauptachse oder auch große Achse mit der Länge $2a$
$\overline{S_3S_4}$	Nebenachse oder auch kleine Achse mit der Länge $2b$
$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}\,, \quad a > b$	große Halbachse
$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \sqrt{p \cdot a}$	kleine Halbachse
$a = b$	Kreis (Grenzfall der Ellipse)

[2] Herleitungen der Ellipsengleichungen sowie eine Beschreibung der Ellipsenparameter und ihrer Beziehungen untereinander findet man beispielsweise unter : physastromath.ch Ellipsen,
`https://www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/Conics/Conics_02.pdf`

$e = \sqrt{a^2 - b^2} = a \cdot \varepsilon\,,\;\; a \geq b$	lineare Exzentrizität, Kreis: $a = b \;\Rightarrow\; e = 0$
$\varepsilon = \dfrac{e}{a}\,,\;\; 0 \leq \varepsilon < 1$	numerische Exzentrizität, Kreis: $\varepsilon = 0$
$p = \dfrac{b^2}{a} = a\bigl(1 - \varepsilon^2\bigr) = b\sqrt{1 - \varepsilon^2}$	Parameter, auch Halbparameter oder Quermaß
$r = \dfrac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\,\cos^2\varphi}}$	Polardarstellung mit Pol im Mittelpunkt
$r = \dfrac{p}{1 \pm \varepsilon\,\cos\varphi}$	Polardarstellung mit Pol in einem Brennpunkt: in $F_1 \;\Rightarrow\; 1 + \varepsilon\cos\varphi\,,$ in $F_2 \;\Rightarrow\; 1 - \varepsilon\cos\varphi$
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \;=\; 1$	Ellipsengleichung für Ellipse in Mittelpunktlage
$\dfrac{p}{a} + \varepsilon^2 = 1$	Beziehung zwischen den Ellipsenparametern
$A_{\mathrm{E}} \;=\; \pi \cdot a \cdot b$	Flächeninhalt der Ellipse
φ (Brennpunktlage mit Pol in F_1)	Winkel in mathematisch positivem Drehsinn zwischen den Strecken $\overline{F_1 S_1}$ und $\overline{F_1 P}$, wenn P ein Punkt auf der Ellipse ist wie z. B. der Ort eines Planeten auf seiner Bahn (siehe Abbildung 3).

Die kreisförmige Planetenbahn betrachten wir als Grenzfall der elliptischen Planetenbahn. Bahnen mit $\varepsilon = 1$ sind Parabeln und Bahnen mit $\varepsilon > 1$ sind Hyperbeln. Parabeln und Hyperbeln sind keine geschlossenen Bahnen und demzufolge keine Planetenbahnen.

0.3 Herleitung der Funktion $r = r(\varphi)$ der Ellipse in Brennpunktlage

Anhand der Abbildung 4 leiten wir die Funktion $r = r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ für die Ellipse in Brennpunktlage mit dem Pol in F_1 (rechts) her.

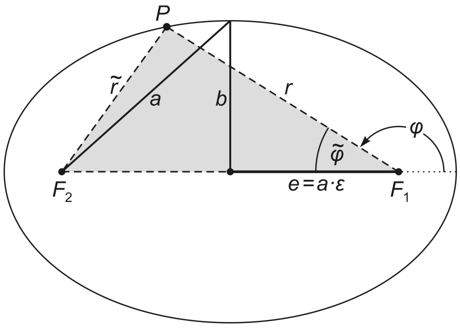


Abb. 4 Gemäß der Gärtnerkonstruktion von Ellipsen gilt hier $r + \tilde{r} = 2a$. Die Länge der Basis des grau hinterlegten Dreiecks beträgt $2 \cdot e = 2 \cdot a\varepsilon$.

Dabei gehen wir aus von dem grau hinterlegten Dreieck mit den Seitenlängen r, $\tilde{r}$ und $2\,a\varepsilon$. Unter Berücksichtigung von $\tilde{\varphi} = \pi - \varphi$ wenden wir den **Kosinussatz**[3] auf dieses Dreieck an:

$$\begin{aligned}
\tilde{r}^2 &= (2a\varepsilon)^2 + r^2 - 2 \cdot 2a\varepsilon\, r \cdot \cos\tilde{\varphi} && \Big|\; r + \tilde{r} = 2a \;\Leftrightarrow\; \tilde{r} = 2a - r \\
(2a - r)^2 &= 4a^2\varepsilon^2 + r^2 - 4a\,\varepsilon r \cdot \cos\tilde{\varphi} && \\
4a^2 - 4ar + r^2 &= r^2 + 4a^2\varepsilon^2 - 4a\,\varepsilon r \cdot \cos\tilde{\varphi} && \Big|\; -r^2\,,\;\; :4a \\
a - r &= a\varepsilon^2 - \varepsilon r \cdot \cos\tilde{\varphi} \qquad \Leftrightarrow && \\
a - a\varepsilon^2 &= r - r\varepsilon \cdot \cos\tilde{\varphi} \qquad \Rightarrow &&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r(1 - \varepsilon \cdot \cos\tilde{\varphi}) \;&=\; a(1 - \varepsilon^2) \;=\; p \;=\; \text{const} \qquad \Leftrightarrow \\
r \;&=\; \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\tilde{\varphi}}\,. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Mit $\cos\tilde{\varphi} = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$ erhalten wir schließlich

$$\boxed{r \;=\; r(\varphi) \;=\; \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}}\,. \;\Box \qquad (4)$$

(4) beschreibt Ellipsen in Brennpunktlage mit dem Pol in F_1 (rechts). Demzufolge beschreibt

$$r \;=\; r(\varphi) \;=\; \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

Ellipsen in Brennpunktlage mit dem Pol in F_2 (links).

[3]**Kosinussatz**: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ (zyklische Vertauschung der Variabeblen). Die Seite a liegt dem Winkel $\alpha = \measuredangle(b, c)$ gegenüber.

1 Erstes Kepler'sches Gesetz

Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Wir betrachten das System, in dem sich *ein* Planet der Masse m um die Sonne mit der Masse M bewegt, als abgeschlossen. Die Planetenbewegung erfolge unter dem Einfluss der Gravitationskraft der Sonne. Wegen der Erhaltungssätze (bezüglich Impuls, Drehimpuls und Gesamtenergie) sind dann der Bahndrehimpuls und die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie des Planeten als konstant anzunehmen.

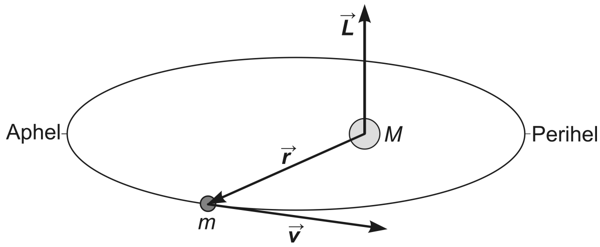


Abb. 5 Ein Planet (Masse m) bewegt sich auf einer ebenen elliptischen Bahn mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ um die Sonne (Masse M) und besitzt dabei den konstanten Bahndrehimpuls $\vec{L}$. Der Betrag r des Ortsvektors $\vec{r}$ ist der Abstand zwischen Sonne und Planet. Der Strahl, der von der Sonne ausgehend durch den Planeten verläuft, wird „Fahrstrahl" des Planeten genannt.

Ist der (Bahn-)Drehimpulsvektor

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \big(\text{Ortsvektor } \vec{r}\,,\ \text{Impulsvektor } \vec{p} = m\,\vec{v}\,,\ \text{Planetengeschwindigkeit } \vec{v}\,\big)$$

des Planeten konstant, muss die **Planetenbahn** in einer **Ebene** liegen, denn ein (zeitlich) konstanter Bahndrehimpulsvektor verändert sich weder in seiner Richtung noch in seinem Betrag. Aus der Beziehung

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m \cdot \big(\vec{r} \times \vec{v}\,\big) \tag{5}$$

wird jedoch ersichtlich, dass im Fall einer elliptischen Bahn trotz des konstanten Drehimpulses sowohl $\vec{r}$ als auch $\vec{v}$ nicht konstant sein können.[1] Trotzdem können wir mit (5) zeigen, dass $\vec{L}$ konstant ist. Dabei nutzen wir das Argument, dass die auf den Planeten einwirkende Gravitationskraft $\vec{F}$ der Sonne eine Zentralkraft ist. $\vec{F}$ ist immer vom Planeten zur Sonne gerichtet und demzufolge antiparallel zum Vektor $\vec{r}$, sodass das auf den Planeten wirkende Drehmoment $\vec{T}$ verschwindet:

$$\vec{r} \upharpoonleft\!\downharpoonright \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\vec{r} \times m\vec{v}\,\big) = \underbrace{\big(\vec{v} \times m\vec{v}\,\big)}_{=\vec{0}} + \big(\vec{r} \times m\vec{a}\,\big) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}\,.$$

Diese Tatsache setzt aber voraus, dass der Bahndrehimpuls des Planeten konstant ist:

$$\vec{T} = \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{L} = \text{const}\,.$$

Bewegt sich ein Planet in einem zentralen Kraftfeld, so ist sein Bahndrehimpuls konstant und die Planetenbahn liegt in einer Ebene.

[1] Auch im speziellen Fall der Kreisbahn wären $\vec{r}$ und $\vec{v}$ nicht konstant, weil sie stets ihre Richtung ändern.

1.1 Herleitung in Polarkoordinaten unter Berücksichtigung der Energieerhaltung

Aus dem **Energieerhaltungssatz**

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{ges}} = \text{const}$$

können wir die Beziehung zwischen φ und r ermitteln, woraus sich die elliptische Form der Planetenbahn ergibt. Um dies zu zeigen, rechnen wir bequem und allgemein in den ebenen Polarkoordinaten

$$\varphi \quad \text{und} \quad r = |\vec{\boldsymbol{r}}\,| = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2 \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\varphi} \ .$$

Daraus und mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d}{\mathrm{d}t}\,\varphi = \dot{\varphi} = \omega$ erhalten wir für die Geschwindigkeit des Planeten[2]

$$\vec{\boldsymbol{v}} \ = \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\boldsymbol{r}} \ = \ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \dot{r} \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{r} \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \dot{r} \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi \cdot \omega \\ \dot{r} \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \omega \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \ .$$

Das Quadrat der Bahngeschwindigkeit des Planeten ist damit

$$v^2 \ = \ v_x^2 + v_y^2 \ = \ \dot{r}^2 + r^2 \cdot \omega^2 \ . \tag{6}$$

Weiterhin benötigen wir den Betrag L des Drehimpulses $\vec{\boldsymbol{L}}$. Legen wir die Bahnebene in die (x, y)-Ebene des Koordinatensystems, so steht $\vec{\boldsymbol{L}}$ senkrecht auf der Bahnebene und besitzt demzufolge nur die z-Komponente gemäß

$$\vec{\boldsymbol{L}} \ = \ \vec{\boldsymbol{r}} \times m\vec{\boldsymbol{v}} \ = \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m \cdot \dot{x} \\ m \cdot \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \cdot m \cdot \dot{y} - y \cdot m \cdot \dot{x} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_z \end{pmatrix} \ .$$

In Polarkoordinaten ausgedrückt ist dann der Betrag von $\vec{\boldsymbol{L}}$

$$\begin{aligned} L \ = \ L_z \ &= \ x \cdot m \cdot \dot{y} - y \cdot m \cdot \dot{x} \\ &= \ m \cdot r \cos\varphi \left(\dot{r} \sin\varphi + r \cos\varphi \cdot \omega\right) \ - \ m \cdot r \sin\varphi \left(\dot{r} \cos\varphi - r \sin\varphi \cdot \omega\right) \ , \end{aligned}$$

$$\boxed{L \ = \ m \cdot r^2 \cdot \omega \ = \ \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \omega \ = \ \frac{L}{m \cdot r^2}} \ . \tag{7}$$

Mit (7) erhalten wir die zeitliche Änderung von r in der Form

$$\dot{r} \ = \ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \ = \ \frac{\mathrm{d}r(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \ = \ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \omega \ = \ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{L}{m \cdot r^2} \ . \tag{8}$$

Die kinetische Energie des Planeten ist also unter Berücksichtigung von (6), (7) und (8)

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} \ &= \ \frac{1}{2}\,m\,v^2 \ = \ \frac{1}{2}\,m\left[\dot{r}^2 + r^2 \cdot \omega^2\right]^2 \\ &= \ \frac{1}{2}\,m\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{L}{m \cdot r^2}\right)^2 + r^2 \cdot \left(\frac{L}{m \cdot r^2}\right)^2\right] \ , \\ E_{\text{kin}}(r, \varphi) \ &= \ \frac{1}{2}\left[\frac{L^2}{m\,r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{m\,r^2}\right] \ . \end{aligned}$$

[2]Die zeitliche Ableitung einer Größe wird in der Physik aus Gründen der Bequemlichkeit oft mit einem Punkt über der betreffenden Größe symbolisiert.

Die potenzielle Energie[3] des Planeten erhalten wir aus der Gravitationskraft wie folgt:

$$E_{\text{pot}}(r) \;=\; \int F(r)\,\mathrm{d}r \;=\; \int GmM \cdot r^{-2}\,\mathrm{d}r \;=\; -GmM \cdot r^{-1}\;.$$

Jetzt können wir die aus der Planetenbahn resultierende Gesamtenergie des Planeten in Polarkoordinaten angeben:

$$\boxed{E_{\text{ges}}(r,\varphi) \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{L^2}{m\,r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{m\,r^2}\right] \;-\; GmM \cdot \frac{1}{r}}\;. \tag{9}$$

Um am Ende den Zusammenhang $r = r(\varphi)$ zu erhalten, müssen wir zunächst (9) nach $\mathrm{d}\varphi$ auflösen. Wir multiplizieren (9) also zuerst mit $\frac{2}{m}$ und führen dann die entsprechenden Äquivalenzumformungen durch:

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 \;=\; \frac{\dfrac{2}{m}\,E_{\text{ges}} + 2GM \cdot \dfrac{1}{r} - \dfrac{L^2}{m^2 \cdot r^2}}{\dfrac{L^2}{m^2 \cdot r^4}} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{d}\varphi \;=\; \mathrm{d}\varphi(r) \;=\; \frac{\dfrac{L}{m \cdot r^2}}{\sqrt{\dfrac{2\,E_{\text{ges}}}{m} + 2GM \cdot \dfrac{1}{r} - \dfrac{L^2}{m^2 \cdot r^2}}} \cdot \mathrm{d}r\;. \tag{10}$$

Mit den Vereinfachungen

$$\kappa \;=\; \sqrt{\frac{2\,E_{\text{ges}}}{m} + \frac{G^2\,M^2\,m^2}{L^2}} \;=\; \text{const}\,, \qquad g \;=\; g(r) \;=\; \frac{GMm}{L} - \frac{L}{m \cdot r}$$

resultiert aus (10)

$$\boxed{\mathrm{d}\varphi \;=\; \frac{\frac{L}{m\cdot r^2}}{\sqrt{\kappa^2 - g^2}} \cdot \mathrm{d}r}$$

Dieses Resultat lässt sich mit der Substitution

$$\frac{\mathrm{d}g(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{L}{m \cdot r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}g}{\frac{L}{m\cdot r^2}}$$

und mit $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$ (siehe Integraltabelle in Tafelwerken) leicht integrieren:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathrm{d}\varphi \;=\; \int_{r_0}^{r} \frac{\frac{L}{m\cdot r^2}}{\sqrt{\kappa^2 - g^2}} \cdot \mathrm{d}r \;=\; \int_{g_0}^{g} \frac{\frac{L}{m\cdot r^2}}{\sqrt{\kappa^2 - g^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\frac{L}{m\cdot r^2}} \;=\; \int_{g_0}^{g} \frac{\mathrm{d}g}{\sqrt{\kappa^2 - g^2}}\;,$$

$$\varphi - \varphi_0 \;=\; \arcsin\left(\frac{g}{\kappa}\right) - \arcsin\left(\frac{g_0}{\kappa}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \underbrace{-\varphi_0 + \arcsin\left(\frac{g_0}{\kappa}\right)}_{k} \;=\; \arcsin\left(\frac{g}{\kappa}\right)\;. \tag{11}$$

Die beiden unteren Integrationsgrenzen φ_0 und r_0 können wir als *beliebige*, feste Konstanten betrachten und zusammenfassen zu

$$k \;=\; \arcsin\left(\frac{g_0}{\kappa}\right) - \varphi_0 \;=\; -\frac{\pi}{2}\,,$$

[3] Siehe Abschnitt 5.2, „Zur Erinnerung: Die potentielle Energie beim freien Fall“.

sodass aus (11)

$$\varphi + k \;=\; \varphi + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \arcsin\left(\frac{g}{\kappa}\right)$$

resultiert. Wenn wir davon die Umkehrfunktion bilden und das entsprechende Additionstheorem

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) \;&=\; \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \quad \Rightarrow \\ \sin\left[\varphi+k\right] \;=\; \sin\left[\varphi + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \;&=\; \sin\varphi\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\varphi\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \;=\; -\cos\varphi \end{aligned} \tag{12}$$

berücksichtigen, erhalten wir

$$\varphi + k \;=\; \arcsin\left(\frac{g}{\kappa}\right) \quad\longleftrightarrow\quad \sin\left[\varphi+k\right] \;=\; \frac{g}{\kappa} \quad \overset{(12)}{\Longrightarrow}$$

$$\boxed{\frac{g(r)}{\kappa} \;=\; -\cos\varphi}\;.$$

Dann führen wir die Resubstitution für g durch und lösen mit einigen vereinfachenden Äquivalenzumformungen nach r auf:

$$\begin{aligned} g(r) \;&=\; -\kappa\cos\varphi \quad \Rightarrow \\ \frac{GMm}{L} - \frac{L}{m\cdot r} \;&=\; -\kappa\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \\ \frac{L}{m\cdot r} \;&=\; \frac{GMm}{L} + \kappa\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \\ r \;&=\; \frac{\frac{L}{m}}{\frac{GMm}{L} + \kappa\cdot\cos\varphi} \;=\; \frac{\frac{L}{m}}{\frac{GMm}{L}\left(1 + \frac{\kappa\cdot L}{GMm}\cdot\cos\varphi\right)}\,, \end{aligned}$$

$$r \;=\; \frac{\dfrac{L^2}{GMm^2}}{1 + \dfrac{\kappa\cdot L}{GMm}\cdot\cos\varphi}\,.$$

Setzen wir schließlich

$$p \;:=\; \frac{L^2}{GMm^2}\,, \qquad \varepsilon \;:=\; \frac{\kappa\cdot L}{GMm}\,,$$

resultiert

$$\boxed{r \;=\; r(\varphi) \;=\; \frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos\varphi}}\,. \tag{13}$$

Gleichung (13) hat die Form der Polardarstellung einer Ellipse mit dem Pol im Brennpunkt F_1 (rechts). Die Bedingung dafür, dass es sich hier tatsächlich um eine Ellipse handelt, ist $0 \leq \varepsilon < 1$. Die Größen $M,\ m,\ E_{\text{ges}},\ L,\ \kappa = \text{const}$ und damit $p = \text{const}$ und $\varepsilon = \text{const}$ sind vom System Planet-Sonne vorgegeben.

1.2 Herleitung unter Anwendung der Vektoranalysis

Achtung! In diesem Abschnitt werden wir die Ableitung nach der Zeit mit dem Strichindex kenntlich machen und nicht, wie in der Physik üblich, mit dem Punktindex.

Mit Hilfe der Vektoranalysis lässt sich das erste Kepler'sche Gesetz eleganter herleiten. Dafür definieren wir uns zunächst die Vektoren $\vec{\boldsymbol{w}}$, $\vec{\boldsymbol{e}}_r$ und $\vec{\boldsymbol{u}}$:

- $\vec{\boldsymbol{w}}$
  Im Kapitel 1 hatten wir die Konstanz des Drehimpulses gemäß $\vec{\boldsymbol{L}} = m\left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\right) = \text{const}$ festgestellt. Wegen $m = \text{const}$ folgt daraus

  $$\frac{\vec{\boldsymbol{L}}}{m} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{w}} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left|\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\right| = \left|\vec{\boldsymbol{w}}\right| = w = \text{const}\,, \\ \vec{\boldsymbol{w}}\,' = \vec{\boldsymbol{0}}\,. \end{cases}$$

  Der konstante Vektor $\vec{\boldsymbol{w}}$ steht also stets senkrecht auf der Bahnebene und seine zeitliche Ableitung ist der Nullvektor. Mit (7) gilt außerdem

  $$\frac{L}{m} = w = r^2 \cdot \dot{\varphi}\,.$$

- $\vec{\boldsymbol{e}}_r$ (radialer Einheitsvektor)
  Es sei $$\vec{\boldsymbol{e}}_r := \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{r}} = r \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_r\,,$$
  wobei $\vec{\boldsymbol{r}}$ der Vektor von der Sonne zum Planeten darstellt. $\vec{\boldsymbol{e}}_r$ besitzt folglich die gleiche Richtung und Orientierung wie $\vec{\boldsymbol{r}}$ und liegt stets in der Bahnebene. Somit liegt auch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{e}}_r = \vec{\boldsymbol{e}}_r\,'$ immer in der Bahnebene.
  Wegen $|\vec{\boldsymbol{e}}_r| = 1 = \text{const}$ verändert $\vec{\boldsymbol{e}}_r$ mit $\vec{\boldsymbol{r}}$ zwar seine Richtung, aber nicht seine Länge, weshalb $\vec{\boldsymbol{e}}_r\,'$ stets senkrecht auf $\vec{\boldsymbol{e}}_r$ steht. Es gilt nämlich allgemein

  $$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\,' = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\,' + \vec{\boldsymbol{a}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\right)' = \frac{1}{2}\left(|\vec{\boldsymbol{a}}\,|^2\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}\,| \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}\,|' = |\vec{\boldsymbol{a}}\,| \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}\,|'\,.$$

  Angewandt auf unseren Einheitsvektor $\vec{\boldsymbol{e}}_r$ mit

  $$|\vec{\boldsymbol{e}}_r| = 1 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad |\vec{\boldsymbol{e}}_r|' = 0$$

  bedeutet das:

  $$\vec{\boldsymbol{e}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_r\,' = |\vec{\boldsymbol{e}}_r| \cdot |\vec{\boldsymbol{e}}_r|' = 1 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{e}}_r\,' \perp \vec{\boldsymbol{e}}_r \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{e}}_r \perp \vec{\boldsymbol{e}}_r\,.$$

- $\vec{\boldsymbol{u}}$
  Es gilt

  $$\vec{\boldsymbol{e}}_r\,' = \left(\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}\right)' = \frac{r \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,' - r\,' \cdot \vec{\boldsymbol{r}}}{r^2} \quad \text{(Quotientenregel)} \quad \Rightarrow$$

  $$\left|\vec{\boldsymbol{e}}_r\,'\right| = \left|\vec{\boldsymbol{e}}_r\,' \times \vec{\boldsymbol{e}}_r\right| = \left|\frac{r \cdot \vec{\boldsymbol{r}}\,' - r\,' \cdot \vec{\boldsymbol{r}}}{r^2} \times \vec{\boldsymbol{e}}_r\right| = \frac{1}{r^2}\left|r \cdot \left(\vec{\boldsymbol{r}}\,' \times \vec{\boldsymbol{e}}_r\right) - r\,' \cdot \underbrace{\left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{e}}_r\right)}_{=\vec{\boldsymbol{0}}}\right|$$

  $$= \frac{1}{r}\left|\vec{\boldsymbol{r}}\,' \times \vec{\boldsymbol{e}}_r\right| = \frac{1}{r}\left|\vec{\boldsymbol{r}}\,' \times \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}\right| = \frac{1}{r^2}\left|\vec{\boldsymbol{r}}\,' \times \vec{\boldsymbol{r}}\right| = \frac{1}{r^2}\left|\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\right| = \frac{1}{r^2}\left|\vec{\boldsymbol{w}}\right|\,,$$

  $$\boxed{\left|\vec{\boldsymbol{e}}_r\,'\right| = \frac{w}{r^2}}\,.$$

Damit können wir jetzt den Vektor

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{u}} := \frac{\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}}{G \cdot M} - \vec{\boldsymbol{e}}_r}$$

erläutern:

* $\vec{\boldsymbol{u}}$ liegt in der Bahnebene, weil $\big(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}\big) \perp \vec{\boldsymbol{w}}$ und $\vec{\boldsymbol{e}}_r \perp \vec{\boldsymbol{w}}$ gilt.
* $\vec{\boldsymbol{u}} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{u}}\,' = \vec{\boldsymbol{0}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{u}}\,' &= \frac{1}{GM}\big(\vec{\boldsymbol{v}}\,' \times \vec{\boldsymbol{w}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}\,'\big) - \vec{\boldsymbol{e}}_r\,' && \Big|\ \vec{\boldsymbol{v}}\,' = \vec{\boldsymbol{r}}\,'' ,\ \ \vec{\boldsymbol{w}}\,' = \vec{\boldsymbol{0}} \\
&= \frac{1}{GM}\big(\vec{\boldsymbol{r}}\,'' \times \vec{\boldsymbol{w}}\big) - \vec{\boldsymbol{e}}_r\,' && \Big|\ \vec{\boldsymbol{r}}\,'' = -\frac{GM}{r^3}\,\vec{\boldsymbol{r}} \ \text{(Newton'sches Kraftgesetz)} \\
&= -\frac{1}{r^3}\big(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{w}}\big) - \vec{\boldsymbol{e}}_r\,' && \Big|\ \vec{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r} \ \Leftrightarrow\ \vec{\boldsymbol{r}} = r\,\vec{\boldsymbol{e}}_r \,,
\end{aligned}$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \frac{1}{r^2}\big(\vec{\boldsymbol{w}} \times \vec{\boldsymbol{e}}_r\big) - \vec{\boldsymbol{e}}_r\,' = \vec{\boldsymbol{0}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{r^2}\big(\vec{\boldsymbol{w}} \times \vec{\boldsymbol{e}}_r\big) \equiv \vec{\boldsymbol{e}}_r\,' \,.$$

Die beiden Vektoren $\frac{1}{r^2}\big(\vec{\boldsymbol{w}} \times \vec{\boldsymbol{e}}_r\big)$ und $\vec{\boldsymbol{e}}_r\,'$ sind tatsächlich identisch, denn:

* beide haben den gleichen Betrag $\frac{w}{r^2}$,
* beide stehen senkrecht auf $\vec{\boldsymbol{w}}$ und auf $\vec{\boldsymbol{e}}_r$,
* beide besitzen die gleiche Richtung und Orientierung, nämlich die von $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Der Vektor $\vec{\boldsymbol{u}}$ ermöglicht uns, die Planetenbahn im sog. $\frac{1}{r^2}$-Kraftfeld der Sonne zu ermitteln: Mit $|\vec{\boldsymbol{u}}\,| = u = \text{const}$ erhalten wir für das Skalarprodukt $\vec{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{r}}$ einerseits

$$\vec{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{r}} = u \cdot r \cdot \cos\varphi \tag{14}$$

und andererseits unter Berücksichtigung des Spatprodukts $\big[\vec{\boldsymbol{r}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}\,\big]$

$$\vec{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}}{GM} - \vec{\boldsymbol{e}}_r\right) \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{\cdot} \big(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}\big)}{GM} - r\,\vec{\boldsymbol{e}}_r \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\overbrace{\big(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\big)}^{=\vec{\boldsymbol{w}}} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{w}}}{GM} - r \cdot 1 \,,$$

$$\vec{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{r}} = \frac{w^2}{GM} - r \,. \tag{15}$$

Gleichsetzen von (14) und (15) ergibt

$$u \cdot r \cdot \cos\varphi = \frac{w^2}{GM} - r \,.$$

Und mit den Konstanten

$$\varepsilon := \big|\vec{\boldsymbol{u}}\big| = u \geq 0 \qquad \text{und} \qquad p := \frac{w^2}{GM} = \frac{L^2}{GM \cdot m^2} \tag{16}$$

resultiert schließlich

$$r \cdot \varepsilon \cdot \cos\varphi = p - r \quad \Leftrightarrow \quad r\,(1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi) = p \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi} \,, \quad \varepsilon \geq 0} \,. \ \square$$

Es handelt sich hier wieder um die Polardarstellung einer Ellipse mit dem Pol im Brennpunkt F_1 (rechts). Weil φ der Winkel zwischen $\vec{\boldsymbol{u}}$ und $\vec{\boldsymbol{r}}$ ist, muss $\vec{\boldsymbol{u}}$ ein von F_1 zum Scheitel S_1 (Perihel) der Bahnellipse gerichteter und orientierter Vektor sein, denn bei $\cos(\varphi) = \cos(0) = 1$ hat r sein Minimum.

1.3 Zusammenhang zwischen Exzentrizität und Gesamtenergie

In diesem Abschnitt demonstrieren wir den Zusammenhang zwischen der Gesamtenergie E_{ges} und der numerischen Exzentrizität ε. Dabei gehen wir aus von (16), d. h. von

$$\varepsilon := \big|\vec{\boldsymbol{u}}\big| = u \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 = \vec{\boldsymbol{u}}^{\,2} \,, \qquad \vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}}{GM} - \vec{\boldsymbol{e}}_r$$

und schreiben

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 - 1 \;&=\; \left(\frac{\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}}{GM} - \vec{\boldsymbol{e}}_r\right)^2 - 1 \\
&=\; \left(\frac{\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}}{GM}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}}{GM} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{e}}_r + \vec{\boldsymbol{e}}_r^{\,2} - 1 && \Big|\; \vec{\boldsymbol{v}} \perp \vec{\boldsymbol{w}}\,,\;\; \vec{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}\,,\;\; \vec{\boldsymbol{e}}_r^{\,2} = 1 \\
&=\; \frac{v^2 \cdot w^2}{G^2M^2} - \frac{2}{GM} \cdot \big(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}\big) \boldsymbol{\cdot} \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r} && \Big|\; \text{Spatprodukt } \big[\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{r}}\big] = \big(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\big) \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{w}} \\
&=\; \frac{v^2 \cdot w^2}{G^2M^2} - \frac{2}{r \cdot GM} \cdot \big(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\big) \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{w}} && \Big|\; \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{w}} \\
&=\; \frac{v^2 \cdot w^2}{G^2M^2} - \frac{2\,w^2}{r \cdot GM} \\
&=\; \frac{2\,w^2}{G^2M^2} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}\right) \\
&=\; \frac{2\,w^2}{G^2M^2} \left(\frac{E_{\text{kin}}}{m} + \frac{E_{\text{pot}}}{m}\right) \,,
\end{aligned}$$

$$\boxed{\varepsilon^2 - 1 \;=\; \frac{2\,w^2}{G^2M^2m} \cdot E_{\text{ges}}} \,. \tag{17}$$

Die numerische Exzentrizität ε ist für die verschiedenen Bahnformen (Kegelschnitte) bekannt, sodass wir aus (17) die Beziehung zwischen Bahnform und Gesamtenergie E_{ges} ablesen können:

$$\begin{array}{lcccl}
\text{Kreisbahn} & \Longleftrightarrow & \varepsilon = 0 & \Longleftrightarrow & E_{\text{ges}} < 0 \\[1ex]
\text{Ellipsenbahn} & \Longleftrightarrow & 0 < \varepsilon < 1 & \Longleftrightarrow & E_{\text{ges}} < 0 \\[1ex]
\text{Parabelbahn} & \Longleftrightarrow & \varepsilon = 1 & \Longleftrightarrow & E_{\text{ges}} = 0 \\[1ex]
\text{Hyperbelbahn} & \Longleftrightarrow & \varepsilon > 1 & \Longleftrightarrow & E_{\text{ges}} > 0
\end{array}$$

Bewegt sich ein Planet oder auch bespielsweise ein Satellit auf einer **Kreisbahn** um einen Zentralkörper, so heben sich deren Zentrifugalkraft $\frac{m\,v^2}{r}$ und deren Gravitationskraft $\frac{GMm}{r^2}$ stets gegenseitig auf und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{m\,v^2}{r} - \frac{GMm}{r^2} \;&=\; 0 \\
\frac{m\,v^2}{r} \;&=\; \frac{GMm}{r^2} \\
\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2}\,mv^2}_{E_{\text{kin}}} \;&=\; \frac{1}{2}\underbrace{\frac{GMm}{r}}_{-E_{\text{pot}}} \qquad \Rightarrow \qquad |E_{\text{pot}}| \;=\; 2 \cdot E_{\text{kin}} \,.
\end{aligned}$$

Der Betrag der (negativen) potentiellen Energie eines Planeten auf einer Kreisbahn ist doppelt so groß wie seine kinetische Energie.

2 Zweites Kepler'sches Gesetz

Flächensatz: Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeitintervallen gleiche Flächeninhalte.

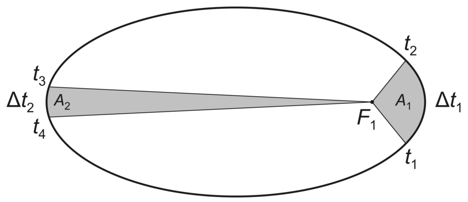


Abb. 6 Flächensatz: $\Delta t_1 = \Delta t_2 \;\Leftrightarrow\; A_1 = A_2$. Daraus wird ersichtlich: Im Perihel (Scheitel S_1) hat die Bahngeschwindigkeit ihr Maximmum und im Aphel (Scheitel S_2) ihr Minimum.

Wenn $\vec{\boldsymbol{A}}$ der senkrecht auf der Planetenbahnellipse stehende Flächenvektor ist, dann ist

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{\vec{\boldsymbol{L}}}{m}\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

davon ein vektorielles Flächenelement (siehe Abbildung 7) und

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\right) = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{w}}$$

die pro Zeiteinheit überstrichene Fläche. Wir hatten aber im Kapitel 1 gezeigt, dass der Bahndrehimpuls des Planeten konstant ist, sodass

$$m = \text{const} \quad \text{und} \quad \vec{\boldsymbol{L}} = m \cdot \underbrace{\left(\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\right)}_{\vec{\boldsymbol{w}}} = m \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{w}} = \text{const}\,.$$

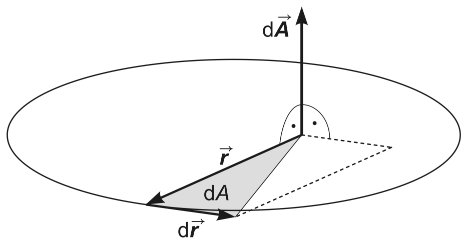


Abb. 7 Wenn der Flächenvektor $\vec{\boldsymbol{A}}$ senkrecht auf der Bahnebene steht, muss auch der Flächenvektor $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}$ eines Teilstücks der von der Bahn eingeschlossenen ebenen Fläche auf dieser senkrecht stehen.

Wegen $\vec{\boldsymbol{w}} = \text{const}$ gilt somit für den pro Zeiteinheit überstrichenen Flächeninhalt

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{w}}\right| = \frac{1}{2}w = \text{const}\,. \;\square$$

Wir können dieses Ergebnis verdeutlichen, wenn wir den überstrichenen Flächeninhalt über ein Zeitintervall Δt integrieren:

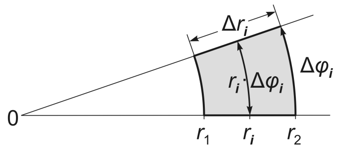
$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}w\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\Delta A}\mathrm{d}A = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{1}{2}w\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\boxed{\Delta A = \frac{1}{2}w \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta A \propto \Delta t}\,.$$

Wie man sieht, leiten sich das 2. Kepler'sche Gesetz bzw. der Flächensatz unmittelbar aus der Konstanz des Bahndrehimpulses ab.

Zur Erinnerung: Flächenberechnung in den ebenen Polarkoordinaten r und φ

Das in der folgenden Abbildung grau hinterlegte ebene Flächenstück besitzt den Flächeninhalt A_i gemäß



$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{1}{2}\Delta\varphi_i \cdot r_2^2 - \frac{1}{2}\Delta\varphi_i \cdot r_1^2 = \Delta\varphi_i \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \\
&= \Delta\varphi_i \cdot \underbrace{(r_2 - r_1)}_{\Delta r_i} \cdot \underbrace{\frac{(r_2 + r_1)}{2}}_{r_i} , \\
A_i &= r_i \cdot \Delta r_i \cdot \Delta\varphi_i \,.
\end{aligned}
$$

So lässt sich der Flächeninhalt jeder Fläche A näherungsweise durch

$$A \;\approx\; \sum_i A_i \;=\; \sum_i r_i \cdot \Delta r_i \cdot \Delta\varphi_i$$

zusammensetzen. Je kleiner wir dabei die Flächenstücke wählen, desto genauer wird das Ergebnis. Das exakte Ergebnis erhalten wir schließlich, wenn wir die Flächenelemente $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ „aufsummieren“, indem wir das folgende Flächenintegral bilden:

$$A \;=\; \int \mathrm{d}A \;=\; \int\limits_{\varphi}\int\limits_{r} r \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi \,.$$

Bei der Flächenberechnung im Fall des Flächensatzes mit der Bahnfunktion $r = r(\varphi)$ wäre dann bezüglich des sog. Fahrstrahls der Länge $r(\varphi)$ zunächst von $r_1 = 0$ bis $r_2 = r(\varphi)$ und anschließend von φ_1 bis φ_2 zu integrieren:

$$A \;=\; \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{0}^{r(\phi)} r\;\mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi \;=\; \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2}\,r^2(\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}\widetilde{A} = \frac{1}{2}\,r^2(\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi \,.$$

Man beachte beim Flächenelement $\mathrm{d}\widetilde{A}$ den Faktor $\frac{1}{2}$.

3 Drittes Kepler'sches Gesetz – ursprüngliche Form

Die Quadrate der Umlaufzeiten T der Planeten verhalten sich zueinander wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen a ihrer Bahnellipsen.

$$\frac{T_1^2}{T_n^2} = \frac{a_1^3}{a_n^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{T^2}{a^3} = \text{const}\ .$$

Im Kapitel 2 hatten wir für das Flächenelement der Bahnellipse $\mathrm{d}A = \frac{1}{2} \cdot w \cdot \mathrm{d}t$ gefunden. Wenn wir über die gesamte Umlaufzeit T integrieren, erhalten wir demzufolge für den Flächeninhalt A_E der Bahnellipse

$$A_E = \pi\, a\, b = \int_0^T \frac{1}{2}\, w\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\, w\, T\ . \quad \Rightarrow$$

$$\pi^2\, a^2 \cdot b^2 = \frac{1}{4} \cdot w^2 \cdot T^2\ . \tag{19}$$

Mit $p = \frac{b^2}{a} \Leftrightarrow b^2 = a\,p$ und mit (16), nämlich $p = \frac{w^2}{G\,M} \Leftrightarrow w^2 = p\,GM$, resultiert aus (19)

$$\pi\, a^2 \cdot a\, p = \frac{1}{4} \cdot p\, GM \cdot T^2 \quad \Big|\ : p$$

$$\pi \cdot a^3 = \frac{1}{4}\, GM \cdot T^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{GM}\ , \quad M \ggg m}\ .$$

Der Quotient $\frac{T^2}{a^3}$ hängt hier nur von der Masse M des Zentralsterns bzw. allgemein des Zentralkörpers und nicht von der Masse des umlaufenden Körpers der Masse m ab und ist demzufolge für alle den Zentralkörper umlaufenden Planeten oder Trabanten gleich. Und wie man sieht, lässt sich die Masse des Zentralkörpers berechnen, wenn a und T der Bahnellipse nur von einem seiner umlaufenden Körper bekannt sind.

4 Herleitung des Newton'schen Gravitationsgesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen

Siehe auch Siegfried Großmann, Mathematischer Einführungskurs für die Physik, 8. Auflage, Teubner-Verlag, Stuttgart, Leipzig, 2000, Seite 87 und Seite 88.

In diesem Kapitel gehen wir aus von den folgenden Gegebenheiten und Festlegungen:

- Polargleichung der Ellipse mit dem Pol in F_1 :

$$r \;=\; r(\varphi) \;=\; \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\;. \tag{20}$$

- Die Ellipsenparameter e, p bzw. ε, p sind die Alternativen zu den Ellipsenparametern a, b .

- 1. Kepler'sches Gesetz: Planetenbahnen sind Ellipsen mit

$$\text{Perihel bei } \varphi = 0\,, \qquad \text{Aphel bei } \varphi = \pi\,.$$

- 2. Kepler'sches Gesetz: Drehimpulserhaltung und

$$\boxed{\text{Flächensatz:}\quad \mathrm{d}A \;=\; \frac{1}{2}\cdot r\cdot r\,\mathrm{d}\varphi \;=\; \mathrm{const}\cdot\mathrm{d}t}\;. \tag{21}$$

Aus (21) folgt

$$r^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \;=\; \underbrace{2\cdot\mathrm{const}}_{\frac{L}{m}} \quad\Rightarrow\quad \dot\varphi\, r^2 \;\equiv\; \frac{L}{m} \qquad \Bigg|\;\left[\frac{1}{m}\cdot L\right] = \frac{1}{\mathrm{kg}}\cdot\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\;. \tag{22}$$

Wie man nach Äquivalenzumformung von (22) feststellt, besitzt der Planet unter Berücksichtigung der Konstanz seiner Masse m und seines Drehimpulses L die

$$\boxed{\text{Winkelgeschwindigkeit}\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \;=\; \dot\varphi \;=\; \omega \;=\; \frac{L}{m\,r^2}}\;. \tag{23}$$

Diese Beziehung hatten wir bereits mit (7) im Abschnitt 1.1 hergeleitet und werden sie im Folgenden vereinfachend anwenden. Außerdem beschreibt sie die Verhältnisse

$$\begin{array}{lclcl} \text{im Perihel} & : & r = \min(r) & \Leftrightarrow & \dot\varphi = \max(\dot\varphi)\;, \\ \text{im Aphel} & : & r = \max(r) & \Leftrightarrow & \dot\varphi = \min(\dot\varphi)\;. \end{array}$$

Wir legen die Planetenbahn in die (x, y)-Ebene des $\mathbb{R}^3$ und rechnen in kartesischen Koordinaten gemäß

$$\vec{\boldsymbol{r}} \;=\; \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; r\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r\;,$$

wobei $\vec{\boldsymbol{r}}$ der Ortsvektor des Planeten in jenem kartesischen Koordinatensystem ist, bei dem sich die Sonne im Brennpunkt F_1 (rechts) der Bahnellipse befindet. r ist demzufolge der Abstand des Planeten von der Sonne. φ und r sind zeitabhängig gemäß $\varphi = \varphi(t) \;\Rightarrow\; r = r\big(\varphi(t)\big)$, sodass (20) die Form

$$r\big(\varphi(t)\big) \;=\; \frac{p}{1+\varepsilon\cos\big(\varphi(t)\big)} \;=\; p\,\big[1+\varepsilon\cos\big(\varphi(t)\big)\big]^{-1}$$

erhält. Die zeitliche Änderung von r ist demzufolge

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{\mathrm{d}r\big(\varphi(t)\big)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{p}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\cdot(-\varepsilon\sin\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \\
\dot{r} &= \frac{p}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\cdot\varepsilon\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\,. \qquad (24)
\end{aligned}$$

(24) lässt sich durch Substitution von $\dot{\varphi}$, also mit

$$\frac{L}{m} = \dot{\varphi}\cdot r^2 = \dot{\varphi}\cdot\frac{p^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} \quad\Leftrightarrow\quad \dot{\varphi} = \frac{L}{m}\cdot\frac{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}{p^2}$$

vereinfachen:

$$\dot{r} = \frac{p}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\cdot\varepsilon\sin\varphi\cdot\frac{L}{m}\cdot\frac{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}{p^2}\,,$$

$$\boxed{\dot{r} = \frac{L}{m}\cdot\frac{\varepsilon}{p}\cdot\sin\big(\varphi(t)\big)}\,.$$

$\dot{r}$ ist nur die zeitliche Änderung des Abstands zwischen Sonne und Planet. Die Geschwindigkeit $\dot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \vec{\boldsymbol{v}}$ des Planeten im $\mathbb{R}^3$ jedoch erhalten wir mit

$$\vec{\boldsymbol{r}} = r\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r \quad\Rightarrow\quad \vec{\boldsymbol{v}} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}\big(\varphi(t)\big) \;=\; \dot{r}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r + r\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{e}}}_r\big(\varphi(t)\big)\,,$$

$$\vec{\boldsymbol{e}}_r\big(\varphi(t)\big) = \begin{pmatrix}\cos\big(\varphi(t)\big)\\ \sin\big(\varphi(t)\big)\\ 0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{\boldsymbol{e}}}_r\big(\varphi(t)\big) = \begin{pmatrix}-\sin\big(\varphi(t)\big)\cdot\dot{\varphi}\\ \cos\big(\varphi(t)\big)\cdot\dot{\varphi}\\ 0\end{pmatrix} = \dot{\varphi}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

sowie mit (20) und (23) wie folgt:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{\boldsymbol{r}}} &= \dot{r}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r + r\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{e}}}_r\big(\varphi(t)\big) \\
&= \frac{L}{m}\cdot\frac{\varepsilon}{p}\cdot\sin\varphi\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} + r\cdot\dot{\varphi}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} \\
&= \frac{L}{m}\cdot\frac{\varepsilon}{p}\cdot\sin\varphi\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} + r\cdot\frac{L}{m\cdot r^2}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} \\
&= \frac{L}{m}\cdot\frac{\varepsilon}{p}\cdot\sin\varphi\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} + \frac{L}{m}\cdot\frac{1}{r}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} \\
&= \frac{L}{m}\cdot\frac{\varepsilon}{p}\cdot\sin\varphi\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} + \frac{L}{m}\cdot\frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} \\
&= \frac{L}{m\,p}\left[\begin{pmatrix}\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi\\ \varepsilon\sin^2\varphi\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\varepsilon\cos\varphi\sin\varphi\\ \varepsilon\cos^2\varphi\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\right]\,,
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}} \;=\; \dot{\vec{\boldsymbol{r}}} \;=\; \frac{L}{m\,p}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \varepsilon + \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}\;.$$

Die Ableitung von $\vec{\boldsymbol{v}}$ nach der Zeit ergibt die Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}} = \ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}$ des Planeten im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{v}} \;=\; \frac{L}{m\,p}\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\dot{\varphi} \;\overset{(23)}{=}\; -\frac{L}{m\,p}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{\boldsymbol{e}}_r}\cdot\frac{L}{m\,r^2}\;,$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; -\frac{L^2}{m^2\,p}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r \quad\Rightarrow\quad \vec{\boldsymbol{a}} \upharpoonleft\!\downharpoonright \vec{\boldsymbol{e}}_r}\;.$$

Nun ist aber die Kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$, die am Planeten angreift, gleich Planetenmasse m mal Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$, sodass

$$\vec{\boldsymbol{F}} \;=\; m\cdot\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; -m\cdot\frac{L^2}{m^2\,p}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r \;=\; -\frac{L^2}{m\,p}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r \;=\; -\,\mathrm{const}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r\;.$$

Setzen wir

$$\frac{L^2}{m\,p} \;=\; \mathrm{const} \;=\; G M\, m \tag{25}$$

mit der Gravitationskonstante G und der Sonnenmasse M, so resultiert schließlich das **Newton'sche Gravitationsgesetz**

$$\vec{\boldsymbol{F}} \;=\; -\,GMm\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r \quad\Rightarrow\quad \vec{\boldsymbol{F}} \upharpoonleft\!\downharpoonright \vec{\boldsymbol{e}}_r\;.$$

Wie man sieht, handelt es sich bei der Gravitationskraft $\vec{\boldsymbol{F}}$ um eine Zentralkraft, denn $\vec{\boldsymbol{F}}$ verläuft entgegesetzt zu dem von der Sonne zum Planeten gerichteten Einheitsvektor $\vec{\boldsymbol{e}}_r$. Weiterhin finden wir aus (25) die hilfreichen Beziehungen[1]

$$GM = \frac{L^2}{m^2\,p} \qquad \text{und} \qquad p = \frac{L^2}{GM\,m^2}\;.$$

[1] Siehe (16) im Abschnitt 1.2.

5 Anhang

5.1 Drittes Kepler'sches Gesetzes in seiner allgemeinen Form

Wie im Abschnitt 0.1 bereits diskutiert, gelten die Kepler'schen Gesetze für den Fall, dass die Masse M des Zentralgestirns sehr viel größer ist als die Masse m des Planeten, denn die Kepler'schen Gesetze beruhen auf Beobachtungen allein des Sonnensystems. Während aber das 1. und das 2. Kepler'sche Gesetz auch allgemein für beliebige Massen M und m zumindet in ihrer qualitativen Aussage gelten, ist dies für das 3. Kepler'sche Gesetz nicht der Fall. Letzteres bedarf einer Korrektur zur Verallgemeinerung auf beliebige Massenverhältnisse $M : m$ wie beispielsweise für Doppelsternsysteme mit $M \approx m$.

Die 4. und letzte im Abschnitt 0.1 aufgeführte Näherung ist bei der Verallgemeinerung für das 3. Kepler'sche Gesetz nicht anwendbar, denn wir haben es dann mit einem **Zweikörperproblem** zu tun und müssen explizit das folgende, exakte Bewegungsverhalten der zwei Massenpunkte M und m berücksichtigen:

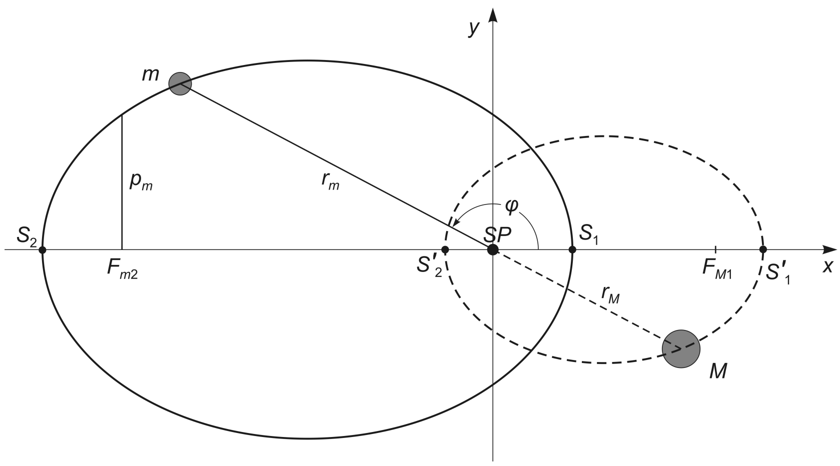


Abb. 8 Zweikörperproblem als Schwerpunktsystem: Der gemeinsame Schwerpunkt SP der Punktmassen M und m wurde in den Ursprung des (x, y)-Koordinatensystems gelegt. Die Strecke $r_M + r_m = r$ zwischen M und m verläuft stets durch SP und folglich im Schwerpunktsystem durch den Koordinatenursprung.

Weil wir es bei der Verallgemeinerung des 3. Kepler'schen Gesetzes nicht mehr mit dem System Sonne-Planet sondern mit einem „echten" Zweikörperproblem zu tun haben wie beispielsweise mit einem System aus zwei Sternen (Doppel-sternsystem) oder einem Planet-Mond-System, sprechen wir nicht von Perihel und Aphel sondern von **Periastron** und **Apastron**. Die Massenpunkte M und m bewegen sich in diesem Fall gekoppelt jeweils auf einer eigenen, allgemein elliptischen Bahn derart, dass die periastronseitigen Brennpunkte F_{m1} und F_{M2} der beiden Bahnellipsen mit dem gemeinsamen Massenschwerpunkt SP zusammenfallen (siehe Abbildung 8). Außerdem sind die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi} = \omega$ von M und m zu jedem Zeitpunkt gleich, weil M und m stets die Endpunkte einer durch SP verlaufenden Strecke bilden. Damit ist aber auch die Umlaufzeit T der Massenpunkte M und m auf der entsprechenden Bahnellipse gleich.[1]

Die große Halbachse der m-Ellipse ist

$$a_m \; = \; \frac{1}{2}\,\overline{S_2 S_1}$$

und die große Halbachse der M-Ellipse ist

$$a_M \; = \; \frac{1}{2}\,\overline{S_2' S_1'}\;.$$

[1] Animationen des Bewegungsverhaltens von Doppelsternen findet man beispielsweise bei Wikipedia unter dem Suchbegriff „Doppelstern".

Mit dem Abstand $r = r_M + r_m$ zwischen den Massenpunkten M und m, der Gravitationskraft F_G zwischen M und m sowie mit der Zentripetalkraft F_{zp} bezüglich M bzw. m gilt im Gleichgewicht und momentan

$$F_G = G \cdot \frac{Mm}{r^2} = G \cdot \frac{Mm}{(r_M + r_m)^2} \; = \; M \cdot \omega^2 \cdot r_M = m \cdot \omega^2 \cdot r_m = F_{\text{zp}} \quad \Rightarrow \tag{26}$$

$$\boxed{M \cdot r_M \; = \; m \cdot r_m \qquad \text{(in Analogie zum Hebelgesetz)}} \; . \tag{27}$$

Weil (27) zu jedem Zeitpunkt gilt, sind M-Ellipse und m-Ellipse ähnlich. Sie besitzen folglich die gleiche Exzentrizität und ihre Längenparameter lassen sich durch einen bestimmten **Streckungsfaktor** ineinander umrechnen, wobei die Ellipse bezüglich der größeren Masse die kleinere ist:

$$\begin{aligned} r_M &= \frac{m}{M} \cdot r_m \quad \text{und} \quad a_M = \frac{m}{M} \cdot a_m \quad \Rightarrow \quad r = (r_m + r_M) = r_m \left(1 + \frac{m}{M}\right) \; , \\ r_m &= \frac{M}{m} \cdot r_M \quad \text{und} \quad a_m = \frac{M}{m} \cdot a_M \quad \Rightarrow \quad r = (r_m + r_M) = r_M \left(1 + \frac{M}{m}\right) \; . \end{aligned} \tag{28}$$

Durch Äquivalenzumformung erhalten wir aus den zwei letzten Gleichungen die Beziehungen

$$\boxed{r_m \; = \; \frac{M}{M+m} \cdot r \qquad \text{und} \qquad r_M \; = \; \frac{m}{M+m} \cdot r} \; , \tag{29}$$

die wir im Folgenden noch verwenden werden.

Betrachten wir den Massenpunkt M als ruhend gegenüber m, dann beschreibt m unter Berücksichtigung von (4) und (28) die Ellipse

$$\boxed{r(\varphi) \; = \; \frac{p_m}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi} \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

um M. Für diese Ellipse gilt:

$$\begin{aligned} &\text{maximaler Abstand zwischen } m \text{ und } M: \quad \overline{S_2 S_1'} = a + e \; , \\ &\text{minimaler Abstand zwischen } m \text{ und } M: \quad \overline{S_2' S_1} = a - e \; . \end{aligned} \tag{30}$$

Daraus folgt

$$2a \; = \; a + e + (a - e) \; = \; \overline{S_2 S_1'} + \overline{S_2' S_1}$$

und

$$\overline{S_2' S_1} \; = \; (a_M - e_M) + (a_m - e_m) \; = \; \underbrace{(a_M + a_m)} - \underbrace{(e_M + e_m)}$$

$$\overset{(30)}{=} \quad a \; - \; e \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{a \; = \; a_m + a_M \; \overset{(28)}{=} \; a_m \left(1 + \frac{m}{M}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_m \; = \; \frac{M}{M+m} \cdot a} \; . \; \square$$

Damit haben wir das Bewegungsverhalten der Massenpunkte M und m für den allgemeinen Fall $M \approx m$ ermittelt.

Um das 3. Kepler'sche Gesetz zu verallgemeinern, gehen wir aus von dem Sachverhalt, dass sowohl die Umlaufzeit T als auch die Winkelgeschwindigkeit ω für beide Massenpunkte gleich sind, und vom Drehimpulserhaltungssatz. In unserem abgeschlossenen Zweikörpersystem gilt nämlich für den Bahndrehimpuls der Massenpunkte M und m in Analogie zu (7)

$$L \;=\; M \cdot r_M^2 \cdot \omega + m \cdot r_m^2 \cdot \omega \;=\; \text{const} \,.$$

Wir ersetzen r_M und r_m gemäß (29) und erhalten

$$\begin{aligned} L \;&=\; M \cdot \left(\frac{m}{M+m} \cdot r\right)^2 \cdot \omega + m \cdot \left(\frac{M}{M+m} \cdot r\right)^2 \cdot \omega \\ &=\; \frac{M\,m^2}{(M+m)^2} \cdot r^2 \cdot \omega \quad + \quad \frac{m\,M^2}{(M+m)^2} \cdot r^2 \cdot \omega \\ &=\; \left[\frac{M\,m \cdot (m+M)}{(M+m)^2}\right] \cdot r^2 \cdot \omega \;=\; \underbrace{\frac{M\,m}{M+m}}_{\mu} \cdot r^2 \cdot \omega \,, \end{aligned}$$

$$\boxed{L \;=\; \mu \cdot r^2 \cdot \omega \;=\; \text{const}} \tag{31}$$

mit der reduzierten Masse $\mu = \frac{Mm}{M+m}$. Die im Zusammenhang mit dem 2. Kepler'schen Gesetz hergeleitete Beziehung (18)

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{A}} \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{L}}}{m} \cdot \mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}A \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{m} \cdot \mathrm{d}t$$

liefert mit (31) und somit angepasst an unser Zweikörpersystem den Betrag eines Flächenelements der Bahnellipse von m um M , nämlich

$$\mathrm{d}A \;=\; \mathrm{d}A(t) \;=\; \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{\mu} \cdot \mathrm{d}t \,, \qquad L = \text{const} \,, \;\; \mu = \text{const} \,.$$

Während der Umlaufzeit T überstreicht der Fahrstrahl um den ruhenden Massenpunkt M den Ellipsenflächeninhalt

$$A_{\mathrm{E}} \;=\; \pi\,a\,b \;=\; \int_0^T \mathrm{d}A(t) \;=\; \frac{L}{2\,\mu} \cdot \int_0^T \mathrm{d}t \;=\; \frac{L}{2\,\mu} \cdot T \,,$$

wobei $b \;=\; \sqrt{a \cdot p}$ die der großen Halbachse a entsprechende kleine Halbachse ist. Äquivalenzumformung und anschließendes Quadrieren liefern

$$T \;=\; \frac{\pi\,a\,b \cdot 2\,\mu}{L} \quad \Rightarrow \quad T^2 \;=\; \frac{\pi^2\,a^2 \cdot 4\,\mu^2}{L^2} \cdot b^2 \;=\; \frac{4\pi^2\,\mu^2\,a^2}{L^2} \cdot a \cdot p \;=\; \frac{4\pi^2\,\mu^2\,a^3}{L^2} \cdot p \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{T^2}{a^3} \;=\; 4\pi^2 \cdot \frac{\mu^2}{L^2} \cdot p \,. \tag{32}$$

Für p schreiben wir in Analogie zu (28)

$$p \;=\; p_m \left(1 + \frac{m}{M}\right) \;=\; p_m \left(\frac{M+m}{M}\right) \,,$$

wobei wir p_m bereits mit (16) im Abschnitt 1.2 definiert hatten. Der Parameter

$$p_m \;=\; \frac{L^2}{GM \cdot m^2}$$

beschreibt nämlich die Ellipsenbahn von m um den gemeinsamen Schwerpunkt SP von M und m. Allerdings hatten wir es im Abschnitt 1.2 wegen $M \ggg m$ mit einem äquivalenten Einkörpersystem zu tun, weshalb dort der Massenpunkt M mit dem gemeinsamen Schwerpunkt SP näherungsweise zusammenfiel, was im Zweikörpersystem mit $M \approx m$ nicht der Fall ist. Wir erhalten damit

$$p \;=\; \frac{L^2}{GM \cdot m^2} \cdot \left(\frac{M+m}{M}\right) \;=\; \frac{L^2}{GM \cdot m} \cdot \underbrace{\frac{M+m}{M\,m}}_{=1/\mu} \;=\; \frac{L^2}{G\,\mu} \cdot \frac{1}{M\,m}\,. \tag{33}$$

Substituieren wir p in (32) durch die rechte Seite von (33), resultiert schließlich die allgemeine Form des 3. Keplerschen Gesetzes:

$$\begin{aligned}\frac{T^2}{a^3} &= 4\pi^2 \cdot \frac{\mu^2}{L^2} \cdot p \\ &= 4\pi^2 \cdot \frac{\mu^2}{L^2} \cdot \frac{L^2}{G\,\mu} \cdot \frac{1}{M\,m} \;=\; \frac{4\pi^2}{G} \cdot \mu \cdot \frac{1}{M\,m} \;=\; \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{M\,m}{M+m} \cdot \frac{1}{M\,m}\,,\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} \;=\; \frac{4\pi^2}{G\,(M+m)}}\,. \tag{34}$$

Während die Punktmasse m in der ursprünglichen Fassung des 3. Kepler'schen Gesetzes wegen $M \ggg m$ vernachlässigt wurde, muss sie in der korrekten bzw. verallgemeinerten Fassung berücksichtigt werden.

5.2 Der freie Fall und seine Beziehung zum 3. Kepler'schen Gesetz

Nach Dr. Hans-Joachim Scholz, Universität Bremen, Fachbereich 1/Physik, ca. 1998.

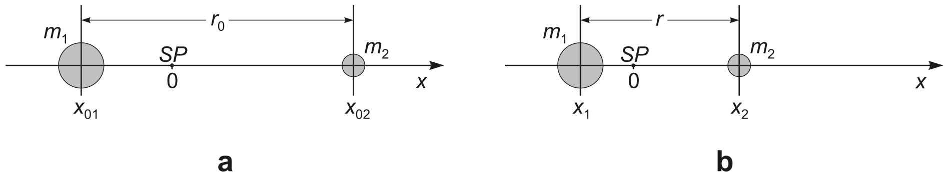


Abb. 9 Wir betrachten die beiden Massenpunkte m_1 und m_2 in ihrem Schwerpunktsystem, legen also ihren gemeinsamen Schwerpunkt SP in den Koordinatenursprung $x = 0$.
a Anfangszustand zum Zeitpunkt $t = 0$:
m_1 und m_2 befinden sich in Ruhe und besitzen den Abstand $r_0 = x_{02}(0) - x_{01}(0)$.
b Zeitpunkt $t > 0$:
m_1 und m_2 bewegen sich längs der x-Achse mit den momentanen Geschwindigkeiten $v_1(t)$ und $v_2(t)$ aufeinander zu und besitzen zu diesem Zeitpunkt t den Abstand $r(t) = x_2(t) - x_1(t) < r_0$.

Problemstellung[2] :

Zwei *zunächst ruhende* Massenpunkte m_1 und m_2 mit dem Anfangsabstand r_0 bewegen sich aufgrund ihrer gegenseitigen Massenanziehung aufeinander zu (siehe Abbildung 9). Nach welcher Zeit T_0 stoßen sie zusammen?

Es handelt sich um ein 1-dimensionales Problem. Die Koordinaten der Massenpunkte seien x_1 und x_2. Dann ist $r = x_2 - x_1$ der momentane Abstand der Massenpunkte. G sei die Gravitationskonstante. Die Lösung erfolgt mit Hilfe des Energiesatzes bei gleichzeitiger Eliminierung der für das Schwerpunktsystem spezifischen Größen.

Die „gewöhnliche“ Formulierung des Energiesatzes für den freien Fall aus dem Ruhezustand heraus lautet:

$$\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = \Delta\big(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}\big) = \Delta E_{\text{ges}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{ges}} = \text{const} .$$

Für unser Problem gilt demzufolge mit[3]

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 v_2^2 \,, \qquad \Delta E_{\text{pot}} = -\,G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) ,$$

der Energiesatz zunächst in der Form

$$\Delta E_{\text{kin}} \;=\; -\Delta E_{\text{pot}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 v_2^2 \;=\; G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \;. \tag{35}$$

(35) gilt sowohl allgemein als auch im Schwerpunktsystem (siehe Abbildung 9), wenn man für das Schwerpunktsystem $r_0 = x_{02} - x_{01}$ und $r = x_2 - x_1$ verwendet. Mit dem im Schwerpunktsystem gültigen Impulssatz

$$m_1 v_1 \,+\, m_2 v_2 \;=\; 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad v_2 \;=\; -\,\frac{m_1}{m_2}\, v_1 \tag{36}$$

[2]Siehe auch bei Wikipedia unter dem Suchbegriff „Freifallzeit“.
[3]Siehe auch mein Skript *Ausgewählte Themen und Herleitungen aus dem Grundstudium*, Kapitel 10 *Konservatives Vektorfeld, Potentialfunktion, Gravitationsfeld*, Seite 55 bis Seite 57.

lässt sich (35) vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2 v_2^2 \;&=\; \frac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 + m_2\left(-\frac{m_1}{m_2}\,v_1\right)^2\right] \;=\; \frac{1}{2}\left[m_1 v_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2}\,v_1^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{m_1}{m_2}\cdot\big(m_2+m_1\big)\,v_1^2 \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{\big(m_1+m_2\big)^2}{m_1+m_2}\,v_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{1}{m_1+m_2}\,\big(m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 v_1^2 + m_2^2 v_1^2\big) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{m_2^2}{m_1+m_2}\,\left[\frac{m_1^2}{m_2^2}\,v_1^2 - 2v_1\left(-\frac{m_1}{m_2}\,v_1\right) + v_1^2\right] \\
&\overset{(36)}{=}\; \frac{1}{2}\,\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{m_2^2}{m_1+m_2}\,\big(v_2^2 - 2v_1 v_2 + v_1^2\big) \;=\; \frac{1}{2}\,\underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}_{=\mu}\,\big(v_2-v_1\big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,v^2\,.
\end{aligned}$$

Hierbei ist μ die reduzierte Masse und $v = \dot{r}$ ist die Relativgeschwindigkeit des einen Massenpunktes gegenüber dem anderen. Damit resultiert aus (35)

$$\frac{1}{2}\,\dot{r}^2\,\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \;=\; G m_1 m_2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\,\dot{r}^2 \;=\; G\big(m_1+m_2\big)\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

und mit $G\big(m_1+m_2\big) = k$ schließlich die gewünschte Form des Energiesatzes:

$$\boxed{\frac{1}{2}\,\dot{r}^2 \;=\; k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}\,. \tag{37}$$

Wir demonstrieren der Vollständigkeit halber noch eine elegantere Herleitung von (37):

Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz gilt im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{r}_1 \;&=\; \frac{G m_1 m_2}{r^2} \qquad\Leftrightarrow\qquad \ddot{r}_1 \;=\; \frac{G m_2}{r^2}\,, \\
m_2\ddot{r}_2 \;&=\; -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \qquad\Leftrightarrow\qquad \ddot{r}_2 \;=\; -\frac{G m_1}{r^2}\,.
\end{aligned}$$

Die Subtraktion der beiden Bewegungsgleichungen liefert eine Differentialgleichung für nur eine unbekannte Funktion $r(t)$:

$$\underbrace{\ddot{r}_2-\ddot{r}_1}_{=\ddot{r}} \;=\; -\frac{G m_2}{r^2}-\frac{G m_1}{r^2} \;=\; -\frac{G\big(m_1+m_2\big)}{r^2} \;=\; -\frac{k}{r^2} \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{r} \;=\; -\frac{k}{r^2}}\,.$$

Wir multiplizieren diese Differentialgleichung mit der Geschwindigkeit $\dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$:

$$\dot{r}\cdot\ddot{r} \;=\; \dot{r}\cdot\left(-\frac{k}{r^2}\right) \qquad\Rightarrow\qquad \dot{r}\cdot\ddot{r} + \dot{r}\,\frac{k}{r^2} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,\dot{r}^2-\frac{k}{r}\right) \;=\; 0\,.$$

Weil die zeitliche Ableitung von $\left(\frac{1}{2}\,\dot{r}^2 - \frac{k}{r}\right)$ gleich Null ist, muss dieser Ausdruck in der Klammer zeitlich konstant sein. Sein Wert ergibt sich aus den Anfangsbedingungen $r(t) = r(0) = r_0$ und $\dot{r}(t) = v(t) = v(0) = 0$, sodass

$$\frac{1}{2}\,\dot{r}^2 - \frac{k}{r} \;=\; \text{const} \;=\; 0 - \frac{k}{r_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\,\dot{r}^2 \;=\; k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \;.\; \square$$

Lösung:

Aus dem Energiesatz $\frac{1}{2}\,\dot{r}^2 = k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$ folgt

$$\dot{r}^2 \;=\; \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 \;=\; \frac{2k}{r_0}\left(\frac{1}{r/r_0} - 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{r} \;=\; \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \;=\; \pm\sqrt{\frac{2k}{r_0}} \cdot \sqrt{\frac{1}{r/r_0} - 1}\;.$$

Da der Abstand zeitlich abnimmt, gilt

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{1}{r/r_0} - 1}} \;=\; -\sqrt{\frac{2k}{r_0}}\;\mathrm{d}t\;.$$

Durch Integration ermitteln wir zunächst allgemein die Zeit t, also noch nicht die Zeit $t = T_0$ bis zum Zusammenstoß der Massenpunkte in $r = r(T_0) = 0$:

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{1}{r/r_0} - 1}} \;=\; \int\limits_0^t -\sqrt{\frac{2k}{r_0}}\;\mathrm{d}t \;=\; -\sqrt{\frac{2k}{r_0}}\int\limits_0^t \mathrm{d}t \;=\; -r_0^{-\frac{1}{2}}\,\sqrt{2k}\cdot t\;. \tag{38}$$

Im Integral auf der linken Seite wird r substituiert:

$$r/r_0 = q \quad \Leftrightarrow \quad r = r_0\cdot q\;, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} = r_0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}r = r_0\cdot \mathrm{d}q\;.$$

Wir erhalten

$$\int\limits_{r=r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{1}{r/r_0} - 1}} \;=\; \int\limits_{q=r_0/r_0}^{q=r/r_0} \frac{r_0\cdot\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{1}{q} - 1}} \;=\; r_0\int\limits_1^{r/r_0} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{1}{q} - 1}} \;=\; -\,r_0\int\limits_{r/r_0}^{1} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{1}{q} - 1}}\;. \tag{39}$$

Gleichsetzen der rechten Seiten von (39) und (38) liefert dann

$$-\,r_0\int\limits_{r/r_0}^{1} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{1}{q} - 1}} \;=\; -r_0^{-\frac{1}{2}}\,\sqrt{2k}\cdot t \qquad \Leftrightarrow \qquad t \;=\; \frac{r_0^{3/2}}{\sqrt{2k}}\cdot\int\limits_{r/r_0}^{1} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{1}{q} - 1}}\;.$$

Die Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}}$ lautet[4] $F(x) = -\sqrt{x(1-x)} - \arctan\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$,

[4]Siehe Lothar Papula, Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 7. Auflage, Viewegs Fachbücher der Technik, Verlag Vieweg, 2001, Seite 444, Integral (113) und Integral (114).

sodass

$$\int\limits_{r/r_0}^{1} \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\frac{1}{q}-1}} \;=\; \left[-\sqrt{q(1-q)} - \arctan\sqrt{\frac{1}{q}-1}\,\right]_{r/r_0}^{1}$$

$$= -\sqrt{1(1-1)} - \arctan\sqrt{\frac{1}{1}-1} \;+\; \sqrt{\frac{r}{r_0}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)} + \arctan\sqrt{\frac{1}{r/r_0}-1}$$

$$= -0-0 \;+\; \frac{r}{r_0}\sqrt{\frac{r_0-r}{r}} + \arctan\sqrt{\frac{r_0-r}{r}}\;.$$

Damit können wir jetzt t allgemein berechnen:

$$t = \frac{r_0^{3/2}}{\sqrt{2k}}\cdot\left(\frac{r}{r_0}\sqrt{\frac{r_0-r}{r}} + \arctan\sqrt{\frac{r_0-r}{r}}\right) = \frac{r_0^{3/2}}{\sqrt{2k}}\cdot\frac{1}{r_0}\left(r\sqrt{\frac{r_0-r}{r}} + r_0\cdot\arctan\sqrt{\frac{r_0-r}{r}}\right),$$

$$t \;=\; \sqrt{\frac{r_0}{2k}}\left(r\cdot\sqrt{\frac{r_0-r}{r}} + r_0\cdot\arctan\sqrt{\frac{r_0-r}{r}}\right) \qquad\Rightarrow\qquad \text{mit}\quad k = G\big(m_1+m_2\big)$$

$$\boxed{\;t \;=\; \sqrt{\frac{r_0}{2G\big(m_1+m_2\big)}}\left(r\cdot\sqrt{\frac{r_0}{r}-1} + r_0\cdot\arctan\sqrt{\frac{r_0}{r}-1}\right)\;}\;.$$

Die Zeit T_0 bis zum Zusammenstoß der beiden Massenpunkte erhalten wir schließlich durch Grenzwertbildung für $r\to 0$, d. h. mit

$$\lim_{r\to 0} r\cdot\sqrt{\frac{r_0}{r}-1} \;=\; \lim_{r\to 0}\sqrt{r^2\left(\frac{r_0}{r}-1\right)} \;=\; \lim_{r\to 0}\sqrt{r\cdot r_0 - r^2} \;=\; 0$$

und mit

$$\tan\alpha \;\to\; \infty \;\;\Rightarrow\;\; \alpha \;\to\; \frac{\pi}{2} \qquad\Rightarrow\qquad \lim_{r\to 0}\arctan\sqrt{\frac{r_0}{r}-1} \;=\; \frac{\pi}{2}\;:$$

$$T_0 \;=\; \sqrt{\frac{r_0}{2\cdot G\big(m_1+m_2\big)}}\cdot r_0\cdot\frac{\pi}{2}\;,$$

$$\boxed{\;T_0 \;=\; r_0^{3/2}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{G\big(m_1+m_2\big)}} \qquad\Leftrightarrow\qquad \frac{T_0^2}{r_0^3} \;=\; \frac{\frac{1}{8}\,\pi^2}{G\,\big(m_1+m_2\big)}\;}\;. \tag{40}$$

Zum gleichen Ergebnis wären wir gekommen, wenn wir in (38) von r_0 bis $r=0$ und von $t=0$ bis T_0 integriert hätten.

Das Ergebnis (40) stimmt überein mit der verallgemeinerten Form des 3. Kepler'schen Gesetzes, wobei die Fallzeit T_0 gleich der halben Umlaufzeit T auf einer extrem schmalen Ellipse mit der großen Halbachse $a = r_0/2$ ist. Wenn wir also in (34) $M = m_1$ und $m = m_2$ setzen und berücksichtigen, dass

$$T = 2\cdot T_0 \qquad\text{und}\qquad a = \frac{r_0}{2}$$

gilt, so resultiert erwartungsgemäß

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(2\cdot T_0)^2}{\left(\frac{r_0}{2}\right)^3} = 32\cdot\frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\,\big(m_1+m_2\big)} \qquad\Leftrightarrow\qquad \frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{\frac{4}{32}\,\pi^2}{G\,\big(m_1+m_2\big)} = \frac{\frac{1}{8}\,\pi^2}{G\,\big(m_1+m_2\big)}\;.\;\square$$

Zur Erinnerung: Die potenzielle Energie beim freien Fall

Bezüglich der potenziellen Energie gilt die folgende **Konvention**:

$$\boxed{E_{\text{pot}}(\infty) \; = \; \lim_{r\to\infty}\left(-\,GMm\cdot\frac{1}{r}\right) \; \stackrel{!}{=} \; 0} \; .$$

Dann gilt allgemein

$$E_{\text{pot}}(r) \; = \; -\,GMm\cdot\frac{1}{r} \; < \; 0\,, \quad r>0\,.$$

Für den freien Fall der sich aus dem Ruhezustand heraus aufeinander zu bewegenden Punktmassen m und M bedeutet das:

Anfangszustand : Zeitpunkt $t=t_0=0$, Abstand m von M beträgt $r=r_0$ $\Rightarrow$

$$E_{\text{pot}}(r_0) = \; -\,GMm\cdot\frac{1}{r_0} < \; 0\,, \qquad E_{\text{kin}}(t_0)=0\,.$$

Endzustand : Zeitpunkt t, Abstand m von M beträgt $r<r_0$ $\Rightarrow$

$$E_{\text{pot}}(r) \; = \; -\,GMm\cdot\frac{1}{r} \; < \; 0\,, \qquad E_{\text{kin}}(t) \; > 0\,.$$

Damit ist die Änderung der potenziellen Energie durch den freien Fall von $r_0(t_0=0)$ nach $r(t)$

$$\Delta E_{\text{pot}} \; = \; E_{\text{pot}}(r)-E_{\text{pot}}(r_0) \; = \; -\,GMm\cdot\frac{1}{r}-\left(-\,GMm\cdot\frac{1}{r_0}\right)\,,$$

$$\Delta E_{\text{pot}} \; = \; GMm\cdot\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right) <0\,, \qquad \frac{1}{r_0}<\frac{1}{r}\,.$$

Die potenzielle Energie beim freien Fall nimmt ab, denn $E_{\text{pot}}(r)$ ist kleiner („negativer“) als $E_{\text{pot}}(r_0)$. Deshalb muss ΔE_{pot} negativ sein. Gleichzeitig nimmt die kinetische Energie der Massen beim freien Fall zu, sodass ΔE_{kin} positiv ist. Der Energieerhaltungssatz hat demzufolge in diesem Fall die Form

$$E_{\text{ges}} \; = \; E_{\text{pot}}(r_0) \; = \; \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta E_{\text{kin}} = -\,\Delta E_{\text{pot}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta E_{\text{pot}}+\Delta E_{\text{kin}} \; = \; 0\,.$$

Anmerkung

Beim freien Fall aus dem Ruhezustand der Massen heraus ist der Bahndrehimpuls $L=0$, denn die Bahn bildet stets eine Gerade *durch* die Massenpunkte m und M.