

Reinhard Weiß

L i c h t

Kohärenz und Polarisation

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen	4
2	Absorption und Emission elektromagnetischer Strahlung	8
2.1	Schalenmodell und Orbitalmodell	8
2.2	Einstein-Koeffizienten und Übergangswahrscheinlichkeiten	13
3	Die Kohärenz des Lichts	22
3.1	Wellenpaket – Wellenzug – Superpositionsprinzip	22
3.1.1	Teilchenbild	22
3.1.2	Wellenbild	22
3.2	Kohärenz	27
3.3	Zur zeitlichen (longitudinalen) Kohärenz – Kohärenzlänge	32
3.4	Zur räumlichen (lateralen) Kohärenz – räumliche Kohärenzlänge	36
3.5	Zur Kohärenz bei Punktquellen	39
4	Die Polarisation des Lichts	41
4.1	Linear polarisiertes Licht	43
4.2	Zirkular polarisiertes Licht	44
4.3	Elliptisch polarisiertes Licht	46
4.4	Jones-Formalismus	49
4.5	Intensität des polarisierten Lichts im Vakuum	61
5	Paradoxien im Teilchenbild	62
6	Tabellen: Jones-Vektoren und Jones-Matrizen	64
7	Polarisation des Lichts in Bra-Ket-Notation	66
7.1	Der Umgang mit komplexen Vektoren und Matrizen in Bra-Ket-Notation	66
7.2	Lineare Polarisation	71
7.2.1	VON-Basis, Bra- und Ket-Vektoren	71
7.2.2	Polarisationsfilter mit horizontaler Transmissionsachse	73
7.2.3	Polarisationsfilter mit Transmissionsachse im Winkel ϑ	75
7.3	Zirkulare Polarisation	76
7.4	Photonenspin	76
8	Anhang	78
8.1	Hauptachsentransformation von Kegelschnitten zur Bestimmung der Parameter von Ellipsen	78
8.1.1	Hauptachsentransformation	78
8.1.2	Spezielle Ellipsen	82
8.1.3	Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix A	83
8.1.4	Bestimmung der Halbachsenlängen schräger Ursprungsellipsen	85
8.1.5	Bestimmung des Winkels α schräger Ursprungsellipsen	86
8.2	Zu Abschnitt 4.3 – Berechnung von E_{0x} und E_{0y}	88

Quellen

- Eugene Hecht, *Optik*, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, Wien, München, 2005.
- F. Pedrotti, L. Pedrotti, W. Bausch, H. Schmidt, *Optik für Ingenieure – Grundlagen*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
- Wolfgang Demtröder, Springer-Lehrbuch, *Experimentalphysik 2 – Elektrizität und Optik*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Abschnitt 7.4 *Polarisation elektromagnetischer Wellen*, Seite 192 und Seite 193, Kapitel 10. *Interferenz, Beugung und Streuung*, Seite 295 bis Seite 300.
- Rudolf Langkau, Wolfgang Scobel, Gunnar Lindström, Springer-Lehrbuch, *Physik kompakt 2 – Elektrodynamik und Elektromagnetische Wellen*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002, Kapitel 3 *Optik*, Seite 401 bis Seite 404.
- Rainer Müller und Hartmut Wiesner, *Das Münchener Unterrichtskonzept zur Quantenmechanik*,
[https://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/archiv/
inhalt_materialien/milq/lehrtext_x_.pdf](https://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/archiv/inhalt_materialien/milq/lehrtext_x_.pdf)
- Josef Oswald, *Grundprinzipien der Quantenphysik*, Vorlesung – WS03/04,
https://oswald.unileoben.ac.at/qpvl_1/qpvl.pdf
- Timo Weigand, Kursvorlesung PTP4 Theoretische Quantenmechanik (digitalisiert von David Breyel), Institut für Theoretische Physik, Universität Heidelberg, 2011,
[https://www.thphys.uni-heidelberg.de/
courses/weigand/Skript-QM2011.pdf](https://www.thphys.uni-heidelberg.de/courses/weigand/Skript-QM2011.pdf)

1 Vorbemerkungen

- Die Maxwell'schen Gleichungen ermöglichen die vollständige Beschreibung elektromagnetischer Wellen und damit von Licht im **Wellenbild** – aber nicht im Teilchenbild.
- Im **Teilchenbild** besteht Licht aus Lichtquanten, den Photonen (Index ph für Photon).
- Im **photoelektrischen Effekt** manifestiert sich der Teilchencharakter des Lichts als **Planck-Einstein-Beziehung**

$$E_{\text{ph}} = h \cdot \nu$$

(E_{ph} Energie eines Photons, h Planck'sches Wirkungsquantum, ν Lichtfrequenz).

- Die Wellenlänge λ bzw. der Wellenvektor \vec{k} oder die Wellenzahl $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ sind charakteristische Welleneigenschaften.
Der Impuls $|\vec{p}| = p$ ist eine charakteristische Teilcheneigenschaft.
Die **De Broglie-Beziehung**

$$p = \hbar \cdot k = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

gilt für Teilchen ohne Ruhemasse, also für Photonen, und verknüpft den Wellencharakter (Wellenlänge λ) des Lichts mit dessen Teilchencharakter (Impuls p), wie man am Beispiel des Strahlungsdrucks verifizieren kann:

Dass ein Photon den Impuls p_{ph} besitzt, zeigt sich in der Kraftwirkung beim Auftreffen von Licht auf ein Hindernis, d. h. durch den vom Licht ausgeübten Strahlungsdruck P .

Ausgehend von der Maxwell'schen Gleichung $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$ für das Vakuum und ausgehend von den aus den Maxwell'schen Gleichungen abgeleiteten **Wellengleichungen**

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} \quad \text{bzw.} \quad \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} \quad (1.1)$$

für das \vec{E} -Feld bzw. für das \vec{B} -Feld im Vakuum erhalten wir die Beziehung

$$|\vec{B}| = \frac{1}{c} |\vec{E}| = \frac{1}{c} E$$

und damit dann den **Strahlungsdruck** P einer elektromagnetischen Welle:¹

$$P = \frac{I}{c}, \quad \text{Intensität } I, \quad \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit } c.$$

¹Herleitungen des Strahlungsdrucks elektromagnetischer Wellen finden sich beispielsweise in: Spektrum-Lehrbuch *Physik* von Paul A. Tipler, 1. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1994, Seite 1000 bis Seite 1005, Springer-Lehrbuch Gerthsen Physik, H. Vogel, 20. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999, Seite 601.

Für den Strahlungsdruck gilt also sinngemäß

$$\text{Strahlungsdruck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{\text{Impuls}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \frac{\frac{1}{c} \text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \frac{1}{c} \cdot \text{Intensität} .$$

Ist i die „Teilchenzahlintensität“, also die Anzahl der pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit auf ein Hindernis treffenden Photonen monochromatischen Lichts der Frequenz ν , dann gilt mit dem Impuls p_{ph} und der Energie $h \cdot \nu$ eines Photons

$$P = \frac{I}{c} = \frac{i \cdot h\nu}{c} = i \cdot \frac{h}{\lambda} = i \cdot \hbar k = i \cdot p_{\text{ph}} \Rightarrow$$

$$p_{\text{ph}} = \hbar k . \quad \square$$

- Für ein Teilchen wie beispielsweise das Elektron mit der Ruhemasse m_0 , der Geschwindigkeit v und dem klassischen Impuls p gilt die *klassische* Beziehung

$$E_{\text{kin}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} = \frac{m_0 \cdot v^2}{2} = \frac{1}{2} p \cdot v , \quad v \ll c . \quad (1.2)$$

Photonen besitzen keine Ruhemasse, bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit und sind demzufolge relativistische Teilchen mit der Energie

$$E_{\text{ph}} = p_{\text{ph}} \cdot c = h \cdot \nu . \quad (1.3)$$

(1.3) resultiert aus

$$E = mc^2 = h\nu \Leftrightarrow m = \frac{h\nu}{c^2} \quad \text{und} \quad p_{\text{ph}} = m \cdot c = \frac{h\nu}{c^2} \cdot c = \frac{E_{\text{ph}}}{c} .$$

- **Photonenspin**

Photonen besitzen also einen **linearen Impuls** $p_{\text{ph}} = \frac{h\nu}{c} = \hbar k$ mit $\vec{p}_{\text{ph}} \uparrow\uparrow \vec{k}$.

„Wenn ein geladenes Teilchen elektromagnetische Strahlung emittiert oder absorbiert, ändert sich neben seiner Energie und seinem linearen Impuls auch sein Drehimpuls um ein **ganzzahliges** Vielfaches von $\pm\hbar$.“² Neben dem linearen Impuls besitzen Photonen demzufolge auch einen Drehimpuls bzw. Eigendrehimpuls, auch intrinsischer Drehimpuls oder kurz **Spin** \vec{s} genannt. Photonen sind folglich Spin-1-Teilchen bzw. Bosonen.

Der Photonenspin ist unabhängig von der Photonenenergie und entspricht einem zusätzlichen Freiheitsgrad des Photons (neben dem linearen Impuls). Die Orientierung des Spins eines Photons ergibt sich aus dessen **Helizität** σ und wird in Bezug auf die „erzwungene“ Rotation *positiver* Ladungen in absorbierenden Medien definiert:

$$\text{linkszirkulare Polarisation (}\mathcal{L}\text{- oder } \sigma^+\text{-Zustand) : } \vec{s} \uparrow\uparrow \vec{k} ,$$

$$\text{rechtszirkulare Polarisation (}\mathcal{R}\text{- oder } \sigma^-\text{-Zustand) : } \vec{s} \downarrow\downarrow \vec{k} .$$

²Zitiert aus: Eugene Hecht, *Optik*, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, Wien, München, 2005, Seite 535.

Bezüglich \mathcal{L} und \mathcal{R} haben wir hier die althergebrachte Konvention aus der Optik verwendet. In der Quantenphysik sind die Eigenschaften links- und rechtszirkular über die Helizität und demzufolge umgekehrt definiert, sodass dort für die **zirkularen Polarisationszustände**

$$\mathcal{L} \longrightarrow |\sigma^+\rangle = |R\rangle \quad \text{und} \quad \mathcal{R} \longrightarrow |\sigma^-\rangle = |L\rangle$$

gilt.

Linear polarisiertes Licht kann man als Überlagerung *gleicher Anteile* von rechts- und linkszirkular polarisiertem Licht auffassen, wobei die beiden Spinzustände $\pm\hbar$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit vorkommen, sodass kein Gesamtspin resultiert.

Dementsprechend handelt es sich bei elliptisch polarisiertem Licht um eine Überlagerung ungleicher Anteile von $|\sigma^+\rangle$ - und $|\sigma^-\rangle$ -Zuständen, sodass die Spins $+\hbar$ und $-\hbar$ mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit vorkommen und so ein positiver oder negativer Gesamtspin resultiert.

- Analog zu den Wellengleichungen (1.1) für elektromagnetische Wellen und unter Berücksichtigung von (1.2) gilt für **nichtrelativistische** (klassische) Teilchen mit einer Ruhemasse m_0 allgemein die **zeitabhängige Schrödinger-Gleichung**

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t)}_{\hat{=} E_{\text{kin}}} + \underbrace{V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t)}_{\hat{=} E_{\text{pot}}} = \underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t)}_{\hat{=} E_{\text{ges}}} .$$

Für den Fall eines explizit zeitunabhängigen Potentials $V = V(\vec{r})$, d. h. für stationäre Zustände bzw. Gleichgewichtszustände wie beispielsweise beim Atom-Schalenmodell resultiert aus der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung die zeitunabhängige oder **stationäre Schrödinger-Gleichung**

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \cdot \Psi(\vec{r}) = E \cdot \Psi(\vec{r}) .$$

- Die Lösungen Ψ der Schrödinger-Gleichung sind normierte quadratintegrale *komplexe* Wellenfunktionen (Zustände), die auch **Wahrscheinlichkeitsamplituden** genannt werden, nicht beobachtbar bzw. nicht messbar sind und demzufolge keine physikalische Realität besitzen. Die entsprechende beobachtbare Messgröße ist die (*reelle*) **Wahrscheinlichkeitsdichte** $|\Psi|^2$. Die unter den gegebenen physikalischen Bedingungen (insbesondere $V(\vec{r}, t)$) mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung ermittelten Wahrscheinlichkeitsamplituden ermöglichen mit ihrem Betragsquadrat die räumliche Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Energie – ggf. auch in Abhängigkeit von der Zeit. So entsprechen sich im Raum ausbreitende Wellenpakete zeitabhängigen Zuständen, während man sich stationäre Zustände als stehende Wellen veranschaulichen kann.

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude sagt also etwas aus über die Aufenthalts- oder Antreffwahrscheinlichkeit eines Teilchens im Bereich des ihm entsprechenden Wellenpakets bzw. Wellenzugs.

- **Zusammenhang zwischen Beugung (Wellenbild) und Heisenberg'scher Unschärferelation (Teilchenbild)**

Betrachten wir die **Beugung** von Licht der Wellenlänge λ **am Einfachspalt** der Breite b , so gilt im Wellenbild für den Beugungswinkel α bis zum ersten Minimum:

$$b \cdot \sin \alpha = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \sin \alpha = \frac{\lambda}{b} .$$

Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe der De Broglie-Beziehung auch durch den Impuls $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, also im Teilchenbild ausdrücken. Dafür nehmen wir an, dass der Spalt längs der y -Achse verläuft, sich die Spaltbreite folglich längs der x -Achse erstreckt, und dass sich das einfallende Licht mit dem Wellenvektor $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ längs der z -Achse ausbreitet. Dann gilt bezüglich des ersten Minimums mit dem Wellenvektor $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$ des ausfallenden Lichts in der (z, x) -Ebene hinter dem Spalt:

$$k_x = |\vec{k}| \sin \alpha = k \sin \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{b} = \frac{2\pi}{b} .$$

Die daraus resultierende de-Broglie-Beziehung lautet

$$p_x = \hbar k_x = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{b} = \frac{h}{b} \quad \Leftrightarrow$$

$$p_x \cdot b = h .$$

„ b kann man als eine Positionsfestlegung der durchgehenden Photonen auf der x -Achse auf den Bereich $\Delta x = b$ interpretieren. Δp_x andererseits kann man als eine Unbestimmtheit des Impulses p_x in Bezug auf die x -Richtung interpretieren, da es ja eine vertikale Ablenkung von der geradlinigen Fortbewegung beschreibt. Der Grund dafür liegt darin, dass jeder Punkt auf dem „Beugungsfleck“ als möglicher Auftreffpunkt eines Photons in Frage kommt. D. h. der Beugungsfleck engt im Wesentlichen den Bereich ein, in dem das Photon statistisch betrachtet auftreffen kann. In diesem Sinne kann man obige Gleichung auch so schreiben:“³

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \approx h = 2\pi\hbar .$$

Dies entspricht der **Heisenberg'schen Impuls-Orts-Unschärferelation**

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} .$$

Die Lichtbeugung im Wellenbild entspricht, wie man sieht, der Heisenberg'schen Unschärferelation im Teilchenbild. Dies zeigt sich in der Tatsache, dass sich das „Beugungsbild“ aufspreizt, wenn der Spalt schmaler gewählt wird. Mit anderen Worten, wenn die Breite $b = \Delta x$ des Spalts und damit auch die Unbestimmtheit der Photonen im Ort kleiner werden, wird im Gegenzug die Unbestimmtheit Δp_x des Impulses der Photonen größer. Die Unbestimmtheit im Ort und im Impuls der Teilchen verhalten sich in bestimmter Weise reziprok zueinander.

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die **Heisenberg'sche Energie-Zeit-Unschärferelation** an:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} .$$

³Mit kleinen Änderungen der Notation zitiert aus: Josef Oswald, *Grundprinzipien der Quantenphysik*, Vorlesung – WS03/04, Seite 9, https://oswald.unileoben.ac.at/qpvl_1/qpvl.pdf

2 Absorption und Emission elektromagnetischer Strahlung

2.1 Schalenmodell und Orbitalmodell

Literaturtips:

- Holger Hoffmeister, Freies Lehrbuch „Anorganische Chemie“, Kapitel 19 Das Orbitalmodell als Atommodell, 2020
<https://hoffmeister.it/index.php/chemiebuch-anorganik/227-freies-lehrbuch-anorganische-chemie-19-das-orbitalmodell-als-atommodell>
- 5. Energiezustände von Atomen und Atomorbitale
<https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/chab/physical-chemistry/ultrafast-spectroscopy-dam/documents/lectures/allgemeinechemieHS17/script/Kapitel%205.pdf>

Wir betrachten im Folgenden nicht Moleküle sondern vereinfachend und ausgehend vom Periodensystem der Elemente nur Atome. Atome besitzen genauso viele Elektronen wie Protonen, sind also nicht ionisiert und demzufolge nach außen elektrisch neutral. Die **Ordnungszahl** der Elemente repräsentiert die Anzahl der Protonen im Atomkern und damit auch die Anzahl der Elektronen in der zugehörigen Atom-Elektronenhülle. Die (potentielle) **Energie** kernferner Elektronen ist größer als die Energie kernnaher Elektronen. Deshalb lassen sich kernferne Elektronen („Leuchtelektronen“) leichter, d. h. mit weniger Energieaufwand aus der Elektronenhülle herauslösen. Mit anderen Worten, näher am Atomkern befindliche Elektronen sind stärker an den Atomkern gebunden als kernferne. Demzufolge sind für die Absorption und Emission elektromagnetischer Strahlung im sichtbaren Bereich (Licht, Photonen vergleichsweise niedriger Energie) die äußeren Schalen der Elektronenhülle der Atome verantwortlich.

- Das **Periodensystem der Elemente** besteht aus acht Hauptgruppen und sieben Perioden. Im **Schalenmodell** der Atom-Elektronenhülle entspricht jede neue Periode einer zusätzlichen Schale. Elemente der ersten Periode besitzen also nur eine Schale, die K-Schale, Elemente der zweiten Periode besitzen zwei Schalen, die K-Schale und die L-Schale, usw. Die siebente und letzte Periode besitzt demzufolge sieben Schalen: K-, L-, M-, N-, O-, P- und Q-Schale. In die innerste Schale, die K-Schale, passen maximal nur zwei Elektronen. In alle anderen Schalen passen maximal acht Elektronen (Oktettregel).

Betrachtet werden hierbei die Atome der Elemente in ihrem **Grundzustand**, d. h. im Zustand geringstmöglicher Energie, also nicht in irgendeinem angeregten und schon gar nicht im ionisierten Zustand.

- Den Schalen entsprechen bestimmte Energiebereiche, wobei die Schalenenergie prinzipiell von der innersten (K-Schale) zur äußersten (Q-Schale) ansteigt. Allerdings überlappen sich die Energiebereiche der Schalen ab der M-Schale (ab der 3. Schale) aufwärts. So befinden sich die fünf 3d-Orbitale der M-Schale auf einem höheren Energieniveau als das 4s-Orbital der N-Schale.
- Die Besetzung der Schalen mit Elektronen erfolgt auf bestimmte Weise strukturiert in Unterschalen. Diese Unterschalen werden auch Orbitale genannt, woraus

das **Orbitalmodell** der Atom-Elektronenhülle resultiert. Orbitale sind die Raumbereiche, in denen sich Elektronen mit 95%iger Wahrscheinlichkeit „aufhalten“. Orbitale repräsentieren Lösungen (Wahrscheinlichkeitswellenfunktionen $\Psi(\vec{r})$) der Schrödinger-Gleichung, denn $|\Psi|^2$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte und somit ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort anzutreffen.

Aber Achtung!

Wegen der Heisenberg'schen Unschärferelation besitzen die Aufenthaltsbereiche der Elektronen der jeweiligen Orbitale keine feste bzw. keine scharfe Grenze.

- **Orbitale** entsprechen quantenmechanischen Zuständen der Elektronen und werden durch vier Quantenzahlen charakterisiert: Hauptquantenzahl n , Neben- oder Drehimpulsquantenzahl l , Magnetquantenzahl m und magnetische Spinquantenzahl m_l oder auch s .

1. Den sieben Schalen K bis Q (von innen nach außen) werden die **Hauptquantenzahlen** $n=1$ bis $n=7$ zugeordnet.
2. Die **Nebenquantenzahlen** (Drehimpulsquantenzahlen, azimutale Quantenzahlen) l sind ganze Zahlen von $l = 0$ bis $l = (n - 1)$. Sie bestimmen den Bahndrehimpuls der Elektronen und die (geometrische) Form der Orbitale:

ausgeschrieben	Orbitale	Nebenquantenzahl	Form
sharp	s-Orbital	$l = 0$	Kugel
principal	p-Orbitale	$l = 1$	Hantel
diffuse	d-Orbitale	$l = 2$	gekreuzte Doppelhantel
fundamental	f-Orbitale	$l = 3$	Rosette
	g-Orbitale	$l = 4$	
	h-Orbitale	$l = 5$	
	i-Orbitale	$l = 6$	

3. Die **Magnetquantenzahl** m eines Orbitals kann die ganzen Zahlen von $m = -l$ bis $m = l$ einschließlich $m = 0$ annehmen, also

$$m = -l, -(l - 1), \dots, 0, \dots, (l - 1), l.$$

Manchmal wird für die Magnetquantenzahl auch das Symbol m_l verwendet. Sie beschreibt die räumliche Ausrichtung, die ein Orbital bezüglich eines äußeren Magnetfeldes einnimmt und tritt demzufolge nur in Erscheinung bzw. ist nur messbar, wenn von außen ein Magnetfeld angelegt wird.

4. Der Spin eines Elektrons entspricht gleichsam einem inneren Drehsinn des Elektrons, wird deshalb auch Eigen- oder intrinsischer Drehimpuls genannt und besitzt die Spinquantenzahl $s = \frac{1}{2}$. Bezüglich eines äußeren Magnetfeldes können Elektronen zwei Drehsinne einnehmen, der eine entspricht dem **Spin-up** (Symbol \uparrow) mit der **magnetischen Spinquantenzahl** $m_s = +\frac{1}{2}$, der entgegengesetzte Drehsinn entspricht dem **Spin-down** (Symbol \downarrow) mit **magnetischer Spinquantenzahl** $m_s = -\frac{1}{2}$.

Wie die Ausrichtung des Bahndrehimpulses (Magnetquantenzahl m) tritt auch die Spinausrichtung (magnetische Spinquantenzahl m_s) nur bei Vorhandensein eines äußeren Magnetfeldes in Erscheinung. Manchmal wird für die magnetische Spinquantenzahl einfach das Symbol s verwendet.

- Leider existiert keine mathematische Formel zur Ermittlung der Elektronenkonfiguration der Atome. Es gibt nur die folgenden Regeln für die sukzessive Besetzung der Schalen und Orbitale mit Elektronen, wobei man vom niedrigsten Energieniveau des einen Elektrons des Wasserstoffatoms ausgeht und dann die Besetzung mit zunehmender Höhe der Energieniveaus der Elektronen der folgenden Elemente fortsetzt. Entscheidend für die Besetzung ist also nicht die ansteigende Ordnungszahl der Elemente sondern die Zunahme der Höhe der Energieniveaus.

Aufbauprinzip :

Jedes neu hinzugefügte Elektron „sucht sich“ den Zustand geringster Energie.

Hund'sche Regel¹ :

Orbitale gleicher Energie werden immer nacheinander zuerst einzeln, d. h. mit nur einem Elektron besetzt. Dabei haben diese ungepaarten Elektronen alle den gleichen Spin. Erst danach erfolgt die Doppelbesetzung.

Pauli'sches Ausschließungsprinzip (Pauli-Verbot) :

In einem Atom können sich niemals zwei Elektronen in demselben quantenmechanischen Zustand befinden. Sie müssen sich immer wenigstens in einer Quantenzahl unterscheiden.

Die Anwendung dieser drei Regeln führt zum **Madelung-Schema** der Elektronenkonfigurationen der Elemente

- Gemeinsam haben Aufbauprinzip, Hund'sche Regel und Pauli-Verbot zur Folge, dass Orbitale höchstens mit zwei (gepaarten) Elektronen unterschiedlichen Spins besetzt werden können.

So besitzen die Elemente der zweiten Nebengruppe die K-Schale ($n = 1$) und die L-Schale ($n = 2$). In der K-Schale gibt es nur eine Unterschale, das 1s-Orbital ($n = 1, l = 0$). In der L-Schale gibt es zwei Unterschalen, nämlich das 2s-Orbital ($n = 2, l = 0$) und die 2p-Unterschale ($n = 2, l = 1$).

Die 2p-Unterschale wiederum besteht aus den folgenden drei 2p-Orbitalen :

$$\begin{aligned} 2p_x\text{-Orbital} & \quad (n = 2, l = 1, m = 1), \\ 2p_y\text{-Orbital} & \quad (n = 2, l = 1, m = -1), \\ 2p_z\text{-Orbital} & \quad (n = 2, l = 1, m = 0). \end{aligned}$$

Beispielsweise hat **Stickstoff** mit der Ordnungszahl 7 die **Elektronenkonfiguration**

$$1s^2 2s^2 2p^3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2 \text{ Elektronen im } 1s\text{-Orbital bzw. in der } 1s\text{-Unterschale,} \\ 2 \text{ Elektronen im } 2s\text{-Orbital bzw. in der } 2s\text{-Unterschale,} \\ 3 \text{ Elektronen in der } 2p\text{-Unterschale.} \end{cases}$$

¹In der Physik werden vier Hund'sche Regeln verwendet, insbesondere wenn der Gesamtdrehimpuls J eine Rolle spielt.

Wie man sieht, sind hierbei die hochgestellten Zahlen keine Exponenten sondern die Anzahl der Elektronen, mit denen die entsprechende Unterschale besetzt ist. 3 Elektronen in der 2p-Unterschale des Stickstoffatoms heißt, das die drei 2p-Orbitale $2p_x$, $2p_y$ und $2p_z$ jeweils mit nur einem Spin-up-Elektron besetzt sind.

- **Alle Orbitale einer bestimmten Unterschale, d. h. alle Orbitale mit gleicher Hauptquantenzahl n und zusätzlich gleicher Nebenquantenzahl l besitzen das gleiche Energieniveau und können doppelt besetzt sein.** Dieser Sachverhalt führt zu der folgenden Tabelle:

Unterschale	$2l + 1$ Orbitale	maximale Elektronenzahl auf gleichem Energieniveau
s $\Rightarrow l = 0$	1 s-Orbital	2
p $\Rightarrow l = 1$	3 p-Orbitale	6
d $\Rightarrow l = 2$	5 d-Orbitale	10
f $\Rightarrow l = 3$	7 f-Orbitale	14
g $\Rightarrow l = 4$	9 g-Orbitale	18
$\vdots \Rightarrow \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	\vdots

Die Unterschalen der Elektronenhüllen von Atomen sind bezüglich ihrer **Energieniveaus** entartet. Man spricht von **Entartung** eines quantenmechanischen Systems wie z. B. einer Unterschale, wenn zwei oder mehr

Zustände (linear unabhängige Eigenzustände wie z. B. die Orbitale) zum selben

Messwert (Eigenwert einer Observablen wie z. B. der Energie) existieren.² So existieren beispielsweise in der d-Unterschale fünf d-Orbitale gleicher Energie bzw. mit dem gleichen Energieniveau der Elektronen, wobei jedes dieser fünf Orbitale dem Pauli-Verbot entsprechend mit zwei Elektronen+ unterschiedlichen Spins besetzt werden kann. In der d-Unterschale können sich also maximal zehn Elektronen gleicher Energie aber mit verschiedenem Satz an Quantenzahlen aufhalten. Demzufolge ist die d-Unterschale 10-fach entartet, d. h. sie besitzt den Entartungsgrad bzw. den Entartungsfaktor 10.³

- Die Elektronen in der äußersten Schale (Valenzschale) eines Atoms heißen **Valenzelektronen**. Wie bereits dargestellt besitzt beispielsweise Stickstoff fünf Valenzelektronen: zwei Elektronen im 2s-Orbital und insgesamt drei Elektronen in den 2p-Orbitalen $2p_x$, $2p_y$ und $2p_z$. Weil sich die Elektronen der äußersten Schale leichter durch elektrodynamische Wechselwirkungen beeinflussen lassen, sind die Valenzelektronen wesentlich für die chemischen Eigenschaften der Elemente verantwortlich.

²Man geht mit dem Entartungsbegriff relativ salopp um. So spricht man auch von entarteten Eigenwerten (Messwerten) und entarteten Zuständen (Eigenzuständen).

³Siehe: Franz Schwabl, Quantenmechanik (QM I), 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002, Tabelle 13.3. Entartungsgrad der ersten Schalen, Seite 252.

Die äußersten Schalen der Edelgase sind mit acht Elektronen voll besetzt: zwei Elektronen im s-Orbital und insgesamt sechs Elektronen in den drei p-Orbitalen p_x , p_y und p_z . Diese Elektronenkonfiguration mit vollständiger Besetzung aller Schalen heißt **Edelgaskonfiguration**. Edelgase sind chemisch besonders stabil. Sie kommen deshalb nicht in Molekülform sondern nur atomar vor.

2.2 Einstein-Koeffizienten und Übergangswahrscheinlichkeiten

Wir betrachten im Folgenden ein (stationäres) System aus N Teilchen bzw. N Atomen im **thermodynamischen Gleichgewicht** mit einem elektromagnetischen Strahlungsfeld (Photonenfeld, Photonengas oder auch Vakuumfeld) bei konstanter Temperatur T und mit **konstantem Volumen** V . Ein sich daraus ergebendes praktikables Modell zur Herleitung der Einstein-Koeffizienten mit den entsprechenden Schlussfolgerungen sind N Atome im Innern eines **Hohlraumresonators**. Dieses Modell ermöglicht uns die Verwendung der sog. Maxwell-Boltzmann-Verteilung und des Planck'schen Strahlungsgesetzes:⁴

Im Wellenbild wird das Photonengas innerhalb des Hohlraumresonators durch optische Eigenschwingungen bestimmter Frequenz ν dargestellt. Diese Eigenschwingungen werden auch **Moden** genannt und lassen sich durch stehende Wellen veranschaulichen. Die Moden können quantenmechanisch als harmonische Oszillatoren mit der Energie

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

angesehen werden. Dabei ist n die Anzahl der Photonen in der betrachteten Mode. Im thermodynamischen Gleichgewicht ist die mittlere Anzahl \bar{n} der Photonen pro Mode gleich dem Bose-Faktor:

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}.$$

Im Gegensatz zum klassischen harmonischen Oszillator besitzt der quantenmechanische harmonische Oszillator und somit auch jede Mode für $n = 0$ die Grundzustands- oder **Nullpunktenergie** $E_0 = \frac{1}{2} h\nu$. Und aus (2.1) folgt, dass diese „Nullpunktsschwingungen“ für alle zulässigen Werte von ν existieren.

• Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Die klassische Maxwell-Boltzmann-Verteilung besagt, dass in einem System aus N freien Teilchen bei der Temperatur T **im Mittel**

$$N_i = K \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Teilchen jeweils die Energie E_i besitzen. Der Proportionalitätsfaktor $K = K(T)$ ist dabei allgemein eine temperaturabhängige Konstante.

Berücksichtigen wir jetzt bezüglich der Maxwell-Boltzmann-Verteilung das (Elektronen-)Schalenmodell der Atome mit dem sich daraus ergebendem Entartungsgrad g_i , d. h. die (maximal mögliche) Besetzungszahl des i -ten Zustands der Energie E_i mit Elektronen, resultiert das **Boltzmann'sche Energieverteilungsgesetz**

$$N_i \propto g_i \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B T}}.$$

⁴Erläuterungen zur Maxwell-Boltzmann-Verteilung und zum Planck'schen Strahlungsgesetz sowie die zugehörigen Herleitungen finden sich u. a. bei Wikipedia und in meinem Skript *Grundlegendes zur Statistischen Physik – Ensembles und Verteilungen* in den Abschnitten 11.1 Maxwell-Boltzmann-Verteilung, 13.2 Was ist der Boltzmann-Faktor $e^{-E_T/(k_B T)}$, 18.2 Hohlraumresonator und Mode – Planck'sches Strahlungsgesetz und 18.6 Strahlungsleistung des schwarzen Körpers.

Wie man sieht, ist die Anzahl N_i der Atome, die sich im Energiezustand E_i befinden, *proportional* zum Entartungsgrad g_i . Der Entartungsgrad g_i ist also das statistische Gewicht für die Zustände der Energie E_i .

Mit der kanonischen Zustandssumme $Z_k = \sum_i g_i \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$, erhalten wir schließlich die Wahrscheinlichkeit P_i für das Vorhandensein eines Atoms im Energiezustand E_i wie folgt:

$$P_i = \frac{N_i(E_i)}{N} = \frac{g_i \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{Z_k}.$$

Für eine bestimmte Temperatur T gilt folglich

$$\frac{N_j}{N_i} = \frac{\tilde{K} \cdot g_j \cdot e^{-\frac{E_j}{k_B T}}}{\tilde{K} \cdot g_i \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B T}}} = \frac{g_j}{g_i} \cdot e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}, \quad \Delta E = E_j - E_i \quad (2.2)$$

mit dem

$$\text{Boltzmann-Faktor} \quad e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}.$$

- Das **Planck'sche Strahlungsgesetz** liefert die **spektrale Energiedichte** u :

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} \quad \text{bzw.} \quad (2.3)$$

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1} \quad \text{bzw.}$$

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1},$$

$$[u] = \frac{(\text{Energie in}) \text{ J}}{(\text{Volumen in}) \text{ m}^3 \cdot (\text{Frequenz in}) \frac{1}{\text{s}}} = \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{m}^3} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}.$$

Die spektrale Energiedichte *entspricht* also der Photonendichte pro Frequenzeinheit. Die Terme $\frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1}$ und dessen Äquivalente sind der Bose-Faktor.

Wir werden im Folgenden die spektrale Modendichte $G(\nu)$ des Hohlraumresonators verwenden. Diese hängt mit der spektralen Energiedichte auf folgende Weise zusammen:

$$u(\nu) = \underbrace{\frac{8\pi \nu^2}{c^3}}_{G(\nu)} \cdot \underbrace{\frac{h\nu}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1}}_{\bar{E}_{\text{mod}}}.$$

Dabei ist \bar{E}_{mod} die mittlere Modenenergie und die **spektrale Modendichte** ist

$$\boxed{G(\nu) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3}}. \quad (2.4)$$

Schließlich benötigen wir auch noch den Zusammenhang zwischen der spektralen Energiedichte u und der **spektralen Strahlungsintensität**

$$\boxed{I'(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = \frac{c}{4} \cdot u(\nu)} \quad (2.5)$$

des schwarzen Körpers bzw. Hohlraumresonators. Die *spektrale Strahlungsintensität* wird in der Optik auch *spektrale Bestrahlungsstärke* genannt und besitzt die Maßeinheit

$$[I'] = \frac{(\text{Energie in}) \text{ J}}{(\text{Fläche in}) \text{ m}^2 \cdot (\text{Zeit in}) \text{ s} \cdot (\text{Frequenz in}) \frac{1}{\text{s}}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}.$$

Wenden wir jetzt die Maxwell-Boltzmann-Verteilung auf die N Atome eines Gases in einem Raumbereich an, der die Bedingungen unseres anfangs definierten Modells erfüllt. Dabei betrachten wir die energetischen Übergänge zwischen dem Grundzustand und dem angeregten Zustand eines Atoms. Wir sprechen in diesem Fall von einem **Zwei-Niveau-System**. Den Grundzustand versehen wir mit dem tiefgestelltem Index 1 und den angeregten Zustand mit dem tiefgestelltem Index 2.

Anmerkung

Man kann statt der Teilchenzahl N in einem festen Volumen auch allgemein die Teilchendichte für die Herleitungen verwenden, was aber letztlich zu den gleichen Ergebnissen führt.

Die Gesamtanzahl der Atome ist also $N = N_1 + N_2$ mit der Anzahl N_1 von Atomen im Grundzustand und der Anzahl N_2 von Atomen im angeregten Zustand.

Im **thermodynamischen Gleichgewicht** ist die Rate der Atome, die durch das Photonenfeld energetisch angeregt werden, genauso groß wie die Rate der Atome, die ihre Anregungsenergie wieder abstrahlen. Dabei spielen sich stets gleichzeitig die folgenden, in der Abbildung 2.1 veranschaulichten Photonen-Absorptions- und -Emissionsprozesse ab:

- **(Induzierte) Absorption**

Springen Elektronen mit der Energie E_1 auf das höhere Energieniveau E_2 beim Übergang der zugehörigen Atome vom Grundzustand in den angeregten Zustand durch die Zufuhr von jeweils einem Photon der Energie $h\nu_{12}$ pro Atom, so ist mit (2.2) die Anzahl der angeregten Atome im Mittel

$$N_2 = \tilde{K} \cdot g_2 \cdot e^{-\frac{E_2}{k_B T}}.$$

Die Anzahl der Atome auf dem 1-ten Energieniveau ist dann $N_1 = N - N_2$. Und wegen $E_2 > E_1$ gilt $N_2 < N_1$. Das Verhältnis N_2/N_1 wird auch **relative Besetzungszahl** genannt:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\tilde{K} \cdot g_1 \cdot e^{-\frac{E_1}{k_B T}}}{\tilde{K} \cdot g_2 \cdot e^{-\frac{E_2}{k_B T}}} = \frac{g_1}{g_2} \cdot e^{\frac{E_2 - E_1}{k_B T}}, \quad E_2 - E_1 = h\nu_{12} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \cdot e^{-\frac{h\nu_{12}}{k_B T}} \quad \Leftrightarrow \quad N_2 = \frac{g_2}{g_1} \cdot N_1 \cdot e^{-\frac{h\nu_{12}}{k_B T}}}. \quad (2.6)$$

Die „Triebkraft“ der induzierten Absorption ist das Photonenfeld. Die Übergangsrate, d. h. die Anzahl der Atome, die dabei pro Zeiteinheit in diesem Fall

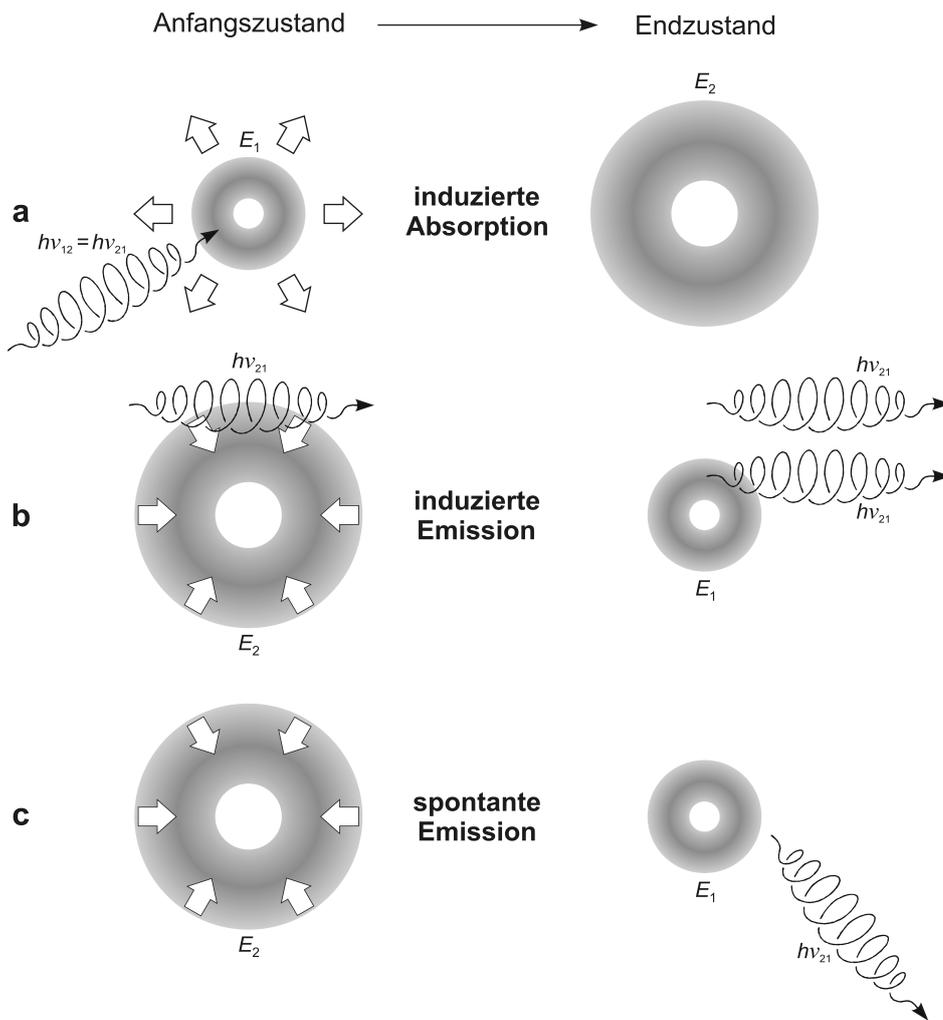


Abb. 2.1 Veranschaulichung a) der induzierten Absorption, b) der induzierten Emission und c) der spontanen Emission am Beispiel des Übergangs zwischen dem Grundzustand des Wasserstoffatoms mit der Elektronenkonfiguration $1s^1$ (Elektronenenergie E_1) und seinem ersten angeregten Zustand mit der Elektronenkonfiguration $2s^2$ (Elektronenenergie E_2). Es handelt sich dabei um den Übergang zwischen L- und K-Schale aus der Lyman-Serie.

Nach Eugene Hecht, Optik, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, 2005, Seite 943.

energetisch angeregt werden, hängt nämlich von der spektralen Energiedichte u des Photonenfeldes im Frequenzbereich des Übergangs ab gemäß

$$\frac{dN_1}{dt} \propto u(\nu) .$$

Außerdem gilt: Je größer die Anzahl N_1 der Atome im Grundzustand ist, desto mehr Atome können in den angeregten Zustand (mit der Elektronenenergie E_2) übergehen gemäß

$$\frac{dN_1}{dt} \propto N_1 .$$

Mit dem Proportionalitätsfaktor B_{12} erhalten wir daraus schließlich die

Übergangsrate

$$\left(\frac{dN_1}{dt} \right)_{\text{ind.A.}} = -B_{12} \cdot N_1 u \quad \Rightarrow \quad [B_{12}] = \frac{\text{m}}{\text{kg}} .$$

B_{12} ist hier der **Einstein-Koeffizient** für die induzierte Absorption und das Minuszeichen steht für die Abnahme von N_1 .

Der Term $B_{12} \cdot u$ besitzt die „Dimension“ $1/\text{s}$ und beschreibt die **Wahrscheinlichkeit** für *einen* Absorptionsübergang pro Zeiteinheit (also für *ein* Atom im Grundzustand bei fester Gesamtzahl N der Atome).

• Induzierte Emission

Umgekehrt erfolgt der Übergang der angeregten Atome in den nicht angeregten Ausgangszustand bzw. Grundzustand indem die Elektronen des (höheren) 2-ten Energieniveaus jeweils ein Photon der Energie $h\nu_{21} = h\nu_{12}$ abstrahlen und so zurück in das 1-te Energieniveau fallen.

Die induzierte (stimulierte, erzwungene) Emission setzt genau wie die (induzierte) Absorption die Einwirkung eines Photonenfeldes voraus und ist der
Umkehrprozess zur Absorption.

Mit dem entsprechenden **Einstein-Koeffizienten** B_{21} erhalten wir somit für den Übergang vom angeregten Zustand in den Grundzustand die **Übergangsrate**

$$\left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{\text{ind.E.}} = -B_{21} \cdot N_2 u \quad \Rightarrow \quad [B_{21}] = \frac{\text{m}}{\text{kg}} .$$

Das aus dem Photonenfeld stammende und die induzierte Emission stimulierende Photon besitzt ebenfalls die Anregungsenergie $h\nu_{12}$ und stellt in der Emissionsbilanz einen „durchlaufenden Posten“ dar. Es nimmt nämlich dabei ein Photon der gleichen Energie $h\nu_{21} = h\nu_{12}$ mit. Außerdem ist es bemerkenswert, dass bei der induzierten Emission das emittierte Photon

- dieselbe Ausbreitungsrichtung (siehe Abbildung 2.1 b),
- dieselbe Frequenz,
- dieselbe Phase und
- dieselbe Polarisation

besitzt wie das stimulierende Photon. Im Wellenbild sind demzufolge die stimulierende einfallende Welle und die induzierte emittierte Welle **kohärent**. Anders gesagt und bezugnehmend auf den Hohlraumresonator befindet sich das emittierte Photon in *derselben* Strahlungsmode wie die einfallende Welle.

Der Term $B_{21} \cdot u$ besitzt die „Dimension“ $1/\text{s}$ und beschreibt die **Wahrscheinlichkeit** für *einen* induzierten Emissionsübergang pro Zeiteinheit (also für *ein* angeregtes Atom bei fester Gesamtzahl N der Atome).

- **Spontane Emission**

Bei der spontanen Emission gibt das angeregte Atom völlig statistisch und **unabhängig vom Photonenfeld** ein Photon der Anregungsenergie $h\nu_{21} = h\nu_{12}$ mit zufälliger Phase, zufälliger Polarisierung sowie **beliebiger Ausbreitungsrichtung** ab und fällt dabei in seinen Grundzustand zurück. Die **Übergangsrate** bei der spontanen Emission hängt demzufolge nur von der Anzahl N_2 angeregter Atome ab gemäß

$$\left(\frac{dN_2}{dt} \right)_{\text{sp.E.}} = -A_{21} \cdot N_2 \quad \Rightarrow \quad [A_{21}] = \frac{1}{s} .$$

Dabei ist A_{21} der **Einstein-Koeffizient** der spontanen Emission.

Der Einstein-Koeffizient A_{21} besitzt die „Dimension“ $1/s$ und beschreibt die **Wahrscheinlichkeit** für *einen* spontanen Emissionsübergang pro Zeiteinheit (also für *ein* angeregtes Atom).

Das aber bedeutet, dass die mittlere Dauer, bis ein angeregtes Atom spontan (ohne äußere Einwirkung) in den Grundzustand übergeht, durch den Kehrwert von A_{21} bestimmt wird. Diese (mittlere) **Lebensdauer** eines angeregten Zustands ist also

$$\tau = \frac{1}{A_{21}} .$$

Die Lebensdauer τ eines angeregten Zustands unterliegt der Heisenberg'schen Unschärferelation gemäß

$$\Gamma \cdot \tau = \frac{\Gamma}{A_{21}} = \hbar$$

mit der Energieniveaubreite (Spektralliniensbreite) Γ (siehe Abschnitt 3.1.2).

Quantenelektrodynamisch betrachtet ist die Ursache der spontanen Emission die Nullpunktsenergie. Und die Ursache der Nullpunktsenergie wiederum ist die Heisenberg'sche Unschärferelation. Die Energie-Zeit-Unschärfe erlaubt nämlich einer Mode innerhalb eines kurzen Zeitintervalls in einen angeregten Zustand und sofort wieder zurück in den Grundzustand zu springen. Bei diesen sog. Vakuumschwankungen werden *virtuelle Photonen* emittiert, welche angeregte Atome zu „spontanen“ Übergängen veranlassen können. Insofern kann man die spontane Emission als eine von Vakuumschwankungen induzierte Emission betrachten. Und weil die Vakuumschwankungen statistischer Natur sind, ist folglich auch die spontane Emission statistischer Natur.

Während die Boltzmann-Verteilung von der Temperatur abhängt, sind die drei Einstein-Koeffizienten **stoffspezifische Konstanten** und hängen demzufolge *nicht* von äußeren Faktoren wie beispielsweise der Temperatur ab.

Im thermodynamischen Gleichgewicht muss die Gesamtemissionsrate stets gleich der Absorptionsrate sein. Das bedeutet, dass sowohl die Anzahl der angeregten Atome als auch die Anzahl der Atome im Grundzustand zeitlich konstant ist. Wir erhalten demzufolge

$$N_1(t) = N_2(t) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = 0$$

mit

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{ind.A.}} - \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{ind.E.}} - \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{sp.E.}} \\ &= -B_{12} \cdot N_1 u + B_{21} \cdot N_2 u + A_{21} \cdot N_2 = 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{dN_2}{dt} &= \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{ind.E.}} + \left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{\text{sp.E.}} - \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{\text{ind.A.}} \\ &= -B_{21} \cdot N_2 u - A_{21} \cdot N_2 + B_{12} \cdot N_1 u = 0.\end{aligned}$$

Durch einfache Äquivalenzumformung resultiert daraus schließlich

$$\boxed{A_{21} \cdot N_2 + B_{21} \cdot N_2 u = B_{12} \cdot N_1 u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12} \cdot u}{A_{21} + B_{21} \cdot u}} \quad (2.7)$$

Aufgrund der Maxwell-Boltzmann-Verteilung ist im thermodynamischen Gleichgewicht

$$N_2 < N_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{N_2}{N_1} < 1.$$

Wie man an (2.7) erkennt, ist deshalb die Absorptionswahrscheinlichkeit kleiner als die (Gesamt-)Emissionswahrscheinlichkeit gemäß

$$B_{12} \cdot u < A_{21} + B_{21} \cdot u.$$

Dass trotz kleinerer Absorptionswahrscheinlichkeit die Absorptionsrate gleich der Emissionsrate ist, wird also durch die größere Teilchenzahl N_1 im Grundzustand gewährleistet.

Im thermodynamischen Gleichgewicht verhalten sich Teilchenzahl und zugehörige Übergangswahrscheinlichkeit der verschiedenen Energieniveaus zueinander umgekehrt proportional.

Gleichsetzen von (2.7) mit (2.15) und Auflösen nach u liefert

$$\begin{aligned}\frac{N_2}{N_1} &= \frac{B_{12} \cdot u}{A_{21} + B_{21} \cdot u} = \frac{g_2}{g_1} \cdot e^{\frac{-h\nu_{12}}{k_B T}} \quad \Leftrightarrow \\ u = u(\nu) &= \frac{A_{21}}{B_{21}} \cdot \frac{1}{\frac{B_{12}}{B_{21}} \cdot \frac{g_1}{g_2} \cdot e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}.\end{aligned} \quad (2.8)$$

Der Koeffizientenvergleich von (2.8) mit dem Planck'schen Strahlungsgesetz (2.3)

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1}$$

zeigt, dass sich (2.8) durch die gleichzeitige Anwendung der Beziehungen

$$\boxed{A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21} = G(\nu) \cdot h\nu \cdot B_{21}} \quad (2.9)$$

und

$$\boxed{B_{12} \cdot g_1 = B_{21} \cdot g_2 \quad \Leftrightarrow \quad B_{21} = \frac{g_1}{g_2} B_{12}} \quad (2.10)$$

in (2.3) überführen lässt. Diese beiden Beziehungen beschreiben die Zusammenhänge zwischen den Einstein-Koeffizienten und gelten für alle Frequenzen ν und alle Temperaturen T . Bei gleichen statistischen Gewichten (Entartungsgraden) g_1 und g_2 resultiert aus (2.10)

$$g_1 = g_2 \quad \Rightarrow \quad B_{21} = B_{12} = B. \quad (2.11)$$

In diesem speziellen Fall sind induzierte Emission und induzierte Absorption gleich wahrscheinlich gemäß $B \cdot u(\nu)$ für *einen* Übergang pro Zeiteinheit.

Betrachten wir jetzt das Verhältnis von induzierter Emission zu spontaner Emission unter Berücksichtigung der spektralen Modendichte $G(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ (2.4). Mit den Wahrscheinlichkeit $W_{\text{ind.E.}}$ für die induzierte Emission und $W_{\text{spont.E.}}$ für die spontane Emission erhalten wir zunächst

$$\frac{W_{\text{ind.E.}}}{W_{\text{spont.E.}}} = \frac{N_2 \cdot B_{21} \cdot u}{N_2 \cdot A_{21}} = \frac{B_{21} \cdot u}{A_{21}} = \frac{B_{21} \cdot G(\nu) \cdot h\nu \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}}{A_{21}}. \quad (2.12)$$

Wenn wir jetzt A_{21} durch (2.9) ersetzen, so resultiert

$$\frac{W_{\text{ind.E.}}}{W_{\text{spont.E.}}} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (2.13)$$

Wie man sieht, verschiebt sich das Verhältnis von induzierter zu spontaner Emission mit zunehmender Temperatur T und bei fester Frequenz ν zugunsten der induzierten Emission, sodass letztere bei hohen Temperaturen klar überwiegt. Zum gleichen Ergebnis kommen wir, wenn wir von der spektralen Strahlungsintensität (2.5)

$$I'(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

des Hohlraumresonators ausgehen und mit der spektralen Energiedichte u vergleichen. Denn wie wir unter Berücksichtigung von (2.9) und mit (2.11) feststellen können, sind I' und u proportional gemäß

$$I'(\nu) = \frac{c}{4} \cdot u(\nu) = \frac{c}{4} \cdot \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} = \underbrace{\frac{c}{4} \cdot \frac{A_{21}}{B}}_{=\text{const}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}, \quad g_1 = g_2.$$

Die Idee zum Funktionsprinzip des Lasers

Bei der Beschreibung der Idee zum Funktionsprinzip des Lasers folgen wir der Argumentation von M. Alonso und E. J. Finn⁵

Das Kunstwort „Laser“ bedeutet „**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation“. Sinn und Zweck des Lasers ist es, bei kontinuierlicher Zufuhr von Energie in das System „Laser“ eine möglichst kontinuierliche Nettoemission von kohärenter elektromagnetischer Strahlung bzw. von Photonen aus dem System heraus zu erzeugen. Das bedeutet, dass ein Laser **nicht im thermodynamischen Gleichgewicht** „arbeitet“.

Sind Strahlung und Materie im thermodynamischen Gleichgewicht, gilt für unser Zwei-Niveau-System im Hohlraumresonator im Fall $g_1 \stackrel{!}{=} g_2 \Rightarrow B_{21} = B_{12} = B$:

$$\begin{aligned} \text{Emissionsrate} &= \text{Absorptionsrate} \\ B_{21} \cdot u(\nu) N_2 + A_{21} N_2 &= B_{12} \cdot u(\nu) N_1 \\ [B \cdot u + A_{21}] N_2 &= B \cdot u N_1 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\text{Emissionsrate}}{\text{Absorptionsrate}} = \left(1 + \frac{A_{21}}{B \cdot u}\right) \frac{N_2}{N_1} = 1} \quad (2.14)$$

Ist die Differenz $E_2 - E_1 = h\nu$ zwischen den beiden Niveaus jedoch hinreichend klein, so folgt mit (2.12) und (2.13) aus (2.14)

$$\frac{\text{Emissionsrate}}{\text{Absorptionsrate}} \approx \frac{N_2}{N_1}, \quad (2.15)$$

denn

$$\frac{W_{\text{spont.E.}}}{W_{\text{ind.E.}}} = \frac{A_{21}}{B \cdot u} = e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1 \quad \xrightarrow{h\nu \rightarrow 0} \quad \frac{A_{21}}{B \cdot u} \rightarrow 0.$$

Das bedeutet: Wenn im thermodynamischen Gleichgewicht E_2 nur geringfügig größer ist als E_1 , dann ist N_2 nur geringfügig kleiner als N_1 , wobei die Emissionsrate selbstverständlich immer noch gleich der Absorptionsrate ist. Eine Netto-Emission bzw. Lichtverstärkung ist demzufolge im thermodynamischen Gleichgewicht (bis zum Grenzfall $\frac{N_2}{N_1} = 1$) nicht möglich.

Eine Netto-Emission ist also nur im thermodynamischen Ungleichgewicht mit einer **Besetzungsinversion**, d. h. mit einer relativen Besetzungszahl $\frac{N_2}{N_1} > 1$ zu erwarten. Aus (2.15) folgt dann nämlich

$$N_2 > N_1 \quad \Rightarrow \quad \text{Emissionsrate} > \text{Absorptionsrate}.$$

Diese Besetzungsinversion erreicht man, indem man Atome aus dem Grundzustand (E_1) durch Zufuhr von Energie bzw. Photonen geeigneter Energie in einen angeregten Zustand „pumpt“. Im Fall des Zweiniveaulasers handelt es sich bei diesem angeregten Zustand gleichzeitig um das obere Laserniveau (E_2). Weil Zweiniveaulaser nicht kontinuierlich arbeiten, muss man dafür sorgen, dass durch optisches Pumpen kontinuierlich Atome auf ein Niveau angeregt werden, das oberhalb des oberen Laserniveaus liegt. Im Fall eines Dreiniveaulasers wäre dies der angeregte Zustand (E_3). Der Übergang der angeregten Atome (E_3) in den Grundzustand erfolgt dann zumindest teilweise über die Zwischenstufe, den metastabilen (langsam zerfallenden) Zustand (E_2) bzw. das obere Laserniveau, wodurch sich dann dauerhaft hohe Besetzungszahlen $N_2 > N_1$ mit der daraus resultierenden Netto-Emission realisieren lassen.

⁵Marcelo Alonso und Edward J. Finn, Quantenphysik und Statistische Physik, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, 2005, Seite 577 bis Seite 579.

3 Die Kohärenz des Lichts

3.1 Wellenpaket – Wellenzug – Superpositionsprinzip

3.1.1 Teilchenbild

Im **Teilchenbild** bzw. Photonenbild ist natürlich ausgestrahltes Licht, das durch spontane Emission entsteht wie beispielsweise das thermische Licht einer Glühfadenlampe, ein „Gemisch“ aus Photonen verschiedener Energie und verschiedener Ausbreitungsrichtung. Photonen sind Bosonen und können quantenphysikalisch in Raum und Zeit als (räumlich „begrenzte“) Wellenpakete (Wellengruppen) beschrieben werden, die der Heisenberg’schen Energie-Zeit-Unschärfe gehorchen müssen.

Ein Photon mit der Energie $h\nu$ in Gestalt eines **Wellenpakets** beispielsweise $\psi(t)$ oder $\vec{E}(t)$ ist die Superposition von unendlich vielen harmonischen Funktionen verschiedener Periode (deshalb auch die Bezeichnung Wellengruppe) mit der Amplitudenmodulation dieser Wellengruppe durch eine Einhüllende (z. B. eine Gauß-Funktion oder eine Lorentz-Funktion). Die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ des Wellenpakets ist dessen **kontinuierliches Frequenzspektrum** mit der Halbwertsbreite $\Delta\omega$ um die mittlere Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, die an der Stelle des Maximums der Funktion der Fourier-Transformierten liegt. Jedes Wellenpaket besitzt demzufolge ein kontinuierliches Frequenzspektrum und an einem festen Ort die „Lebensdauer“ Δt . In Übereinstimmung damit und auch in Übereinstimmung mit der Heisenberg’schen Energie-Zeit-Unschärferelation gilt:

Aus der raumzeitlichen Beschränktheit der Wellenpakete folgt eine Frequenzstreuung und damit eine natürliche (unvermeidbare) Linienbreite im Frequenzspektrum. Genauer gesagt: Je länger die Lebensdauer Δt eines Photons ist, desto schmaler ist sein Frequenzspektrum bzw. desto kleiner ist die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ und umgekehrt. Je größer Δt ist, desto schärfer ist die zugehörige Spektrallinie. Deshalb besitzt das Frequenzspektrum eines Lasers eine besonders kleine Linienbreite.

3.1.2 Wellenbild

Im **Wellenbild** ist natürlich ausgestrahltes Licht im Allgemeinen eine Überlagerung von statistisch (zufällig) verteilten elementaren sinusförmigen Transversalwellenzügen (kurz: elementaren Wellenzügen) verschiedener mittlerer Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, verschiedener Polarisation, verschiedenem Phasenwinkel ϕ (kurz: verschiedener Phase ϕ) und verschiedener Lebensdauer Δt an einem festen Ort entsprechend einer verschiedenen räumlichen Länge $c \cdot \Delta t$.

Wie Wellenbild und Teilchenbild so sind auch elementare Wellenzüge und Photonen komplementär, das heißt, ein Photon und der ihm entsprechende elementare Wellenzug sind zwei sich gegenseitig ausschließende Erscheinungsformen derselben physikalischen Realität. Anders gesagt, je nach Beobachtungsmethode besitzt Licht entweder Teilchen- bzw. Photonencharakter oder Wellencharakter. Dieser Sachverhalt wird auch als Welle-Teilchen-Dualismus bezeichnet.

Emittiert werden elementare Wellenzüge beispielsweise durch elektronische Übergänge, also wenn Elektronen einer Strahlungsquelle von einem höheren in ein niedrigeres Energieniveau springen bzw. wenn Teilchen wie beispielsweise Atome von einem angeregten in einen weniger angeregten oder in den Grundzustand übergehen. Die Dauer

dieser elektronischen Übergänge bzw. Emissionsvorgänge beträgt etwa 10^{-10} s bis 10^{-8} s, liegt also in der Größenordnung um $\Delta t = 10^{-9}$ s = 1 ns entsprechend einer Länge der elementaren Wellenzüge von etwa $c \cdot \Delta t = 30$ cm. In Abhängigkeit von der Emissionsdauer und von der Wellenlänge besitzen dann die elementaren Wellenzüge etwa einhunderttausend bis zu vielen Millionen Perioden.

Die angeregten Zustände besitzen die mittlere Lebensdauer $\overline{\Delta t} = \tau_c$, die unmittelbar zusammenhängt mit der **mittleren Lebensdauer der elementaren Wellenzüge**.¹ Es gilt nämlich: „Die Breite einer Spektrallinie, die einem gedämpften Wellenzug des einzelnen Emissionsaktes entspricht, ist gleich der reziproken **Lebensdauer des angeregten Zustandes**. Diese Beziehung gilt ganz allgemein, gleichgültig ob der Strahlungsprozeß durch Dämpfung oder anders abgebrochen wird.“² Das heißt aber, dass sich die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ einer Spektrallinie um die mittlere Kreisfrequenz ω_0 reziprok verhält zur mittleren Lebensdauer τ des zugehörigen elementaren Wellenzuges gemäß

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta\omega} \Leftrightarrow \Delta\omega \cdot \tau_c = 1 \quad (3.1)$$

Diese Beziehung heißt **spektrale Kohärenzbedingung** und wird oft auch in der schwächeren Form

$$\Delta\omega \cdot \tau_c \lesssim 2\pi \Leftrightarrow \Delta\nu \cdot \tau_c \lesssim 1$$

verwendet. Sie erfüllt die Heisenberg'sche Energie-Zeit-Unschärferelation, denn

$$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar \Delta\omega \cdot \tau_c \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta\omega \cdot \tau_c = 1 > \frac{1}{2}.$$

Wir zeigen eine Herleitung der Beziehung (3.1) nach dem

Springer-Lehrbuch *Physik kompakt 3 – Quantenphysik und Statistische Physik* von Gunnar Lindström, Rudolph Langkau und Wolfgang Scobel, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002, Abschnitt 5.3 *Beispiel zur Energie-Zeit-Unschärfe* (Resonanz angeregter Atomzustände), Seite 68 bis Seite 77 :

Ein Atom im angeregten Zustand verhält sich wie ein Resonator. Wir erfassen dessen Zustand durch die Wellenfunktion bzw. die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\psi(t)$, die charakterisiert wird durch die Eigenfrequenz ω_0 des Zustands und durch die **Dämpfung bei spontaner Emission** von elektromagnetischer Energie $\Delta E = \hbar\Delta\omega$ in „Gestalt“ eines Photons. Erfolgt diese Emission ab dem Zeitpunkt $t = 0$, so beschreibt die Wellenfunktion die

$$\text{freie gedämpfte Schwingung} \quad \psi(t) = A e^{-\frac{1}{2\tau_c}t} e^{i\omega_0 t}. \quad (3.2)$$

Hierbei ist τ_c die mittlere Lebensdauer des angeregten Zustands. Die Momentanamplitude der emittierten elektromagnetischen Strahlung soll proportional zur Wellenfunktion $\psi(t)$ sein, sodass die Intensität $I(t)$ der Strahlung proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^*\psi$ für die Emission eines Photons ist:

$$I(t) \propto \psi^*\psi = \left(A e^{-\frac{1}{2\tau_c}t} e^{-i\omega_0 t} \right) \cdot \left(A e^{-\frac{1}{2\tau_c}t} e^{i\omega_0 t} \right) = A^2 e^{-\frac{1}{\tau_c}t} \Rightarrow$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{\tau_c}t}. \quad (3.3)$$

¹Wir verwenden bei τ_c hier bereits den Index c , weil sich im Abschnitt 3.3 zeigt, dass τ_c die Kohärenzzeit ist.

²Zitiert aus dem Springer-Lehrbuch *Gerthsen Physik*, Helmut Vogel, 20. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999, Abschnitt 12.2.2 *Linienverbreiterung*, Seite 606.

(3.3) bedeutet aber auch: Befinden sich N_0 Atome zum Zeitpunkt $t = 0$ im angeregten Zustand, so sind es zum Zeitpunkt t nur noch $N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{1}{\tau_c} t}$ und nach Verstreichen der mittleren Lebensdauer des angeregten Zustands schließlich $N(\tau_c) = \frac{1}{e} \cdot N_0$.

Nach Fourier lässt sich die Wellenfunktion (3.2) durch Überlagerung von unendlich vielen harmonischen Schwingungen F verschiedener Frequenz ω , also als Fourier-Integral darstellen:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \cdot d\omega, \quad \omega \geq 0.$$

$F(\omega)$ ist die Fourier-Transformierte bzw. die Spektralfunktion von $\psi(t)$ und hat die Gestalt

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} \cdot dt \quad \text{wegen} \quad \psi(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0.$$

Einsetzen von (3.2) für $\psi(t)$ liefert

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{\infty} A e^{-\frac{1}{2\tau_c} t} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} \cdot dt \\ &= A \int_0^{\infty} A e^{-at} \cdot dt \quad \text{mit} \quad a = \frac{1}{2\tau_c} + i(\omega_0 - \omega), \\ F(\omega) &= -A \frac{1}{a} e^{-at} \Big|_0^{\infty} = A \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

„Entsprechend der statistischen Interpretation von $\psi(t)$ ist $F(\omega)$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Emission der Frequenz ω , $F^*(\omega) \cdot F(\omega)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, mit der die Frequenz ω emittiert wird.

Wir benutzen jetzt einen hier nicht hergeleiteten Sachverhalt: Die Wahrscheinlichkeit für die Absorption eines Photons $\hbar\omega$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Photons $\hbar\omega$ derselben Frequenz. Damit wird die Absorptionsintensität für die Anregung des atomaren Niveaus der mittleren Energie $E_0 = \hbar\omega_0$ gegeben durch:

$$I(\omega) \propto F^*(\omega) F(\omega)$$

Und dies muss dann auch gleichzeitig die Streuintensität sein!³

Die Intensität der emittierten Strahlung ist folglich

$$\begin{aligned} I(\omega) &= b \cdot F^*(\omega) F(\omega) = b \cdot A \frac{1}{a^*} \cdot A \frac{1}{a} = \frac{b A^2}{a^* \cdot a} \\ &= \frac{C}{\left[\frac{1}{2\tau_c} - i(\omega_0 - \omega) \right] \left[\frac{1}{2\tau_c} + i(\omega_0 - \omega) \right]} = \frac{C}{\left[\frac{1}{2\tau_c} + i(\omega - \omega_0) \right] \left[\frac{1}{2\tau_c} - i(\omega - \omega_0) \right]}, \\ I(\omega) &= \frac{C}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau_c^2}}. \end{aligned}$$

Für $\omega = \omega_0$ erhalten wir daraus die Gleichung, in der $I(\omega)$ maximal ist und aus der wir die Konstante C bestimmen können:

$$I(\omega_0) = \frac{C}{\frac{1}{4\tau_c^2}} \quad \Leftrightarrow \quad C = I(\omega_0) \cdot \frac{1}{4\tau_c^2}.$$

³Zitiert aus: Gunnar Lindström, Rudolph Langkau, Wolfgang Scobel, Springer-Lehrbuch *Physik kompakt 3 – Quantenphysik und Statistische Physik*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002, Seite 72 und Seite 73. Dabei haben wir $F(\omega)$ für $f(\omega)$ geschrieben.

Damit haben wir schließlich die Anregungsfunktion bzw.

$$\boxed{\text{Resonanzfunktion } I(\omega) = I(\omega_0) \frac{\frac{1}{4\tau_c^2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau_c^2}}} \quad (3.4)$$

gefunden. Den halben Wert gegenüber ihrem Maximum $I(\omega_0)$ besitzt die Resonanzfunktion an den beiden Stellen

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{1}{2\tau_c} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{1}{2\tau_c} :$$

$$I(\omega) = I(\omega_0) \frac{\frac{1}{4\tau_c^2}}{\left[\left(\omega_0 - \frac{1}{2\tau_c} \right) - \omega_0 \right]^2 + \frac{1}{4\tau_c^2}} = I(\omega_0) \frac{\frac{1}{4\tau_c^2}}{\left[\left(\omega_0 + \frac{1}{2\tau_c} \right) - \omega_0 \right]^2 + \frac{1}{4\tau_c^2}} = I(\omega_0) \frac{\frac{1}{4\tau_c^2}}{\frac{1}{4\tau_c^2}} = I(\omega_0) \cdot \frac{1}{2} .$$

Demzufolge ist die **Halbwertsbreite der Resonanzkurve**

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \left(\omega_0 + \frac{1}{2\tau_c} \right) - \left(\omega_0 - \frac{1}{2\tau_c} \right) = \frac{1}{\tau_c} .$$

Die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ der Resonanzkurve ist die (spektrale) Linienbreite. Somit lautet die Beziehung zwischen der Linienbreite und der mittleren Lebensdauer eines angeregten Zustands bzw. der mittleren Lebensdauer eines elementaren Wellenzuges

$$\Delta\omega \cdot \tau_c = 2\pi\Delta\nu \cdot \tau_c = 1 . \quad \square$$

Wir können aber die Resonanzfunktion auch als Funktion der Photonenenergie $E = \hbar\omega$ bzw. $E_0 = \hbar\omega_0$ betrachten, wenn wir in (3.4) den Bruchterm mit \hbar^2 erweitern und $\frac{1}{\tau_c^2} = (\Delta\omega)^2$ sowie $\hbar \cdot \Delta\omega = \Gamma$ setzen. In Analogie zur Halbwertsbreite $\Delta\omega$ ist dann Γ die Energieniveaubreite:

$$I(E) = I(E_0) \frac{\frac{1}{4\tau_c^2} \cdot \hbar^2}{\left[(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4\tau_c^2} \right] \cdot \hbar^2} = I(E_0) \frac{\frac{1}{4} (\Delta\omega)^2 \hbar^2}{(\hbar\omega - \hbar\omega_0)^2 + \frac{1}{4} (\Delta\omega)^2 \hbar^2} ,$$

$$I(E) = I(E_0) \frac{\frac{1}{4} \Gamma^2}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2} . \quad (3.5)$$

(3.5) entspricht dem **Lorentz-Profil** bzw. einer Breit-Wigner-Kurve.

Zwei weitere Herleitungen der Beziehung (3.1) finden sich im Vorlesungsskript von Professor Dieter Freude, Universität Leipzig 2006 unter <https://home.uni-leipzig.de/energy/pdf/freusd2.pdf> Abschnitt 2.6 *Lebensdauer und natürliche Linienbreite*, Seite 14.

Die elementaren Wellenzüge sind definiert durch den elektrischen Feldanteil bzw. die elektrische Feldstärke \vec{E}_n , den magnetischen Feldanteil bzw. die magnetische Flussdichte \vec{B}_n , die Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0 = |\vec{c}_0|$, den Wellenvektor oder Propagationsvektor \vec{k}_n in Ausbreitungsrichtung und die Wellenzahl $k_n = |\vec{k}_n| = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ gemäß

$$c_0 \frac{\vec{k}_n}{k_n} = \vec{c}_0 .$$

Die Feldvektoren eines elementaren Wellenzuges bilden im Vakuum mit dem zugehörigen Wellenvektor ein orthogonales Rechtssystem in der Reihenfolge

$$\vec{E}_n \perp \vec{B}_n \perp \vec{k}_n \perp \vec{E}_n .$$

Im Folgenden unterdrücken wir vereinfachend den magnetischen Feldanteil und betrachten nur das \vec{E} -Feld, auch optisches Feld genannt. Außerdem legen wir, wenn nicht anders ausgewiesen, die Schwingungsebene des \vec{E} -Feldes in die x, y -Ebene, sodass \vec{k} die Richtung der z -Achse besitzt.

Die elementaren Wellenzüge überlagern sich zum optischen Strahlungs- oder Wellenfeld. Insofern sind die elementaren Wellenzüge Teilwellen des resultierenden optischen Wellenfeldes.

Nach dem **Superpositionsprinzip** erhält man die Gesamtfeldstärke \vec{E} eines optischen Wellenfeldes aus den Feldstärken \vec{E}_n und den Amplituden \vec{A}_n der einzelnen elementaren Wellenzüge mit dem Laufindex n wie folgt:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{E}_n = \sum_n \vec{A}_n(\vec{r}, t) \cdot e^{i\phi_n}, \quad \phi_n(\vec{r}, t) = \vec{k}_n \cdot \vec{r} - \omega_n t.$$

Anders als in der oft verwendeten symbolhaften Darstellung sind elementare Wellenzüge selbstverständlich dreidimensionale physikalische Phänomene, die sich im Ortsraum ausbreiten, sich gegenseitig durchdringen und dabei das Wellenfeld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ bilden.

3.2 Kohärenz

Siehe auch: Dr. Wiebke Salzmann, physik.wissenstexte.de, Wissenstexte – Kohärenz.

Kohärent bedeutet zusammenhängend und geht zurück auf die lateinischen Begriffe **cohaerentia** – Zusammenhang bzw. **cohaerere** – zusammenhängen. Wir schreiben im Folgenden statt elementare Wellenzüge kurz Wellenzüge. Die Kohärenz ergibt sich aus der Phasenkorrelation zwischen den Wellenzügen des Lichts. Die **Kohärenzbedingung** ist eine konstante Phasenbeziehung bzw. eine konstante Phasendifferenz $\Delta\phi$ einschließlich $\Delta\phi = 0$ zwischen sich überlagernden Wellenzügen. Man kann jeden Wellenzug für sich genommen als kohärent (interferenzfähig) betrachten, denn prinzipiell wäre mit einem einzelnen Wellenzug beispielsweise Interferenz am Doppelspalt möglich.

Wir beginnen unsere Überlegungen mit zwei Zitaten zur Definition der wichtigsten Begriffe:

„Die **Kohärenz** bestimmt die Interferenzfähigkeit der Teilwellen. Die Kohärenz wird immer in Bezug auf eine gewisse Mess- Beobachtungsdauer T_{mess} definiert. Eine zeitlich stationäre Interferenzstruktur kann nur dann beobachtet werden, wenn sich die Phasenunterschiede $\Delta\phi = \phi_j(\vec{r}_j, t) - \phi_i(\vec{r}_i, t)$ zwischen beliebigen Teilwellen $\vec{E}_i(\vec{r}_i, t)$ und $\vec{E}_j(\vec{r}_j, t)$ während der Beobachtungsdauer oder Messdauer T_{mess} um weniger als 2π ändern. Wenn sich an einem festen Raumpunkt $\vec{r}_i = \vec{r}_j$ die Phasenunterschiede $\Delta\phi$ innerhalb T_{mess} um weniger als 2π ändern, dann nennt man die Teilwellen **zeitlich kohärent**. Andererseits, wenn sich Phasenunterschiede $\Delta\phi$ an zwei beliebigen Orten $\vec{r}_i \neq \vec{r}_j$ innerhalb T_{mess} um weniger als 2π ändern, dann nennt man die Teilwellen **räumlich kohärent**. Zusammenfassend gilt, dass nur mit kohärenten Teilwellen stationäre Interferenzmuster beobachtet werden können.“⁴

„Eine zeitlich stationäre Interferenzstruktur kann nur dann beobachtet werden, wenn sich die Phasendifferenzen $\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_k$ zwischen beliebigen Teilwellen \vec{E}_j, \vec{E}_k im Raumpunkt $P(\vec{r})$ während der Beobachtungsdauer Δt um weniger als 2π ändern. Man nennt die Teilwellen dann **zeitlich kohärent**. . . .

Die maximale Zeitspanne Δt_c , während der sich Phasendifferenzen zwischen allen im Punkt P überlagerten Teilwellen um höchstens 2π ändern, heißt **Kohärenzzeit**. . . . Ändert sich die räumliche Differenz

$$\Delta_r \varphi_i = \varphi_i(\vec{r}_1) - \varphi_i(\vec{r}_2)$$

der Phase φ_i einer beliebigen Teilwelle \vec{E}_i während der Beobachtungszeit Δt um weniger als 2π , so heißt das Wellenfeld räumlich kohärent Die Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, auf der $\Delta_r \varphi_i = 0$ erfüllt ist, heißt **Kohärenzfläche** F_c .

Als Kohärenzlänge $\Delta s_c = c' \cdot \Delta t_c$ wird die Strecke bezeichnet, die das Licht während der Kohärenzzeit zurücklegt. Das Produkt aus Kohärenzfläche und Kohärenzlänge Δs_c heißt **Kohärenzvolumen** ΔV_c Nur innerhalb des Kohärenzvolumens können Interferenzstrukturen beobachtet werden.“⁵

⁴Zitiert aus: Prof. Dr. Ursula Keller, ETH Zürich, Quantenelektronik, FS11, Kap 4 Interferenz und Kohärenz, Abschnitt 4.1 Definition von Interferenz und Kohärenz, Seite 1.

⁵Zitiert aus: Wolfgang Demtröder, Springer-Lehrbuch, *Experimentalphysik 2 – Elektrizität und Optik*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 295 und Seite 296. Dort wird

Anmerkung zum Sprachgebrauch

Man spricht gelegentlich von der Kohärenz einer Lichtquelle, meint dabei aber selbstverständlich die Kohärenz des von dieser Quelle emittierten Lichts.

Man unterscheidet also zwischen **zeitlicher Kohärenz** (auch longitudinale Kohärenz, räumliche Longitudinalkohärenz, Längenkohärenz oder englisch *longitudinal spatial coherence* genannt), die die Spektralverteilung einer Lichtquelle beschreibt und somit ein Maß für die spektrale Reinheit ist, und **räumlicher Kohärenz** (auch laterale Kohärenz, räumliche Transversalkohärenz, Winkelkohärenz oder englisch *lateral spatial coherence* genannt), die von der räumlichen Ausdehnung der Lichtquelle abhängt.

Voraussetzungen für die Interferenz zweier Teilwellen sind

- hinsichtlich der Polarisierung:

Die \vec{E} -Felder der Teilwellen müssen am Ort des Interferenzmusters kollinear sein. Zirkular polarisierte Wellen mit unterschiedlicher Helizität können nicht interferieren.

- hinsichtlich Frequenz und Phase:

Die Teilwellen müssen die gleiche Frequenz besitzen und die Phasendifferenz zwischen den Teilwellen muss zeitlich konstant sein, was allgemein nur erfüllt ist, wenn die Teilwellen aus derselben Quelle stammen.

„Es gilt ganz allgemein: Haben zwei Wellen verschiedene Frequenzen oder ändern sich ihre Phasenunterschiede mit der Zeit beliebig, so beobachtet man kein stationäres Interferenzmuster, und die Wellen werden als inkohärent bezeichnet.“⁶

**Kohärenz bedeutet Interferenzfähigkeit, d. h.
kohärentes Licht ist interferenzfähiges Licht.**

Vollständig kohärente und vollständig inkohärente optische Wellenfelder sind Idealisierungen, weil die dafür erforderlichen Anforderungen an die Quelle physikalisch nicht realisierbar sind:

- Die vollständige Kohärenz erforderte eine punktförmige Quelle (ohne räumliche Ausdehnung), die streng monochromatisches Licht emittiert. Die Wellenzüge streng monochromatischen Lichts wären unendlich lang.
- Die vollständige Inkohärenz erforderte eine Quelle mit räumlich unendlich ausgedehnter Emissionsfläche, von der Licht mit einem unendlich ausgedehnten Frequenzspektrum emittiert wird. Wellenzüge mit einer unendlichen Frequenzbreite wären unendlich kurz.

Damit wären alle von real existierenden (natürlichen und künstlichen) Lichtquellen emittierten Wellenfelder genau genommen immer nur partiell-kohärent bzw. teilweise kohärent oder kurz teilkohärent. Auch kann es kein absolut monochromatisches Licht geben, sondern nur näherungsweise monochromatisches bzw. quasimonochromatisches.

für die Kohärenzzeit Δt_c statt τ_c und für die Kohärenzlänge Δs_c statt l_c geschrieben, was ebenfalls üblich ist.

⁶Zitiert aus: Prof. Dr. Ursula Keller, ETH Zürich, Quantenelektronik, FS11, Kap 4 Interferenz und Kohärenz, Abschnitt 4.1 *Definition von Interferenz und Kohärenz*, Seite 9.

Wir werden uns im Folgenden mit der üblichen *genäherten* Graduierung begnügen. So unterscheiden wir dann nicht-monochromatisches von monochromatischem Licht. Weiterhin betrachten wir **monochromatisches Licht** als ein optisches Wellenfeld, das durch Superposition von Wellenzügen der gleichen Frequenz entsteht, **Laserlicht** als monochromatisch und kohärent und schließlich **natürlich erzeugtes Licht** als nicht-monochromatisch und inkohärent. Damit sind alle übrigen Wellenfelder mehr oder weniger stark bzw. schwach teilkohärent. Im Fall der Teilkohärenz sind die entsprechenden Interferenzmuster nicht so scharf bzw. kontrastreich ausgebildet wie im Fall der Kohärenz. Wie man sieht, ist der Übergang von der Kohärenz zur Inkohärenz in der physikalischen Realität fließend.

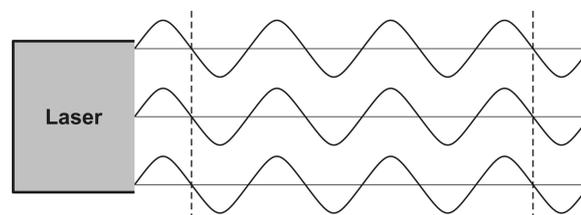
Zur Orientierung nehmen wir eine Auflistung einiger Wellenfelder hinsichtlich ihrer Kohärenz vorweg:

- monochromatische ebene Welle **kohärent** –
zeitlich vollständig, räumlich vollständig,
- nicht-monochromatische ebene Welle **partiell-kohärent** –
zeitlich partiell, räumlich vollständig,
- monochromatische Kugelwelle **kohärent** –
zeitlich vollständig, räumlich vollständig,
- nicht-monochromatische Kugelwelle **partiell-kohärent** –
zeitlich partiell, räumlich vollständig,
- natürlich erzeugtes Licht **inkohärent** –
zeitlich partiell, räumlich partiell.

Parallele Wellenzüge bilden durch Überlagerung ein optisches Wellenfeld mit ebenen Wellenfronten (ebene Wellen) und sind **räumlich kohärent**.

Als Standardbeispiel für kohärentes (vollständig zeitlich *und* vollständig räumlich kohärentes) Licht gilt das Bündel paralleler monochromatischer Lichtstrahlen eines Lasers (siehe Abbildung 3.1). **Laserlicht** entsteht durch **induzierte Emission** und ist vollständig phasenkorreliert.

Abb. 3.1 (Vollständige) Kohärenz des von einem Laser ausgestrahlten Lichts.

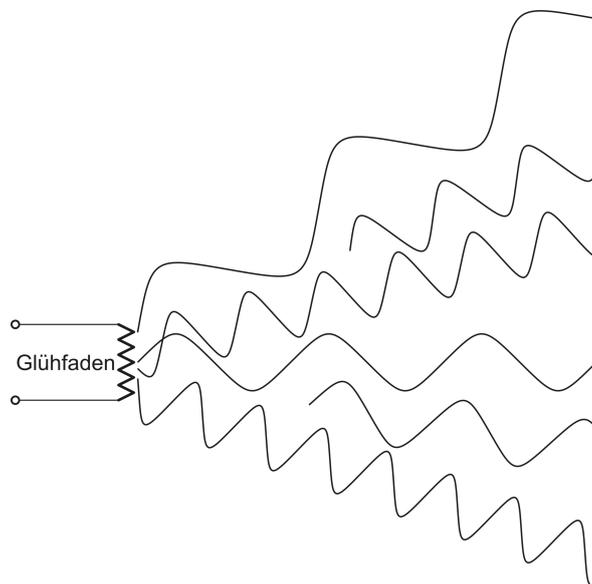


In diesem Fall sind die parallel zueinander verlaufenden Wellenzüge extrem lang und besitzen nahezu die gleiche Frequenz sowie die gleiche Phase (schwingen also im Gleichtakt), sodass die Wellenfronten Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung bilden. Derartiges Laserlicht kommt dem Ideal einer ebenen elektromagnetischen Welle sehr nahe.

Natürlich ausgestrahltes Licht (siehe Abbildung 3.2) entsteht durch **spontane Emission** und ist **inkohärent**,

- weil die Zeitabstände zwischen den Emissionen der Wellenzüge statistisch (zufällig, willkürlich) verteilt sind,
- weil die Wellenzüge verschieden lang sind,
- weil die Wellenzüge verschiedene Frequenzen besitzen, denn natürlich ausgestrahltes Licht ist nicht monochromatisch,
- weil die Wellenzüge verschieden Phasen besitzen und verschieden polarisiert sind bzw. weil Phase und Polarisation schwanken und
- weil die Wellenzüge verschiedene Ausbreitungsrichtungen besitzen. Photonen werden statistisch in alle Richtungen emittiert.

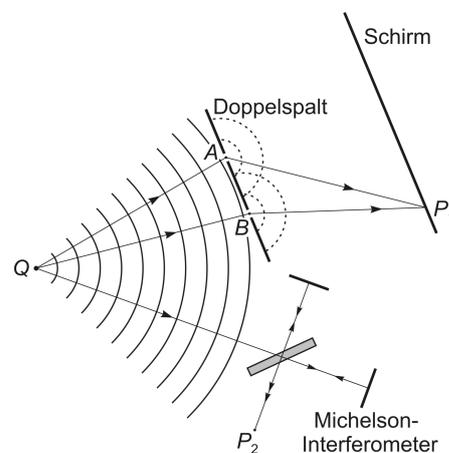
Abb. 3.2 Von einer Glühfadenlampe natürlich ausgestrahltes Licht. Dass Licht allgemein inkohärent ist, liegt an der diskontinuierlichen Natur der Emissionsprozesse.



Von Punktquellen emittierte Wellenzüge sind Kugelwellen und ihre Wellenfronten bilden Kugelflächen. Das von einer Punktquelle emittierte monochromatische Licht ist kohärent, also vollständig zeitlich und vollständig räumlich kohärent.

Abb. 3.3 Veranschaulichung der Kohärenz am Beispiel einer Punktquelle Q , die monochromatisches Licht emittiert.

Abbildung nach F. Pedrotti, L. Pedrotti, W. Bausch, H. Schmidt, 2005.



Erläuterung von zeitlicher und räumlicher Kohärenz anhand der Abbildung 3.3:

- Die **zeitliche (longitudinale) Kohärenz**

resultiert aus der Phasenkorrelation zwischen den Teilwellen bezüglich unterschiedlicher Laufzeiten entsprechend unterschiedlicher (räumlicher) Laufstrecken **in Ausbreitungsrichtung** dieser Teilwellen und zeigt sich beispielsweise beim Nachweis von Interferenz mit dem Michelson-Interferometer:

Beim Michelson-Interferometer fungiert der halbdurchlässige Spiegel als Strahlteiler (für „einen Lichtstrahl“ in Ausbreitungsrichtung). Die Längenänderung eines der beiden Interferometerarme verändert in diesem die Lichtlaufzeit, so dass man die Laufzeitdifferenz zwischen den beiden erzeugten Teilwellen variieren kann. Nach der Wiedervereinigung der beiden Teilwellen stellt man dann, analog zur Intensitätsverteilung des Interferenzmusters beim Doppelspalt, verschiedene Lichtintensitäten in Abhängigkeit von der Laufzeitdifferenz fest.

Monochromatisches Licht ist **zeitlich kohärent**, denn die Summe (Überlagerung) von jeweils zwei (harmonischen) Wellenzügen E_1 und E_2 gleicher Kreisfrequenz ω ist wieder eine harmonische Welle E mit der Kreisfrequenz ω gemäß

$$E_1 + E_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_2) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) = E .$$

Und allgemein gilt: Wellenzüge gleicher und im Beobachtungszeitraum konstanter Frequenz (mit daraus resultierender zeitlich konstanter Phasendifferenz) sind zeitlich kohärent.

- Die **räumliche (transversale) Kohärenz**

resultiert aus der Phasenkorrelation zwischen **unterschiedlichen räumlichen Punkten** im optischen Wellenfeld und zeigt sich beispielsweise bei der Interferenz am Doppelspalt:

Durch den Doppelspalt erzeugt man aus dem primären Wellenfeld, hier der monochromatischen Kugelwelle, zwei sekundäre Teilwellen der gleichen Frequenz. Fällt monochromatisches Licht der Frequenz $\nu = \frac{c}{\lambda}$ auf den Doppelspalt, so interferieren die beiden von den Spalten ausgehenden Sekundärwellen miteinander und bilden in Abhängigkeit vom Gangunterschied $\Delta s = QAP_1 - QBP_1$ der Teilwellen ein für den Doppelspalt charakteristisches Interferenzmuster auf dem Schirm. Der Gangunterschied zwischen den Teilwellen entspricht der Phasendifferenz $\Delta\phi$, denn mit dem Spaltabstand g und dem Richtungswinkel φ zwischen Doppelspalt und Schirm gilt (siehe Abschnitt 19.2 *Fraunhoferbeugung* im Skript *Ausgewählte Themen und Herleitungen aus dem Physik-Grundstudium*, Seite 96)

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot g \cdot \sin\varphi = k \cdot \Delta s .$$

3.3 Zur zeitlichen (longitudinalen) Kohärenz – Kohärenzlänge

Die zeitliche Kohärenz ist charakterisiert durch die Korrelation zweier Wellenfelder an ein und demselben Ort und zu unterschiedlichen Zeiten. Anders gesagt: Wellenzüge sind zeitlich kohärent, wenn ihre Phasen bzw. Wellenfronten bezüglich **eines festen Raumpunktes in Ausbreitungsrichtung** (longitudinal) korreliert sind. Zeitliche Kohärenz von Wellenzügen oder Wellenfeldern liegt also vor, wenn die Phasendifferenz zwischen ihnen *zeitlich* konstant ist.

Dass die vollständige zeitliche Kohärenz genau genommen ein Idealzustand ist, liegt an der endlichen räumlichen Ausdehnung der Wellenzüge in Ausbreitungsrichtung. Denn an einem bezüglich der Quelle festen Raumpunkt erscheinen die vorbeilaufenden Lichtwellen jeweils nur eine begrenzte und allgemein kurze Zeit lang sinusförmig zwischen plötzlich bzw. zufällig (statistisch) auftretenden Phasenänderungen. Diese Tatsache führt uns direkt zum Begriff der Kohärenzzeit:

„Ein einzelner Wellenzug existiert durchschnittlich eine als Kohärenzzeit Δt_c bezeichnete Zeitspanne lang, die gleich dem Kehrwert der Frequenzbreite $\Delta\nu$ ist. ... Die Kohärenzzeit entspricht effektiv derjenigen Zeitspanne, für die man die Phase der Lichtquelle in einem gegebenen Punkt des Raumes noch hinreichend genau voraussagen kann.“⁷

Anders gesagt: Das *durchschnittliche* Zeitintervall, in dem die Wellenzüge einer Strahlung bzw. eines Wellenfeldes ununterbrochen und ohne Phasensprung eine Sinuskurve beschreiben, bezeichnen wir als

$$\text{Kohärenzzeit } \overline{\Delta t} = \tau_c .$$

Im Sinne der Konsistenz insbesondere mit dem Abschnitt 3.1 verwenden wir für die Kohärenzzeit das Symbol τ_c und nicht Δt_c oder t_c .

Je länger die Kohärenzzeit ist, desto ausgeprägter ist die zeitliche Kohärenz des Wellenfeldes. Den Grad der Korrelation der Phasen an zwei in Ausbreitungsrichtung liegenden Punkten bezeichnet man in der englischsprachigen Literatur auch als *longitudinal coherence*.

Die Kohärenzzeit beeinflusst das Auftreten bzw. die Beobachtbarkeit von Interferenzmustern beispielsweise bei der Interferenz am Doppelspalt wie folgt:

„Wenn es sich ... um endliche Wellenzüge handelt, könnte am Beobachtungspunkt ein Wellenzug schon passiert sein, während der zweite noch gar nicht eingetroffen ist. Das kann sich besonders bei großen Ablenkungswinkeln ereignen, wenn der Gangunterschied groß und die Länge der Wellenzüge klein ist. Deshalb hat man den Begriff der Kohärenzlänge eingeführt, der der mittleren Länge der Wellenzüge entspricht.“⁸ Mit der Lichtgeschwindigkeit c ist dann die

$$\text{Kohärenzlänge } l_c = c \cdot \tau_c .$$

Die Kohärenzlänge ist also die *durchschnittliche* (räumliche) Länge der Wellenzüge des Wellenfeldes. Anders gesagt: Die Kohärenzlänge ist die räumliche Länge, über die die Teilwellen eine feste Phasenbeziehung haben.

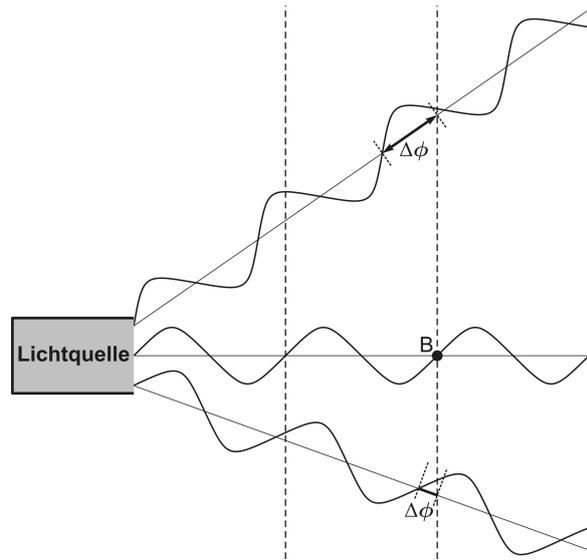
⁷Zitiert aus: Eugene Hecht, *Optik*, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, Wien, München, 2005, Seite 901 und Seite 902.

⁸Zitiert aus: Würzburger Quantenphysik-Konzept. G56 Kohärenzlänge, <https://www.forphys.de/Website/qm/gloss/kohlaenge.html>

Veranschaulichung der zeitlichen Kohärenz

Ein Beobachter befindet sich an einem festen Ort im Ruhesystem der Lichtquelle, greift einen der vorbeiziehenden Wellenzüge heraus und betrachtet die übrigen Wellenzüge des Lichts und zwar senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des herausgegriffenen Wellenzuges. Findet er dabei feste Phasenbeziehungen (Phasendifferenzen) zwischen dem herausgegriffenen Wellenzug und anderen Wellenzügen, so sind der herausgegriffene und diese anderen Wellenzüge zeitlich kohärent (siehe Abbildung 3.4).

Abb. 3.4 Zeitliche Kohärenz.
Der Beobachter B ruht bezüglich der Lichtquelle und „sieht“ die Wellenzüge gleicher Frequenz jeweils mit einer bestimmten zeitlich konstanten Phasendifferenz $\Delta\phi$ an sich vorbeiziehen.



Zusammenfassend und um den Unterschied zur räumlichen Kohärenz zu verdeutlichen, stellen wir fest:

Besteht in einem bezüglich der Quelle festen Raumpunkt über ein beobachtbares Zeitintervall T_{mess} zwischen Wellenzügen eine zeitlich konstante Phasendifferenz, so sind diese Wellenzüge zeitlich kohärent:

$$\tau_c > T_{\text{mess}} \Rightarrow \text{zeitliche Kohärenz, Interferenzmuster beobachtbar ,}$$

$$\tau_c < T_{\text{mess}} \Rightarrow \text{zeitliche Inkohärenz, Interferenzmuster nicht beobachtbar .}$$

Wenn die Wellenzüge zu kurz sind, „überlappen“ sie sich ggf. nicht mehr und es kommt nicht zur Interferenz. Der Idealfall vollständiger zeitlicher Kohärenz würde unendlich lange Wellenzüge gleicher Frequenz voraussetzen.

Im Wellenfrontenkonzept bedeutet zeitliche Kohärenz den konstanten räumlichen Abstand zwischen den Wellenfronten in Ausbreitungsrichtung (longitudinal) beim Vorbeilaufen der Wellenzüge an einem festen Raumpunkt. Alle Wellenzüge mit gleicher Frequenz wie beispielsweise bei monochromatischem Licht sind (zumindest partiell) zeitlich kohärent, aber nicht unbedingt auch räumlich kohärent.

Kurz gesagt:

Wenn Wellenzüge bzw. Teilwellen die gleiche Frequenz und über einen „beobachtbaren“ Zeitraum eine feste Phasenbeziehung (Phasendifferenz) haben, sind sie zeitlich kohärent.

Für das Intensitätsspektrum $I(\omega)$ bzw. die Intensität der harmonischen Anteile eines Wellenzugs der Kreisfrequenz ω_0 gilt:

$$I(\omega) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \cdot \tau_c\right)}{\frac{\omega - \omega_0}{2} \cdot \tau_c} \right]^2. \quad (3.6)$$

I_0 ist hierbei die Intensität an der Stelle des zentralen Maximums, d. h. an der Stelle der **Spektrallinie** mit der Kreisfrequenz ω_0 . Schreiben wir jetzt

$$(\omega - \omega_0) \cdot \tau_c = \omega \cdot \tau_c - \omega_0 \cdot \tau_c = \phi - \phi_0,$$

resultiert aus (3.6)

$$I(\omega) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\phi - \phi_0}{2}\right)}{\frac{\phi - \phi_0}{2}} \right]^2.$$

Die Gleichung (3.6) stimmt formal mit der Intensitätsformel

$$I_\varphi = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \sin \varphi\right)}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \sin \varphi} \right]^2 \quad (3.7)$$

für die Interferenz am Einzelspalt überein (siehe Kapitel 19 *Fraunhoferbeugung* im Skript *Ausgewählte Themen und Herleitungen aus dem Grundstudium*, Seite 101 und Seite 102). Hier liegt das zentrale Maximum bzw. das Hauptmaximum bei $\varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0$ und das 1. Minimum zu beiden Seiten des zentralen Maximums liegt bei $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$, sodass (3.7) an den Stellen der 1. Minima die Form

$$I_\varphi = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \frac{\lambda}{a}\right)}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \frac{\lambda}{a}} \right]^2 = I_0 \left[\frac{\sin \pi}{\pi} \right]^2 = 0 \quad (3.8)$$

annimmt. Es gilt also für den Einzelspalt:

$$\Delta\phi = \pm\pi \quad \text{Phasendifferenz zwischen 1. Minimum und zentralem Maximum,}$$

$$\Delta\phi = 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \varphi \quad \text{Phasendifferenz zwischen den beiden 1. Minima.}$$

In der Herleitung der Interferenz am Strichgitter bzw. am Einzelspalt im Abschnitt 19.2 *Fraunhoferbeugung* des Skripts *Ausgewählte Themen und Herleitungen aus dem Grundstudium* hatten wir für die Phasendifferenz δ bezüglich des zentralen Maximums bei $\varphi = 0$ folgendes gefunden:

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{\Delta s}{\lambda} = \frac{g \sin \varphi}{\lambda} \Leftrightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot g \sin \varphi.$$

Setzen wir diese Phasendifferenz δ in (14.3) ein, erhalten wir für die vorläufige Amplitudenformel (14.3) für die Interferenz am Strichgitter

$$A_\varphi = A' \frac{\sin\left(N \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot g \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot g \sin \varphi\right)} = A' \frac{\sin\left(N \cdot \frac{\delta}{2}\right)}{\sin \frac{\delta}{2}},$$

sodass aus (14.6) schließlich

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \sin \varphi\right)}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \sin \varphi} = A_0 \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}$$

resultiert. Schreiben wir jetzt ϕ_0 für die Phase ϕ an der Stelle des zentralen Maximums, so gilt

$$\delta = \phi - \phi_0$$

und (14.6) wird zu

$$A_\varphi = A_0 \frac{\sin \frac{\phi - \phi_0}{2}}{\frac{\phi - \phi_0}{2}} \quad \Rightarrow \quad I_\varphi = I_0 \left[\frac{\sin \frac{\phi - \phi_0}{2}}{\frac{\phi - \phi_0}{2}} \right]^2 . \quad \square$$

Für die 1. Minima im Verlauf von $I(\omega)$ (siehe Abbildung 12 im Skript *Ausgewählte Themen und Herleitungen aus dem Grundstudium*, Seite 102) muss gelten

$$\begin{aligned} \frac{(\omega_1 - \omega_0) \cdot \tau_c}{2} = -\pi & \Leftrightarrow \omega_1 = -\frac{2\pi}{\tau_c} + \omega_0 , \\ \frac{(\omega_2 - \omega_0) \cdot \tau_c}{2} = +\pi & \Leftrightarrow \omega_2 = +\frac{2\pi}{\tau_c} + \omega_0 . \end{aligned}$$

Als Breite $\Delta\omega$ des (zentralen) Hauptmaximums bzw. der Spektrallinie wird üblicherweise der *halbe* Abstand zwischen den beiden 1. Minima angenommen, d. h.

$$\frac{1}{2} \cdot |\omega_2 - \omega_1| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{\tau_c} = \frac{2\pi}{\tau_c} = \Delta\omega .$$

Mit $\omega = 2\pi\nu$ erhalten wir daraus die **spektrale Frequenzbreite** $\Delta\nu$ gemäß

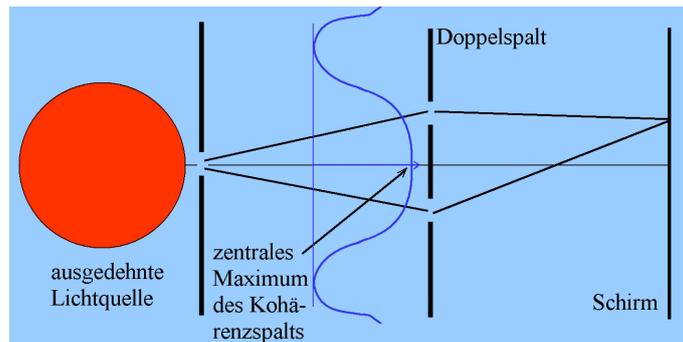
$$\boxed{\Delta\nu = \frac{1}{\tau_c} \Leftrightarrow \Delta\nu \cdot \tau_c = 1} .$$

3.4 Zur räumlichen (lateralen) Kohärenz – räumliche Kohärenzlänge

Die räumliche Kohärenz ist charakterisiert durch die Korrelation zweier Wellenfelder an verschiedenen Orten innerhalb einer zur Ausbreitungsrichtung senkrechten Ebene und zu einer festen Zeit.

Leicht veranschaulichen lässt sich die räumliche Kohärenz beispielsweise mit der Interferenz am Doppelspalt (siehe dazu Abbildung 3.5):

Abb. 3.5 Abbildung zur räumlichen Kohärenz aus: Würzburger Quantenphysik-Konzept. G56 Kohärenzlänge.



„Bei einer ausgedehnten Lichtquelle, wie etwa der Sonne, strahlen weit entfernte Atome vollkommen unabhängig voneinander ihr Licht ab. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die ausgesandten Wellenpakete nach dem Doppelspalt auf dem Schirm tatsächlich überlappen, ist also sehr gering. Verkleinert man jedoch die Lichtquelle künstlich durch einen **Kohärenzspalt**, dann entsteht Beugung am Einfachspalt mit einem zentralen Maximum. Wo auch immer die beitragenden Lichtstrahlen herkamen, sie müssen gleichphasig sein, sonst würden sie nicht zum zentralen Maximum beitragen. Sorgt man jetzt dafür, dass das zentrale Maximum vom Kohärenzspalt die beiden Spalte eines Doppelspalts gemeinsam ausleuchtet, so ist Doppelspalt-Interferenz möglich, weil das Licht durch den Kohärenzspalt **räumlich kohärent** gemacht wurde (**„Sichtbarkeitsbedingung“**).“⁹

„Die räumliche Kohärenz oder *räumliche Transversalkohärenz* (engl. *lateral spatial coherence*) ist möglicherweise leichter zu verstehen, weil sie eng mit dem Konzept der Wellenfront zusammenhängt: Befinden sich zu einem bestimmten Zeitpunkt zwei Punkte nebeneinander auf derselben Wellenfront, so bezeichnet man die Felder in diesen Punkten als räumlich kohärent.“¹⁰

Die räumliche Kohärenz hängt von der räumlichen Ausdehnung der Lichtquelle ab. Im Vergleich zur Wellenlänge λ sehr ausgedehnte Lichtquellen sind in der Regel räumlich inkohärent, weil in diesem Fall zwischen zwei transversal zur Ausbreitungsrichtung benachbarten Punkten im weit von der Quelle entfernten Wellenfeld keine Phasenkorrelation besteht. Im Idealfall vollständige räumliche Kohärenz würde eine (unendlich kleine) Punktquelle voraussetzen.

Wir zeigen diesen Sachverhalt anhand der Interferenz am Doppelspalt in der in Abbildung 3.6 dargestellten Versuchsanordnung und leiten dabei den Begriff der räumlichen Kohärenzlänge l_r her:

⁹Zitiert aus: Würzburger Quantenphysik-Konzept. G56 Kohärenzlänge,

<https://www.forphys.de/Website/qm/gloss/kohlaenge.html>

¹⁰Zitiert aus: Eugene Hecht, *Optik*, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, Wien, München, 2005, Seite 905.

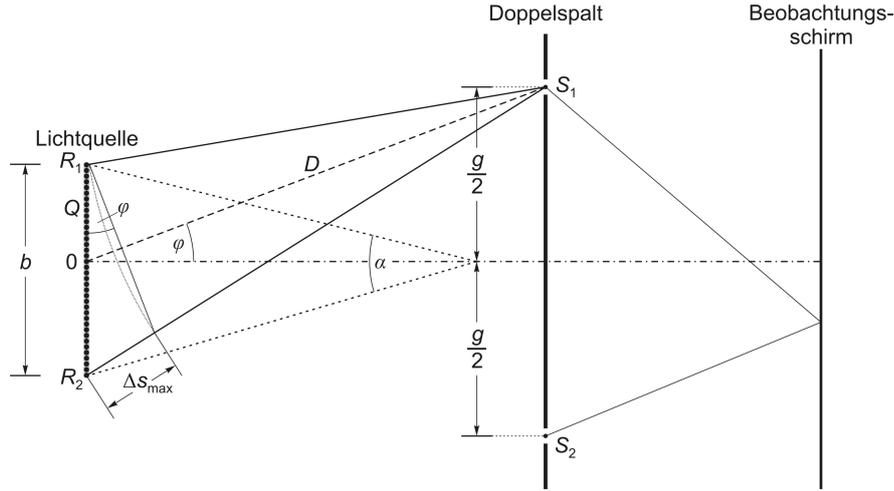


Abb. 3.6 Beim Young'schen Doppelspaltexperiment zur Herleitung der räumlichen Kohärenzlänge l_r zeigt sich der Einfluss der Quellengröße auf die Kohärenz des Wellenfeldes am Ort der Spalte S_1 und S_2 . Die Versuchsanordnung ist (nahezu) symmetrisch und die Ebenen von Quelle, Doppelspalt und Schirm sind komplanar und erstrecken sich senkrecht zur Mittellinie durch 0, was die Herleitung deutlich vereinfacht. Die Mittellinie kann man hier auch als optische Achse ansehen. Abbildung und Legende nach Wolfgang Demtröder, 2004.

Eine monochromatische Lichtquelle bestehe aus vielen voneinander unabhängigen Quellenelementen Q_n , sodass die Phasen ϕ_n der von den einzelnen Quellenelementen emittierten Teilwellen statistisch verteilt sind. Die Quelle habe die Querdimension b mit den Randquellen bzw. Randpunkten R_1 und R_2 . Das vom Punkt 0 emittierte Licht besitzt in den Spalten S_1 und S_2 wegen $\overline{0S_1} = \overline{0S_2}$ synchrone Phasenschwankungen und erzeugt deshalb auf dem Beobachtungsschirm ein zeitlich konstantes Interferenzmuster. Wegen der Laufstreckendifferenz bzw. des Gangunterschieds wie beispielsweise $\Delta s = \overline{QS_1} - \overline{QS_2}$ ist das für alle anderen Quellenpunkte Q_n nicht der Fall, insbesondere auch nicht für die Randpunkte R_1 und R_2 mit dem größten Gangunterschied

$$\begin{aligned} \Delta s_{\max} &= \overline{R_1S_2} - \overline{R_1S_1} = \overline{R_2S_1} - \overline{R_1S_1} \quad \text{mit} \quad \overline{R_1S_1} = \overline{R_2S_2} \\ &\approx b \cdot \sin \varphi = b \cdot \frac{g}{D} \quad \text{für} \quad D \gg g. \end{aligned}$$

Einem Gangunterschied Δs zwischen den Teilwellen entspricht die Phasendifferenz

$$\Delta \phi = k \cdot \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta s.$$

Wegen der statistischen Emission der Wellenzüge, ausgehend von den verschiedenen Quellenpunkten Q_n , folgt daraus:

Wenn der Gangunterschied Δs_{\max} größer als $\lambda/2$ wird, kann die Phasendifferenz $\Delta \phi = \phi(S_1) - \phi(S_2)$ um mehr als π schwanken, sodass sich dann das Interferenzmuster in der Beobachtungsebene zeitlich wegmittelt. Damit haben wir die Bedingung für die räumlich kohärente Beleuchtung der beiden Spalte für eine Quelle mit der Querdimension bzw. Breite b gefunden:

$$\Delta s_{\max} \approx \frac{b \cdot g}{2D} < \frac{\lambda}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b \cdot g}{D} < \lambda \quad \Rightarrow \quad (3.9)$$

$$\boxed{\text{räumliche Kohärenzlänge } l_r = g < \frac{D}{b} \cdot \lambda} . \quad (3.10)$$

Die Kohärenz und damit der Kontrast des Interferenzmusters werden stärker bei Verkleinerung der Quellengröße bzw. Quellenbreite b oder bei Verkleinerung des Spaltabstands g . Wird der Spaltabstand g größer als die räumliche Kohärenzlänge l_r , verschwindet das Interferenzmuster. Allgemein gilt:

Das monochromatische Licht einer räumlich ausgedehnten Quelle ist zwar zeitlich vollständig kohärent, aber räumlich nur partiell-kohärent, sodass der Kontrast des Interferenzmusters im Vergleich zu einer Punktquelle *gleichmäßig* gedämpft ist.

Wir betrachten jetzt das optische Wellenfeld in extrem großer Entfernung von einer räumlich ausgedehnten Quelle, die kein monochromatisches Licht emittiert. Ein Beispiel dafür ist das auf der Erde ankommende Licht der Fixsterne. Die Wellenzüge verschiedener Frequenz verlaufen dann nahezu parallel und besitzen näherungsweise die Eigenschaften ebener Wellen (siehe Abbildung 3.7). Man spricht deshalb bei Fixsternen in diesem Zusammenhang auch von Multifrequenzlasern. Das ankommende Wellenfeld ist vollständig räumlich und partiell zeitlich kohärent, also teilkohärent. Wenn wir den Sterndurchmesser bzw. die Quellenbreite b nicht kennen, können wir die räumliche Kohärenzlänge nicht mit (3.10) bestimmen. Allerdings lässt sich die Winkelausdehnung α der Quelle von der Doppelspaltebene aus leicht messen (siehe Abbildung 3.6). Ist die Quelle extrem weit entfernt bzw. für $D \gg b$ wird α sehr klein und wir erhalten in guter Näherung

$$\tan \frac{\alpha}{2} \approx \frac{b}{2D} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \approx \frac{b}{2D} \Leftrightarrow \alpha \approx \frac{b}{D} .$$

Dies setzen wir in (3.9) ein und erhalten so die räumliche Kohärenzbedingung bezüglich der Winkelausdehnung der Quelle:

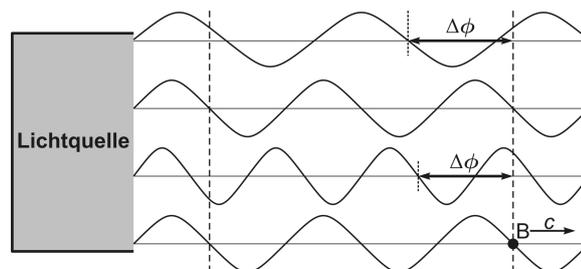
$$\frac{b}{D} \cdot g \approx \alpha \cdot g < \lambda \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\alpha < \frac{\lambda}{g}} .$$

Veranschaulichung der räumlichen Kohärenz für den Fall paralleler Wellenzüge

Abb. 3.7 Räumliche Kohärenz.

Der Beobachter B bewegt sich mit einem der Wellenzüge. Selbstverständlich handelt es sich hierbei um ein Gedankenexperiment, weil sich Körper mit einer Ruhemasse nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegen können.



Ein Beobachter greift einen der parallelen Wellenzüge des Wellenfeldes heraus, bewegt sich dann mit ihm und beobachtet dabei die übrigen Wellenzüge des Wellenfeldes

und zwar komplanar zur Ebene der Wellenfront, d. h. in diesem Fall senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des herausgegriffenen Wellenzuges.

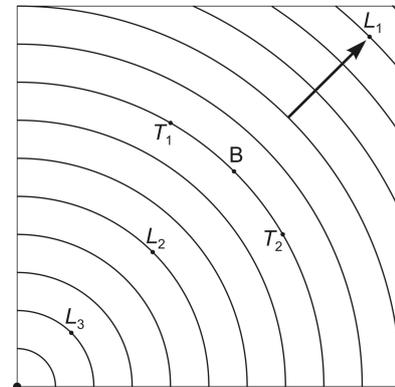
Findet er dabei feste Phasenbeziehungen (Phasendifferenzen) zwischen dem herausgegriffenen Wellenzug und anderen Wellenzügen, so sind der herausgegriffene und diese anderen Wellenzüge räumlich kohärent. Wie man an der Abbildung 3.7 erkennt, besteht bezüglich der Wellenfronten der verschiedenen Wellenzüge eine konstante Phasendifferenz. Das Licht ist in diesem Fall vollständig räumlich kohärent.

Parallele Wellenzüge mit gleicher Ausbreitungsrichtung bzw. Wellenfelder mit ebenen Wellenfronten sind räumlich kohärent, aber nicht unbedingt auch zeitlich kohärent. Unabhängig von der Frequenz besitzen sie im Vergleich zur Phase des Wellenzuges des „mitbewegten“ Beobachters in jedem Raumpunkt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung immer die gleiche Phasendifferenz. Verglichen wird also im Fall der räumlichen Kohärenz paralleler Wellenzüge die Phasendifferenz zwischen den Wellenzügen zu Beginn und am Ende von T_{mess} **an verschiedenen Orten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.**

3.5 Zur Kohärenz bei Punktquellen

Von Punktquellen emittierte Wellenzüge sind Kugelwellen und ihre Wellenfronten bilden Kugelflächen.

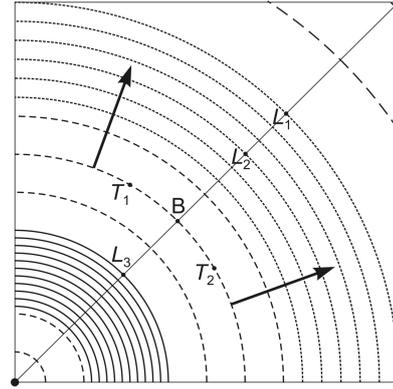
Abb. 3.8 Vollständige räumliche und vollständige zeitliche Kohärenz des Wellenfeldes einer Punktquelle, die monochromatisches Licht emittiert.
Abbildung nach E. Hecht, 2005.



Betrachten wir zunächst das Wellenfeld einer Punktquelle, die monochromatisches Licht emittiert (siehe Abbildung 3.8). Ein bezüglich der Quelle ortsfester Beobachter B findet im gesamten Bereich des Wellenfeldes eine konstante Phasendifferenz zu den sich radial ausbreitenden Wellenzügen und es besteht eine starke Phasenkorrelation mit den Punkten L_1 bis L_3 bzw. im gesamten Wellenfeld *längs der Ausbreitungsrichtung*. Weiterhin stellen wir fest, dass nicht nur die Phasendifferenz in den Punkten T_1 und T_2 auf der Wellenfront von B sondern auch die Phasendifferenzen *längs aller Wellenfronten* im gesamten Wellenfeld zeitlich konstant gleich Null sind.

Das von einer Punktquelle emittierte monochromatische optische Wellenfeld ist also vollständig zeitlich und vollständig räumlich kohärent.

Abb. 3.9 Vollständige räumliche und evl. teilweise zeitliche Kohärenz des Wellenfeldes einer Punktquelle, die Wellenzüge verschiedener Frequenz emittiert.
Abbildung nach E. Hecht, 2005.



Betrachten wir jetzt das optische Wellenfeld einer Punktquelle, die kein monochromatisches Licht emittiert (siehe Abbildung 3.9). Wie man sieht, sind auch in diesem Fall die Phasendifferenzen *längs aller Wellenfronten* der Wellenzüge verschiedener Frequenz im gesamten Wellenfeld zeitlich konstant gleich Null, sodass das Wellenfeld vollständig räumlich kohärent ist.

Ein bezüglich der Quelle ortsfester Beobachter B findet keine im gesamten Bereich des Wellenfeldes konstante Phasendifferenzen zwischen den sich radial ausbreitenden Wellenzügen, sodass keine oder nur eine schwache Phasenkorrelation zwischen den Punkten L_1 bis L_3 bzw. im gesamten Wellenfeld *längs der Ausbreitungsrichtung* besteht. Deshalb ist das Wellenfeld in der Abbildung 3.9 wenn überhaupt nur teilweise zeitlich kohärent. Treffen nämlich die Wellenfronten von Abbildung 3.9 beispielsweise auf einen Doppelspalt, so kommt es danach in Abhängigkeit von der Länge der nacheinander folgenden Wellenzüge und abhängig von ihrer Frequenz zu mehr oder weniger kurzzeitigen, verschiedenen Interferenzmustern. Wenn bei nicht-monochromatischem Licht überhaupt ein stationäres Interferenzbild entsteht, ist dieses keinesfalls so scharf, wie es bei monochromatischem Licht der Fall wäre. Allgemein gilt:

Von einer Punktquelle emittiertes Licht mit einem ausgedehnten Frequenzspektrum ist zwar räumlich vollständig kohärent, aber zeitlich nur partiell-kohärent, sodass der Kontrast das Interferenzmuster mit zunehmendem Abstand von der optischen Achse *zunehmend* gedämpft wird.

4 Die Polarisation des Lichts

Wir beginnen dieses Kapitel mit einem Zitat – in Anführungszeichen gesetzt – aus Eugene Hecht, *Optik*, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag München Wien, 2005, Seite 533 und Seite 534:

„Natürliches Licht

Eine gewöhnliche Lichtquelle besteht aus einer sehr großen Zahl zufällig ausgerichteter atomarer Strahler. Jedes angeregte Atom sendet etwa 10^{-8} s lang einen polarisierten Wellenzug aus. Alle diese Wellen gleicher Frequenz überlagern sich zu einer einzigen polarisierten Welle, die maximal 10^{-8} s lang stabil bleibt. Ständig werden neue Wellenzüge emittiert, und die Gesamtpolarisation ändert sich in einer vollkommen unvorhersehbaren Art und Weise. Finden diese Veränderungen mit so großer Geschwindigkeit statt, dass man die einzelnen resultierenden Polarisationszustände nicht mehr erkennen kann, so spricht man von **natürlichem Licht** oder *unpolarisiertem Licht*, wobei letztere Bezeichnung etwas irreführend ist, da sich das Licht in Wirklichkeit aus einer schnell veränderlichen Abfolge verschiedener Polarisationszustände zusammensetzt. *Zufällig polarisiertes Licht* ist wahrscheinlich eine treffendere Bezeichnung.

Wir können natürliches Licht mathematisch anhand zweier beliebiger, *inkohärenter*, orthogonaler, linear polarisierter Wellen gleicher Amplitude aufschreiben, also Wellen, deren relativer Phasenunterschied sich schnell und willkürlich verändert.

Dabei wollen wir nicht vergessen, dass eine idealisierte monochromatische Welle als unendlicher Wellenzug dargestellt werden muss. Wird diese Welle in zwei orthogonale Komponenten senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung zerlegt, so müssen die Komponenten ihrerseits dieselbe Frequenz besitzen, unendlich ausgedehnt und deshalb wechselseitig kohärent sein ($\varepsilon = \text{konstant}$).¹ Mit anderen Worten: *Eine ideal monochromatische ebene Welle ist immer polarisiert. . . .*

Im Allgemeinen ist Licht, ob „natürlichen“ oder „künstlichen“ Ursprungs, weder vollkommen polarisiert noch unpolarisiert – beides sind Grenzfälle. Der elektrische Feldvektor verändert sich meistens weder völlig unregelmäßig noch völlig regelmäßig, weshalb man solches Licht auch **teilweise polarisiert** nennt. Am einfachsten beschreibt man dieses Verhalten mit einer Überlagerung von natürlichem und polarisiertem Licht.“

Wir werden uns in diesem und in den folgenden Kapiteln mit polarisiertem, insbesondere mit linear polarisiertem und zirkular polarisiertem Licht (in Form *ebener* Wellen) beschäftigen. Dabei ist es uns erlaubt, vereinfachend nur den elektrischen bzw. *optischen Anteil* $\vec{E}(\vec{r}, t)$ der elektromagnetischen Wellen zu verwenden, denn die Polarisation einer elektromagnetischen Welle ist durch die Richtung des elektrischen Feldvektors \vec{E} definiert.

¹Wir werden den relativen Phasenunterschied ε mit $\Delta\phi$ bezeichnen.

Polarisation des Lichts im Wellenbild

Polarisationszustände

- \mathcal{P} -Zustand: lineare Polarisation,
- \mathcal{L} -Zustand: linkszirkulare Polarisation,
- \mathcal{R} -Zustand: rechtszirkulare Polarisation,
- \mathcal{E} -Zustand: elliptische Polarisation (allgemeiner Fall).

Die lineare und die zirkulare Polarisation kann man als Spezialfälle der elliptischen Polarisation ansehen.

Wir gehen aus vom elektrischen bzw. optischen Anteil

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x(\vec{r}, t) \\ E_y(\vec{r}, t) \\ E_z(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_{0x})} \\ E_{0y} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_{0y})} \\ E_{0z} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_{0z})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot e^{i\phi_{0x}} \\ E_{0y} \cdot e^{i\phi_{0y}} \\ E_{0z} \cdot e^{i\phi_{0z}} \end{pmatrix} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

einer **ebenen elektromagnetischen Welle** in der Darstellung als komplexwertige Wellenfunktion mit **konstanter Amplitude** $\vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$, mit dem variablen Phasenanteil $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ und mit den Phasenkonstanten $\phi_{0x}, \phi_{0y}, \phi_{0z}$. Die Phasenkonstanten können positive und negative Werte annehmen. Das Vorzeichen im variablen Phasenanteil $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ bestimmt die Ausbreitungsrichtung der Wellen:

$$\begin{aligned} e^{i(kz - \omega t)} &\Rightarrow \text{Ausbreitung in } (+z)\text{-Richtung,} \\ e^{i(kz + \omega t)} &\Rightarrow \text{Ausbreitung in } (-z)\text{-Richtung.} \end{aligned}$$

Wie allgemein üblich werden auch wir im Folgenden nur Wellen mit der Ausbreitung in die positive Richtung der z -Achse betrachten.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legt man gern die Ebene der Wellenfront in die (x, y) -Ebene, sodass sich die Welle gemäß $|\vec{k}| = k_z = k$ längs der z -Achse ausbreitet. Die komplexwertige Wellenfunktion erhält dann die einfache Gestalt

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_x(z, t) \\ E_y(z, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot e^{i(kz - \omega t + \phi_{0x})} \\ E_{0y} \cdot e^{i(kz - \omega t + \phi_{0y})} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot e^{i\phi_{0x}} \\ E_{0y} \cdot e^{i\phi_{0y}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.$$

Weil man den Phasennullpunkt frei wählen kann, sind nicht die Phasenkonstanten selbst im Zusammenhang mit der Polarisation relevant, sondern von Bedeutung ist nur der

$$\text{Phasenunterschied } \Delta\phi := \phi_{0y} - \phi_{0x}$$

zwischen den Komponenten E_x und E_y von \vec{E} , welcher dann der y -Komponente zugeordnet wird. Die komplexwertige Wellenfunktion hat damit schließlich die Gestalt

$$\boxed{\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ E_{0y} \cdot e^{i(kz - \omega t + \Delta\phi)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \cdot e^{i\Delta\phi} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}}. \quad (4.1)$$

4.1 Linear polarisiertes Licht

Unabhängig vom Amplitudenverhältnis E_{0y}/E_{0x} entsteht linear polarisiertes Licht (\mathcal{P}) unter den Bedingungen, dass entweder die x - und die y -Komponente von \vec{E} die gleiche Phase besitzen oder dass der Phasenunterschied $\Delta\phi$ zwischen den Komponenten ein positives oder negatives ganzzahliges Vielfaches von π beträgt:

$$\Delta\phi = m \cdot \pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (E_{0x} = E_{0y}) \wedge (E_{0x} \neq E_{0y})$$

Damit und ausgehend von (4.1) wird linear polarisiertes Licht (\mathcal{P}) beschrieben durch die komplexwertige Wellenfunktion

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \cdot e^{i\Delta\phi} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{für} \quad \Delta\phi = m \cdot \pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad . \quad (4.2)$$

Für $m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ schwingen die x - und die y -Komponente von \vec{E} gleichsinnig beide gleichzeitig in die positive oder negative Richtung. Das bedeutet, dass die Schwingungsebene für gerade m und $m = 0$ graphisch gesehen durch den 1. und 3. Quadranten der (x, y) -Ebene geht.

Für $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ schwingt die y -Komponente entgegengesetzt zur x -Komponente von \vec{E} . Das bedeutet, dass die Schwingungsebene für ungerade m graphisch gesehen durch den 2. und 4. Quadranten der (x, y) -Ebene geht.

Das Verhältnis E_{0y}/E_{0x} legt die (konstante) Polarisationsrichtung fest gemäß

$$\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}},$$

wobei α der **Neigungswinkel** ist, der zwischen der positiven x -Achse und dem \vec{E} -Vektor und demzufolge im 1. oder 4. Quadranten der (x, y) -Ebene liegt, sodass $-90^\circ \leq \alpha \leq +90^\circ$ gilt.

Mit einem Polarisationsfilter kann man die Komponente \vec{E}_{pol} von \vec{E} herausfiltern. \vec{E}_{pol} ist dabei die Projektion von \vec{E} auf die Polarisationsrichtung des Filters und besitzt demzufolge die Polarisationsrichtung des Filters nach unseren Voraussetzungen in der (x, y) -Ebene. Ist ϑ der Winkel zwischen dem \vec{E} -Vektor und der Polarisationsrichtung, erhalten wir

$$|\vec{E}_{\text{pol}}| = \cos \vartheta \cdot |\vec{E}|.$$

Bei dieser „Filterung“ bzw. Polarisation wird die Phase nicht verändert, sodass \vec{E}_{pol} die gleiche Phase besitzt wie \vec{E} .

4.2 Zirkular polarisiertes Licht

Im speziellen Fall mit

$$\Delta\phi = \phi_{0y} - \phi_{0x} = \pm \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad E_{0x} = E_{0y} = E_0$$

resultiert die **zirkulare Polarisation**, beschrieben durch die komplexwertige Wellenfunktion

$$\vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_x(z, t) \\ E_y(z, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ E_0 \cdot e^{i\Delta\phi} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{für} \quad \Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi, \quad m \in \mathbb{Z} . \quad (4.3)$$

Wir unterscheiden rechtszirkular und linkszirkular polarisiertes Licht.

Rechtszirkular polarisiert (\mathcal{R}) bedeutet, dass der \vec{E} -Feldvektor bei *Blickrichtung zur Lichtquelle* mit konstanter Amplitude E_0 und mit der gleichen Frequenz, mit der er oszilliert, *im Uhrzeigersinn* um die Ausbreitungsachse rotiert. Analog dazu rotiert der \vec{E} -Feldvektor bei **linkszirkularer Polarisation** (\mathcal{L}) entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn um die Ausbreitungsachse.²

Eine andere Möglichkeit, die zirkulare Polarisation zu klassifizieren, bietet die Helizität. Die **positive Helizität** σ^+ entspricht einer rechtshändigen Schraubenlinie und die **negative Helizität** σ^- einer linkshändigen Schraubenlinie, wobei der entsprechende Daumen in die Richtung der Vorwärtsbewegung der Schraube zeigt.

Wir führen jetzt einige Beziehungen an, die wir im Folgenden benötigen werden:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin \alpha,$
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos \alpha .$
- $\Delta\phi = -\frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$
 $\cos\left(kz - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(kz - \omega t)$ eilt $\cos(kz - \omega t)$ **voraus** .
- $\Delta\phi = +\frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$
 $\cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(kz - \omega t)$ läuft $\cos(kz - \omega t)$ **nach** .
- $\Delta\phi = -\frac{\pi}{2}$ entspricht dem Faktor $-i = e^{i(-\frac{\pi}{2})}$: (4.4)
 $e^{i(kz - \omega t - \frac{\pi}{2})} = e^{i(-\frac{\pi}{2})} \cdot e^{i(kz - \omega t)} = -i \cdot [\cos(kz - \omega t) + i \sin(kz - \omega t)] ,$
 $e^{i(kz - \omega t - \frac{\pi}{2})} = \sin(kz - \omega t) - i \cos(kz - \omega t) .$

- $\Delta\phi = +\frac{\pi}{2}$ entspricht dem Faktor $+i = e^{i(+\frac{\pi}{2})}$: (4.5)
 $e^{i(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})} = e^{i(+\frac{\pi}{2})} \cdot e^{i(kz - \omega t)} = +i \cdot [\cos(kz - \omega t) - i \sin(kz - \omega t)] ,$
 $e^{i(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})} = \sin(kz - \omega t) + i \cos(kz - \omega t) .$

²Diese Konvention hinsichtlich rechts- und linkszirkularer Polarisation ist in der Optik üblich. In Anlehnung an die Helizität der Photonen gilt in der Quantenphysik die umgekehrte Konvention.

Physikalisch relevant ist letztlich nur der **Realteil** der komplexwertigen Wellenfunktion (4.1), nämlich

$$\operatorname{Re}\{\vec{\mathbf{E}}(z, t)\} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot \cos(kz - \omega t + \phi_{0x}) \\ E_{0y} \cdot \cos(kz - \omega t + \phi_{0y}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Im speziellen Fall des **zirkular polarisierten Lichts** ist das in unserer Notation

$$\operatorname{Re}\{\vec{\mathbf{E}}(z, t)\} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t + \Delta\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } \Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Weil in der Literatur der Phasenunterschied $\Delta\phi$ manchmal auch der x -Komponente von $\vec{\mathbf{E}}$ zugeordnet wird, zeigen wir der Vollständigkeit halber tabellarisch die **Phasen** der x - und y -Komponente von $\vec{\mathbf{E}}(z, t)$ für die sich dann ergebenden vier möglichen Fälle

$$\phi_{0y} = \Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi_{0x} = 0 \quad \text{und} \quad \phi_{0x} = \Delta\phi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi_{0y} = 0 :$$

Tabelle: Zirkulare Polarisation

rechtszirkulare Polarisation (\mathcal{R}) $\hat{=} \sigma^-$ negative Helizität	linkszirkulare Polarisation (\mathcal{L}) $\hat{=} \sigma^+$ positive Helizität
E_y eilt E_x um $\frac{\pi}{2}$ voraus .	E_y läuft E_x um $\frac{\pi}{2}$ hinterher .
$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = E_0 \begin{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \\ e^{i(kz - \omega t - \frac{\pi}{2})} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(4.4)}{\Rightarrow}$ $\begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = E_0 \begin{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \\ e^{i(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(4.5)}{\Rightarrow}$ $\begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ -\sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$
oder	oder
$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = E_0 \begin{pmatrix} e^{i(kz - \omega t + \frac{\pi}{2})} \\ e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(4.5)}{\Rightarrow}$ $\begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = E_0 \begin{pmatrix} e^{i(kz - \omega t - \frac{\pi}{2})} \\ e^{i(kz - \omega t)} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(4.4)}{\Rightarrow}$ $\begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t - \frac{\pi}{2}) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

Achtung!

Während der variable Phasenanteil

$$kz - \omega t \quad \text{bzw.} \quad \omega t - kz = -(kz - \omega t)$$

äquivalent verwendet werden kann, beide Varianten beschreiben die Ausbreitung derselben Welle in die positive z -Richtung, ist dies für die Phasen $kz - \omega t + \phi_0$ und $\omega t - kz + \phi_0$ mit dem konstanten Phasenanteil $\phi_0 \neq 0$ nicht der Fall. Wenn wir nämlich statt $kz - \omega t$ als variablen Anteil $\omega t - kz$ benutzen, würden wegen

$$kz - \omega t + \phi_0 \quad \text{und} \quad \omega t - kz + \phi_0 = -(kz - \omega t - \phi_0)$$

die x - und die y -Komponente in den Vektoren der Tabelle „Zirkulare Polarisation“ vertauschen und damit auch die Formeln für rechts- und linkszirkulare Polarisation.

4.3 Elliptisch polarisiertes Licht

Die **elliptische Polarisation** (\mathcal{E}) ist im Grunde genommen der allgemeine Fall der Polarisation. Man kann nämlich die lineare und die zirkulare Polarisation als Spezialfälle der elliptischen Polarisation auffassen, denn mit $m \in \mathbb{Z}$ gilt für die

- lineare Polarisation:

$$\Delta\phi = m \cdot \pi \quad \text{im Fall} \quad (E_{0x} = E_{0y}) \quad \text{und} \quad (E_{0x} \neq E_{0y}),$$

- zirkulare Polarisation:

$$\Delta\phi = m \cdot \pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{im Fall} \quad E_{0x} = E_{0y},$$

- elliptische Polarisation, Ellipsen-Hauptachse entlang der x - oder y -Achse orientiert:

$$\Delta\phi = m \cdot \pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{im Fall} \quad E_{0x} \neq E_{0y}, \quad (4.6)$$

- elliptische Polarisation, Ellipsen-Hauptachse um den Winkel α gegen die positive x -Achse geneigt:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\phi \neq m \cdot \pi \\ \text{und} \\ \Delta\phi \neq m \cdot \pi \pm \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \quad \text{im Fall} \quad (E_{0x} \neq E_{0y}) \quad \text{und} \quad (E_{0x} = E_{0y}). \quad (4.7)$$

(4.6) und (4.7) sind also die Bedingungen für das Auftreten der elliptischen Polarisation. In einer ortsfesten (x, y) -Ebene ($z = \text{const}$) rotiert der \vec{E} -Vektor bei elliptischer Polarisation senkrecht zu \vec{k} um die z -Achse und verändert dabei seinen Betrag. Der **Neigungswinkel** α von der positiven x -Achse zur Hauptachse³ der Polarisationsellipse (siehe Abbildung 4.1) ergibt sich aus

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot E_{0x} E_{0y} \cdot \cos \Delta\phi}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} = \frac{2 \frac{E_{0y}}{E_{0x}}}{1 - \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)^2} \cos \Delta\phi. \quad (4.8)$$

³Zur Erinnerung: Die **Hauptachse** entspricht dem größten Durchmesser und die **Nebenachse** dem kleinsten Durchmesser einer Ellipse. Die Länge der **großen Halbachse** ist gleich dem größten Radius und die Länge der **kleinen Halbachse** ist gleich dem kleinsten Radius einer Ellipse.

Und den **Elliptizitätswinkel** ε der Polarisationsellipse erhält man aus

$$\sin 2\varepsilon = \frac{2 \cdot E_{0x} E_{0y} \cdot \sin \Delta\phi}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = \frac{2 \frac{E_{0y}}{E_{0x}}}{1 + \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)^2} \sin \Delta\phi. \quad (4.9)$$

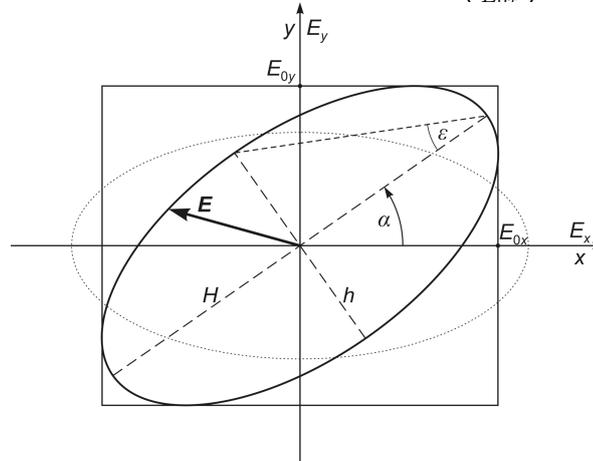


Abb. 4.1 Polarisationsellipse mit der großen Halbachse H und der kleinen Halbachse h . Mit dieser Notation gilt die Beziehung $H^2 + h^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2$. Abbildung nach Eugene Hecht, *Optik*, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, Wien, München, 2005, Seite 531.

Ausgehend von

$$(4.1) \quad \vec{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_x(z, t) \\ E_y(z, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot e^{i(kz - \omega t)} \\ E_{0y} \cdot e^{i(kz - \omega t + \Delta\phi)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \cdot e^{i\Delta\phi} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}$$

mit $\phi_{0x} = 0 \Rightarrow \Delta\phi = \phi_{0y} - \phi_{0x} = \phi_{0y}$ werden wir jetzt den **Realteil**

$$\text{Re}\{\vec{E}(z, t)\} = \begin{pmatrix} \text{Re}E_x \\ \text{Re}E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot \cos(kz - \omega t) \\ E_{0y} \cdot \cos(kz - \omega t + \Delta\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

von (4.1) unter der Bedingung (4.7) diskutieren, d. h. für eine Polarisationsellipse mit gegen die x -Achse geneigter Hauptachse. Das Ziel dabei ist, eine Gleichung für die Kurve zu ermitteln, welche die „Spitze“ des \vec{E} -Vektors in einer ortsfesten (x, y) -Ebene (Schwingungsebene mit $z = \text{const}$) beim Durchlauf der Welle beschreibt. Die gesuchte Kurvengleichung sollte am Ende weder von z noch von der Zeit abhängen. Formen wir also

$$\text{Re}E_x = E_{0x} \cdot \cos(kz - \omega t) \quad \text{und} \quad \text{Re}E_y = E_{0y} \cdot \cos(kz - \omega t + \Delta\phi)$$

u. a. mit Hilfe des Additionstheorems $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$ um:

$$\frac{\text{Re}E_x}{E_{0x}} \cos \Delta\phi = \cos(kz - \omega t) \cdot \cos \Delta\phi,$$

$$\sin^2(kz - \omega t) = 1 - \cos^2(kz - \omega t) = 1 - \left(\frac{\text{Re}E_x}{E_{0x}}\right)^2, \quad (4.10)$$

$$\frac{\text{Re}E_y}{E_{0y}} = \cos(kz - \omega t) \cdot \cos \Delta\phi - \sin(kz - \omega t) \cdot \sin \Delta\phi.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re}E_y}{E_{0y}} - \frac{\operatorname{Re}E_x}{E_{0x}} \cos \Delta\phi &= -\sin(kz - \omega t) \cdot \sin \Delta\phi \quad \stackrel{(4.10)}{\implies} \\ \left(\frac{\operatorname{Re}E_y}{E_{0y}} - \frac{\operatorname{Re}E_x}{E_{0x}} \cos \Delta\phi \right)^2 &= \left[1 - \left(\frac{\operatorname{Re}E_x}{E_{0x}} \right)^2 \right] \cdot \sin^2 \Delta\phi, \\ \left(\frac{\operatorname{Re}E_y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\operatorname{Re}E_x}{E_{0x}} \right) \left(\frac{\operatorname{Re}E_y}{E_{0y}} \right) \cos \Delta\phi + \left(\frac{\operatorname{Re}E_x}{E_{0x}} \right)^2 \cos^2 \Delta\phi \\ &= \sin^2 \Delta\phi - \left(\frac{\operatorname{Re}E_x}{E_{0x}} \right)^2 \sin^2 \Delta\phi. \end{aligned}$$

Umordnen ergibt schließlich die **Ellipsengleichung**

$$\boxed{\left(\frac{\operatorname{Re}E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Re}E_y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\operatorname{Re}E_x}{E_{0x}} \right) \left(\frac{\operatorname{Re}E_y}{E_{0y}} \right) \cos \Delta\phi = \sin^2 \Delta\phi}$$

für eine **schräge Ursprungsellipse**, d. h. für eine Ellipse, deren Mittelpunkt zwar mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, deren Haupt- und Nebenachse aber nicht parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Wir sprechen in diesem Fall von einer Ellipse in **nicht achsenparalleler Ursprungslage**.

Achtung!

Weiterführendes zu Ellipsen im Allgemeinen und eine Darstellung der Hauptachsentransformation finden sich im Anhangsabschnitt 8.1 Und die Berechnung von E_{0x} und E_{0y} zeigen wir im Anhangsabschnitt 8.2.

4.4 Jones-Formalismus

Mit Hilfe des Jones-Formalismus⁴, also mit Jones-Vektoren und Jones-Matrizen lässt sich die Gesamtwirkung von nacheinander angeordneten polarisierenden optischen Bauelementen bequemer berechnen.

Zunächst zeigen wir, wie Jones-Vektoren konstruiert werden. Man geht vom elektrischen (optischen) Anteil bzw. dem \vec{E} -Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle in der komplexen Darstellung aus und legt den \vec{E} -Vektor in die x, y -Ebene, sodass der Wellenvektor \vec{k} und damit die Ausbreitung der Welle in die positive Richtung der z -Achse zeigt:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \begin{pmatrix} E_x(z, t) \\ E_y(z, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot e^{i(kz - \omega t + \phi_{0x})} \\ E_{0y} \cdot e^{i(kz - \omega t + \phi_{0y})} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot e^{i\phi_{0x}} \\ E_{0y} \cdot e^{i\phi_{0y}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}.\end{aligned}$$

Unterdrückt man jetzt die z -Komponente und den variablen Phasenanteil, so erhält man einen zweidimensionalen Vektor \vec{E} , der nur noch die Information über die Amplituden $E_{0x} = \text{const}$ und $E_{0y} = \text{const}$ sowie über die Phasenkonstanten ϕ_{0x} und ϕ_{0y} enthält:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot e^{i\phi_{0x}} \\ E_{0y} \cdot e^{i\phi_{0y}} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

„Da der Phasennullpunkt beliebig gewählt werden kann (es kommt nur auf die Differenz $\Delta\phi = \phi_{0y} - \phi_{0x}$ an), können wir $\phi_{0x} = 0$ wählen.“⁵ Demzufolge erhalten wir aus (4.11)

$$\boxed{\phi_{0x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi := \phi_{0y} - \phi_{0x} = \phi_{0y}} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \cdot e^{i\Delta\phi} \end{pmatrix}.$$

Normiert man schließlich \vec{E} auf (die Länge bzw. das Betragsquadrat) 1, resultiert der

$$\boxed{\text{Jones-Vektor } \vec{J} = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} = \frac{1}{|\vec{E}|} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \cdot e^{i\Delta\phi} \end{pmatrix}}$$

mit

$$\begin{aligned}|\vec{E}| &= \sqrt{E_{0x} e^{i\phi_{0x}} \cdot E_{0x} e^{-i\phi_{0x}} + E_{0y} e^{i\phi_{0y}} \cdot E_{0y} e^{-i\phi_{0y}}} \\ &= \sqrt{E_{0x} \cdot E_{0x} + E_{0y} e^{i\Delta\phi} \cdot E_{0y} e^{-i\Delta\phi}} = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}.\end{aligned}$$

⁴Siehe auch bei Wikipedia unter dem Suchbegriff *Jones-Formalismus*.

⁵Zitiert aus Wolfgang Demtröder, Springer-Lehrbuch, *Experimentalphysik 2 – Elektrizität und Optik*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Abschnitt 9.6.7 *Jones-Vektoren*, Seite 286.

Die Jones-Vektoren für die Polarisationszustände \mathcal{E} (allgemeiner Fall), \mathcal{P} , \mathcal{R} und \mathcal{L} sind u. a. unter Berücksichtigung der Tabelle „Zirkulare Polarisation“ :

- \mathcal{P} -Zustand (lineare Polarisation)

Mit dem Neigungswinkel α zwischen der positiven x -Achse und der nächstgelegenen Schwingungshalbebene gilt für den Amplitudenvektor

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \\ E_0 \sin \alpha \end{pmatrix} .$$

Und mit $\Delta\phi = 0$ sowie

$$|\tilde{\mathbf{E}}| = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = \sqrt{E_0^2 \cos^2 \alpha + E_0^2 \sin^2 \alpha} = E_0$$

ist der zugehörige Jones-Vektor

$$\vec{J}_{\mathcal{P}} = \frac{1}{E_0} \begin{pmatrix} E_0 \cdot \cos \alpha \\ E_0 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} .$$

Für

$$\alpha = \pm 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos(\pm 45^\circ) = 1/\sqrt{2}, \quad \sin(\pm 45^\circ) = \pm 1/\sqrt{2}$$

resultiert dann der Jones-Vektor

$$\vec{J}_{\pm 45^\circ} = \frac{1}{E_0} \begin{pmatrix} E_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ E_0 \cdot \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} .$$

Die zwei Sonderfälle der linearen Polarisation sind der horizontale \mathcal{P} -Zustand bzw. die horizontale Polarisation (in x -Richtung) mit dem Index H und der vertikale \mathcal{P} -Zustand bzw. die vertikale Polarisation (in y -Richtung) mit dem Index V.

Mit $E_{0x} = E_0 \wedge E_{0y} = 0$ bzw. $E_{0y} = E_0 \wedge E_{0x} = 0$ resultieren also die Jones-Vektoren

$$\vec{J}_{\text{H}} = \frac{1}{E_0} \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{J}_{\text{V}} = \frac{1}{E_0} \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Wir können $\{\vec{J}_{\text{H}}, \vec{J}_{\text{V}}\}$ als **Orthonormalbasis** betrachten, denn

$$\vec{J}_{\text{H}} \cdot \vec{J}_{\text{H}} = \vec{J}_{\text{V}} \cdot \vec{J}_{\text{V}} = 1 \quad \text{und} \quad \vec{J}_{\text{H}} \cdot \vec{J}_{\text{V}} = 0 .$$

Darauf werden wir später noch zurückkommen.

- \mathcal{R} -Zustand (rechtszirkulare Polarisation)

Für den Fall der rechtszirkularen Polarisation erhalten wir unter Berücksichtigung der Tabelle „Zirkulare Polarisation“ und mit (4.4) bzw. mit $\Delta\phi = -\frac{\pi}{2}$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} E_0 \\ E_0 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ -i E_0 \end{pmatrix}$$

und mit

$$|\tilde{\mathbf{E}}| = \sqrt{E_0^2 + E_0^2} = \sqrt{2} \cdot E_0$$

den Jones-Vektor

$$\boxed{\vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{2} E_0} \begin{pmatrix} E_0 \\ -i E_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}.$$

- \mathcal{L} -Zustand (linkszirkulare Polarisation)

Für den Fall der linkszirkularen Polarisation erhalten wir unter Berücksichtigung der Tabelle „Zirkulare Polarisation“ und mit (4.5) bzw. mit $\Delta\phi = +\frac{\pi}{2}$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} E_0 \\ E_0 \cdot e^{+i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ i E_0 \end{pmatrix}$$

und mit

$$|\tilde{\mathbf{E}}| = \sqrt{E_0^2 + E_0^2} = \sqrt{2} \cdot E_0$$

den Jones-Vektor

$$\boxed{\vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\sqrt{2} E_0} \begin{pmatrix} E_0 \\ i E_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}.$$

- \mathcal{E} -Zustand (elliptische Polarisation, allgemeiner Fall)

Für den Fall der elliptischen Polarisation erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$\phi_{0x} = 0 \Rightarrow \Delta\phi = \phi_{0y} - \phi_{0x} = \phi_{0y}, \quad \Delta\phi \neq m \cdot \pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

zunächst den Jones-Vektor in der Form

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{E}}|} \tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\tilde{E}} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \cdot e^{i\Delta\phi} \end{pmatrix}.$$

Für die komplexe Zahl $\tilde{E}_y = E_{0y} \cdot e^{i\Delta\phi}$ gilt gemäß der Euler'schen Formel:

$$\begin{aligned} E_{0y} \cdot e^{i\Delta\phi} &= E_{0y} \cdot (\cos \Delta\phi + i \sin \Delta\phi) = \underbrace{E_{0y} \cos \Delta\phi}_{\operatorname{Re}\{\tilde{E}_y\}} + i \cdot \underbrace{E_{0y} \sin \Delta\phi}_{\operatorname{Im}\{\tilde{E}_y\}} \\ &= \operatorname{Re}\{\tilde{E}_y\} + i \cdot \operatorname{Im}\{\tilde{E}_y\} = \operatorname{Re}\tilde{E}_y + i \operatorname{Im}\tilde{E}_y. \end{aligned}$$

Der Jones-Vektor für die elliptische Polarisation ist damit schließlich auch

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ \operatorname{Re} \tilde{E}_y + i \operatorname{Im} \tilde{E}_y \end{pmatrix} .$$

Für $E_{0x} = E_{0y}$ und $\Delta\phi = m \cdot \pi \pm \frac{\pi}{2}$ resultiert daraus ein Jones-Vektor für die zirkulare Polarisation.

Für $E_{0x} \neq E_{0y}$ und $\Delta\phi = m \cdot \pi \pm \frac{\pi}{2}$ resultiert daraus ein Jones-Vektor für die elliptische Polarisation mit längs der x - oder längs der y -Achse orientierter Hauptachse der Polarisationsellipse.

Bei Jones-Vektoren zur Beschreibung der zirkularen Polarisation sind die Komponenten betragsgleich und ist eine der Komponenten rein imaginär.

Bei Jones-Vektoren zur Beschreibung der elliptischen Polarisation mit längs der x - oder längs der y -Achse orientierter Hauptachse sind die Komponenten nicht betragsgleich und ist eine der Komponenten rein imaginär.

Bei Jones-Vektoren zur Beschreibung der elliptischen Polarisation **mit geneigter Hauptachse** sind die Komponenten allgemein nicht betragsgleich, können aber betragsgleich sein. Immer aber ist in diesem Fall eine der Komponenten komplex mit nicht verschwindendem Realteil und nicht verschwindendem Imaginärteil.

Die Überlagerung von polarisiertem Licht lässt sich durch Addition der entsprechenden Jones-Vektoren beschreiben, wie beispielsweise:

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{H}} ,$$

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{45^\circ} ,$$

$$\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{H}} .$$

Wie man sieht, ist die Summe von Jones-Vektoren nicht normiert. Dass bei der Überlagerung von $\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{R}}$ und $\vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{L}}$ der Jones-Vektor $\sqrt{2} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\mathbf{H}}$ (für die horizontale Polarisation) resultiert, liegt an der Art und Weise, wie in (4.1) die Wellenfunktion $\vec{\mathbf{E}}(z, t)$ zur Beschreibung der Polarisation definiert ist. Dort wird nämlich die Phasendifferenz $\Delta\phi$ der y -Komponente zugeordnet gemäß $\phi_{0x} \stackrel{!}{=} 0$.

Man unterscheidet im Wesentlichen drei Arten von polarisierenden optischen Bauelementen:

- **Polarisationsfilter oder Linearpolarisatoren :**

Selektion einer Schwingungsrichtung.

Durch die Unterdrückung aller anderen Schwingungsrichtungen ist die Intensität des ausfallenden Lichts gegenüber dem einfallenden Licht reduziert. Es resultiert also linear polarisiertes Licht, das in der Polarisationssebene bzw. in Richtung der Durchlass- oder Transmissionsachse des Linearpolarisators schwingt. Transmissionsachse und positive x -Achse bilden den Winkel ϑ .

- **Polarisationsdreher :**

Die Schwingungsrichtung bzw. Polarisationssebene linear polarisierten Lichts wird um den Winkel β gedreht bei unveränderter Lichtintensität.

- **Phasenverzögerer :**

Das Licht wird in *einer* Schwingungsrichtung gegenüber der dazu orthogonalen Schwingungsrichtung verzögert. Die Komponente des einfallenden Lichts, die verzögert wird, benötigt mehr Zeit, um das optische Bauelement zu durchlaufen. Phasenverzögerer besitzen also eine durch die Verzögerung langsame Transmissionsachse und folglich orthogonal dazu eine schnelle Achse, wodurch im ausfallenden Licht eine Phasenverschiebung oder **Phasendifferenz** zwischen der Komponente der langsamen Achse und der Komponente der schnellen Achse resultiert.

Polarisierende optische Bauelemente entsprechen **Operatoren** in Gestalt von 2×2 -Matrizen, den **Jones-Matrizen** M . Einfallendes polarisiertes Licht kann durch Jones-Vektoren dargestellt werden, auf die dann die Jones-Matrizen wirken. Jones-Matrizen sind allgemein nicht kommutativ. Werden also mehrere optische Bauelemente nacheinander eingesetzt, müssen die zugehörigen Jones-Matrizen in der gleichen Reihenfolge auf den Jones-Vektor wirken wie die Bauelemente auf das einfallende Licht.

Herleitung einiger Jones-Matrizen

- Ein **Linearpolarisator** habe eine **Transmissionsachse** mit dem Winkel ϑ zur positiven x -Achse. Auf diesen Polarisator mit der Jones-Matrix $M_\vartheta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ treffe

a) linear polarisiertes Licht mit dem Neigungswinkel $\alpha = \vartheta$, das den Polarisator ungehindert passiert, und

b) linear polarisiertes Licht mit dem Neigungswinkel $\alpha + 90^\circ = \vartheta + 90^\circ$, das vollständig blockiert wird.

Mit den entsprechenden Jones-Vektoren

$$\vec{J}_\alpha \stackrel{\alpha=\vartheta}{=} \vec{J}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} = \vec{J}_\parallel$$

und

$$\vec{J}_{(\alpha+90^\circ)} \stackrel{\alpha=\vartheta}{=} \begin{pmatrix} \cos(\vartheta + 90^\circ) \\ \sin(\vartheta + 90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \vec{J}_\perp$$

erhalten wir zwei Matrixgleichungen, die uns dann zwei Gleichungssysteme aus jeweils zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zur Bestimmung der Matrixelemente liefern:

$$\begin{aligned} M_\vartheta \vec{J}_\vartheta &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} = M_\vartheta \vec{J}_\parallel = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}, \\ M_\vartheta \vec{J}_{(\vartheta+90^\circ)} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = M_\vartheta \vec{J}_\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

Bestimmung von a und b :

$$(I) : \quad a \cos \vartheta + b \sin \vartheta = \cos \vartheta,$$

$$(II) : \quad a(-\sin \vartheta) + b \cos \vartheta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$b \cdot \cos \vartheta = a \cdot \sin \vartheta \Leftrightarrow b = a \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}, \quad a \cdot \cos \vartheta + a \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cdot \sin \vartheta = \cos \vartheta \quad \Rightarrow$$

$$a = \cos^2 \vartheta,$$

$$b = \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

Bestimmung von c und d :

$$(III) : \quad c \cos \vartheta + d \sin \vartheta = \sin \vartheta,$$

$$(IV) : \quad c(-\sin \vartheta) + d \cos \vartheta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$d \cdot \cos \vartheta = c \cdot \sin \vartheta \Leftrightarrow d = c \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}, \quad c \cdot \cos \vartheta + c \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cdot \sin \vartheta = \sin \vartheta \quad \Rightarrow$$

$$c = \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$d = \sin^2 \vartheta.$$

Die Jones-Matrix für den Linearpolarisator mit einer Transmissionsachse im Winkel ϑ zur positiven x -Achse ist also

$$M_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Mit $\sin(\pm 45^\circ) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos(\pm 45^\circ) = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ erhalten wir damit sofort die entsprechenden Jones-Matrizen für Linearpolarisatoren mit den Transmissionsachsen im Winkel von $\vartheta = +45^\circ$ und $\vartheta = -45^\circ$:

$$M_{\pm 45^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

M_H sei die Jones-Matrix zu einem Linearpolarisator mit horizontaler Transmissionsachse, der also horizontal polarisiertes Licht erzeugt. Wenn die x -Achse horizontal verläuft, gilt $\vartheta = 0^\circ$ bzw. $\vartheta = \pm 180^\circ$ und damit

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

M_V sei die Jones-Matrix zu einem Linearpolarisator mit vertikaler Transmissionsachse, der also vertikal polarisiertes Licht erzeugt. Wenn die y -Achse vertikal verläuft, gilt $\vartheta = \pm 90^\circ$ bzw. $\vartheta = \pm 270^\circ$ und damit

$$M_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Polarisationsdreher** um den Winkel β :

Die Jones-Matrix M_β soll den Jones-Vektor $\vec{J}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$ durch Drehung der Polarisations Ebene um den Winkel β in den Jones-Vektor $\vec{J}_{\vartheta+\beta}$ überführen gemäß $\vec{J}_\vartheta \xrightarrow{M_\beta} \vec{J}_{\vartheta+\beta}$:

$$M_\beta \vec{J}_\vartheta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta + \beta) \\ \sin(\vartheta + \beta) \end{pmatrix} = \vec{J}_{\vartheta+\beta} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{a} \cos \vartheta + \underline{b} \sin \vartheta = \cos(\vartheta + \beta), \quad \underline{c} \cos \vartheta + \underline{d} \sin \vartheta = \sin(\vartheta + \beta),$$

(Anwendung der Additionstheoreme)

$$\underline{\cos \beta} \cos \vartheta - \underline{\sin \beta} \sin \vartheta = \cos(\vartheta + \beta), \quad \underline{\sin \beta} \cos \vartheta + \underline{\cos \beta} \sin \vartheta = \sin(\vartheta + \beta).$$

Der Koeffizientenvergleich liefert schließlich

$$a = \cos \beta, \quad b = -\sin \beta, \quad c = \sin \beta, \quad d = \cos \beta,$$

$$\boxed{M_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}}. \quad (4.12)$$

- **Phasenverzögerer** um den Phasenwinkel bzw. die Phasendifferenz $\Delta\Phi$:

Für das einfallende Licht schreiben wir gemäß (4.11)

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot e^{i\phi_{0x}} \\ E_{0y} \cdot e^{i\phi_{0y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix}.$$

mit den Phasenkonstanten ϕ_{0x} und ϕ_{0y} . Dabei wurde der variable Phasenanteil $e^{i(kz - \omega t)}$ unterdrückt. Ein Phasenverzögerer verändert die Phasen des einfallenden Lichts wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot e^{i(\phi_{0x} + \Phi_x)} \\ E_{0y} \cdot e^{i(\phi_{0y} + \Phi_y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \cdot e^{i\Phi_x} \\ \tilde{E}_y \cdot e^{i\Phi_y} \end{pmatrix}.$$

Es resultiert dabei zwischen den Komponenten \tilde{E}_x und \tilde{E}_y die ggf. zusätzliche

$$\text{Phasendifferenz } \Delta\Phi = \Phi_y - \Phi_x ,$$

d. h. eine der beiden Komponenten ist nach der Passage des Phasenverzögerers gegenüber der anderen Komponente verzögert. Die Matrixgleichung dafür lautet

$$M_{\Delta\Phi} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} e^{i\Phi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \cdot e^{i\Phi_x} \\ \tilde{E}_y \cdot e^{i\Phi_y} \end{pmatrix}$$

mit der allgemeinen Jones-Matrix für Phasenverzögerer

$$\boxed{M_{\Delta\Phi}^{(\dots)} = \begin{pmatrix} e^{i\Phi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi_y} \end{pmatrix}} . \quad (4.13)$$

Der phasenverzögerten Komponente entspricht die langsame Achse des Phasenverzögerers. Orthogonal dazu besitzt der Phasenverzögerer demzufolge seine schnelle Achse. Die schnelle Achse der Phasenverzögerer wird in den zugehörigen Jones-Matrizen als hochgestellter Index angegeben. Ausgehend von der Tabelle „Zirkulare Polarisation“ im Abschnitt 4 gilt folglich

$$\Phi_y - \Phi_x = \Delta\Phi > 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_y > \Phi_x \quad \Rightarrow \quad M_{\Delta\Phi}^{(x)} , \quad x\text{-Achse ist schnelle Achse} ,$$

$$\Phi_y - \Phi_x = \Delta\Phi < 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_y < \Phi_x \quad \Rightarrow \quad M_{\Delta\Phi}^{(y)} , \quad y\text{-Achse ist schnelle Achse} ,$$

wobei die x -Achse horizontal und die y -Achse vertikal verlaufen soll.

Wichtige Phasenverzögerer sind die **Viertelwellenverzögerungsplatte**, kurz

$$\frac{\lambda}{4}\text{-Platte, entsprechend } \Delta\Phi = \pm\frac{\pi}{2} ,$$

die **Halbwellenverzögerungsplatte**, kurz

$$\frac{\lambda}{2}\text{-Platte, entsprechend } \Delta\Phi = \pm\pi ,$$

und evl. auch die **Achtelwellenverzögerungsplatte**, kurz

$$\frac{\lambda}{8}\text{-Platte, entsprechend } \Delta\Phi = \pm\frac{\pi}{4} .$$

Ausgehend von (4.13) können wir die zugehörigen Jones-Matrizen beispielsweise wie folgt bestimmen:

$\lambda/4$ -Platte:

Für $\Phi_y = \frac{\pi}{2}$, $\Phi_x = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} > 0$ gilt

$$M_{\lambda/4}^{(x)} = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} .$$

Für $\Phi_y = 0$, $\Phi_x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} < 0$ gilt

$$M_{\lambda/4}^{(y)} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Für $\Phi_y = 0$, $\Phi_x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} > 0$ gilt

$$M_{\lambda/4}^{(x)} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\Phi_y = -\frac{\pi}{2}$, $\Phi_x = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} < 0$ gilt

$$M_{\lambda/4}^{(y)} = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Für $\Phi_y = \frac{\pi}{4}$, $\Phi_x = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} > 0$ gilt

$$M_{\lambda/4}^{(x)} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

Für $\Phi_y = -\frac{\pi}{4}$, $\Phi_x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} < 0$ gilt

$$M_{\lambda/4}^{(y)} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Dabei haben wir die folgende Beziehung verwendet:

$$e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = \cos(\pm 45^\circ) + i \sin(\pm 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \pm i).$$

$\lambda/2$ -Platte:

Für $\Phi_y = \pi$, $\Phi_x = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \pi > 0$ gilt

$$M_{\lambda/2}^{(x)} = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für $\Phi_y = 0$, $\Phi_x = \pi \Rightarrow \Delta\varphi = -\pi < 0$ gilt

$$M_{\lambda/2}^{(y)} = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -M_{\lambda/2}^{(x)}.$$

Für $\Phi_y = \frac{\pi}{2}$, $\Phi_x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = \pi > 0$ gilt

$$M_{\lambda/2}^{(x)} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Für $\Phi_y = -\frac{\pi}{2}$, $\Phi_x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = -\pi < 0$ gilt

$$M_{\lambda/2}^{(y)} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -M_{\lambda/2}^{(x)}.$$

Die Voreilung $\Delta\varphi = +\pi$ und die Nacheilung $\Delta\varphi = -\pi$ sind physikalisch äquivalent.

$\lambda/8$ -Platte:

Für $\Phi_y = \frac{\pi}{4}$, $\Phi_x = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{4} > 0$ gilt

$$M_{\lambda/8}^{(x)} = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}.$$

Für $\Phi_y = 0$, $\Phi_x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\pi}{4} < 0$ gilt

$$M_{\lambda/8}^{(y)} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anwendungsbeispiele

- Das einfallende Licht sei linear polarisiert mit $\alpha = +45^\circ$ gemäß dem Jones-Vektor \vec{J}_{45° und laufe durch einen Linearpolarisator mit horizontaler Transmissionsachse entsprechend der Jones-Matrix M_H :

$$M_H \vec{J}_{45^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{J}_H.$$

Das austretende Licht ist die horizontale Komponente des einfallenden Lichts und demzufolge horizontal polarisiert.

- Das einfallende Licht sei horizontal polarisiert gemäß dem Jones-Vektor \vec{J}_H und laufe durch eine $\frac{\lambda}{4}$ -Platte mit schneller y -Achse entsprechend der Jones-Matrix $M_{\lambda/4}^{(y)}$:

$$M_{\lambda/4}^{(y)} \vec{J}_H = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{2}} \vec{J}_H.$$

Der Vergleich von einfallendem und austretendem Licht zeigt:

$$\vec{J}_H \hat{=} \vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 e^{i(kx-\omega t)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} \vec{J}_H \hat{=} \vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 e^{i(kx-\omega t+\frac{\pi}{2})} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das austretende Licht ist also ebenfalls horizontal polarisiert und besitzt die gleiche Amplitude wie das einfallende Licht. Allerdings läuft die Phase des austretenden Lichts der Phase des einfallenden Lichts infolge der Verzögerung der x -Komponente durch die $\frac{\lambda}{4}$ -Platte um $\frac{\pi}{2}$ hinterher (siehe Tabelle „Zirkulare Polarisation“).

- Das einfallende Licht sei rechtszirkular polarisiert gemäß dem Jones-Vektor \vec{J}_R und laufe durch einen Linearpolarisator mit vertikaler Transmissionsachse entsprechend der Jones-Matrix M_V :

$$M_V \vec{J}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} \vec{J}_V.$$

Das austretende Licht ist die vertikale Komponente des einfallenden Lichts und demzufolge vertikal polarisiert. In Übereinstimmung mit der Tabelle „Zirkulare Polarisation“ zeigt der Faktor $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, dass die herausgefilterte vertikale Komponente der unterdrückten horizontalen Komponente um $\frac{\pi}{2}$ vorausseilt.

- Das einfallende Licht sei linear polarisiert mit dem Neigungswinkel $\alpha = 45^\circ$ und laufe durch eine $\frac{\lambda}{4}$ -Platte mit schneller x -Achse:

$$M_{\lambda/4}^{(x)} \vec{J}_{45^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \vec{J}_{\mathcal{L}}.$$

Das austretende Licht ist linkszirkular polarisiert.

Wollen wir zirkular polarisiertes Licht erzeugen, brauchen wir also nur mit einem entsprechenden Polarisationsfilter linear polarisiertes Licht mit einem Neigungswinkel von $\pm 45^\circ$ bzw. betragsgleichen Komponenten zu erzeugen und dieses anschließend durch eine $\frac{\lambda}{4}$ -Platte laufen zu lassen.

- Das einfallende Licht sei linkszirkular polarisiert und laufe durch eine $\frac{\lambda}{4}$ -Platte mit schneller x -Achse:

$$M_{\lambda/4}^{(x)} \vec{J}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \vec{J}_{-45^\circ}.$$

Das austretende Licht ist linear polarisiert mit dem Neigungswinkel $\alpha = -45^\circ$

- Das einfallende Licht sei linear polarisiert mit dem Neigungswinkel $\alpha = 45^\circ$ und laufe durch eine $\frac{\lambda}{8}$ -Platte mit schneller x -Achse:

$$M_{\lambda/8}^{(x)} \vec{J}_{45^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} = \vec{J}_{\mathcal{E}}.$$

Wegen $\Delta\phi = \frac{\pi}{4} \neq m\pi + \frac{\pi}{2}$ ist das austretende Licht *nicht* mit längs der x - oder längs der y -Achse ausgerichteter Hauptachse der Polarisationsellipse elliptisch polarisiert, *nicht* zirkular polarisiert und selbstverständlich *nicht* linear polarisiert. Und auch wenn die Komponenten von $\vec{J}_{\mathcal{E}}$ hier gemäß

$$|e^{i\frac{\pi}{4}}| = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{e^0} = 1$$

betragsgleich sind, so ist das austretende Licht in diesem Fall dennoch elliptisch polarisiert – jedoch mit dem Neigungswinkel α von der positiven x -Achse zur Hauptachse der Polarisationsellipse. Bestimmen wir also α unter Berücksichtigung von

$$\vec{J}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_{0x} = E_{0y} \Rightarrow \frac{E_{0y}}{E_{0x}} = 1$$

mit (4.8):

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \cdot \cos \Delta\phi}{1 - \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)^2} = \frac{2 \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \cdot \left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1 - \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{E_{0x} \rightarrow E_{0y}} (\tan 2\alpha) = +\infty \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = 90^\circ, \quad \alpha = 45^\circ.$$

Das austretende Licht ist also elliptisch polarisiert mit einem Neigungswinkel der Polarisationsellipse von $\alpha = 45^\circ$.

Es bestätigt sich in diesem Fall, dass bei elliptischer Polarisation mit geneigter Hauptachse der Polarisationsellipse eine der Komponenten von $\vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{E}}$ komplex ist mit nicht verschwindendem Realteil und nicht verschwindendem Imaginärteil, denn

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Das einfallende Licht sei linkszirkular polarisiert und laufe durch eine $\frac{\lambda}{8}$ -Platte mit schneller x -Achse:

$$M_{\lambda/8}^{(x)} \vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{E}}.$$

Im austretenden Licht ist also $\Delta\phi = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ \Rightarrow \cos \Delta\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ und die Komponenten des zugehörigen Jones-Vektors sind betragsgleich. Für den Neigungswinkel α der Polarisationsellipse erhalten wir damit:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \cdot \cos \Delta\phi}{1 - \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)^2} = \frac{2 \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1 - \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{E_{0x} \rightarrow E_{0y}} (\tan 2\alpha) = -\infty \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = -90^\circ, \quad \alpha = -45^\circ.$$

Das austretende Licht ist elliptisch polarisiert mit einem Neigungswinkel der Polarisationsellipse von $\alpha = -45^\circ$.

- Mit einem Polarisationsfilter erzeugen wir vertikal polarisiertes Licht mit dem Jones-Vektor $\vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{V}}$ und lassen dieses der Reihe nach zuerst gemäß (4.12) durch einen Polarisationsdreher mit einem Drehwinkel von $\beta = 45^\circ$, dann durch eine $\frac{\lambda}{4}$ -Platte mit schneller y -Achse und schließlich durch einen Linearpolarisator mit vertikaler Transmissionsachse laufen:

$$\underbrace{M_{\mathcal{V}} \cdot M_{\lambda/4}^{(y)} \cdot M_{(\beta=45^\circ)}}_{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{V}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\mathbf{J}}_{\mathcal{V}}.$$

Das austretende Licht ist vertikal polarisiert, besitzt also nur die y -Komponente des $\vec{\mathbf{E}}$ -Feldes. Allerdings ist diese Komponente durch die Polarisationsdrehung mittels $M_{(\beta=45^\circ)}$ um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ kleiner als im einfallenden Licht. Die vom Polarisationsdreher gebildete x -Komponente wird durch das Polarisationsfilter mit vertikaler Transmissionsachse am Ende unterdrückt, sodass die Intensität des austretenden Lichts gegenüber dem einfallenden Licht um den Faktor $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ kleiner ist.

4.5 Intensität des polarisierten Lichts im Vakuum

Siehe auch Kapitel 17 *Intensität elektromagnetischer Wellen* auf den Seiten 84 bis 86 in meinem Skript *Ausgewählte Themen und Herleitungen aus dem Grundstudium*.

Der **Poynting-Vektor**

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \varepsilon_0 c_0^2 \vec{E} \times \vec{B}$$

für das Vakuum beschreibt die (momentane) Energiestromdichte eines elektromagnetischen Feldes bzw. des Lichts. Die sich daraus ergebende

$$\text{Intensität } I = \langle |\vec{S}| \rangle = \varepsilon_0 c_0^2 \langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle = \varepsilon_0 c_0^2 \langle E \cdot \frac{1}{c_0} E \rangle = \varepsilon_0 c_0 \langle E^2 \rangle$$

ist dann das zeitliche Mittel des Betrags des Poynting-Vektors.

Die Intensität einer linear polarisierten ebenen elektromagnetischen Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \phi_0) \\ \cos(kz - \omega t + \phi_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cdot \cos(kz - \omega t + \phi_0) \\ E_{0y} \cdot \cos(kz - \omega t + \phi_0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

die sich im Vakuum in positiver z -Richtung ausbreitet, ist mit dem Mittelwert $\langle \cos^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2}$ und mit

$$E^2(t) = E_{0x}^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi_0) + E_{0y}^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi_0) = E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \phi_0) :$$

lineare Polarisation : $I = \varepsilon_0 c_0 \langle E^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 c_0}{2} E_0^2$

Die Intensität der zirkular polarisierten ebenen elektromagnetischen Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_0 \cdot \cos(kz - \omega t) \\ E_0 \cdot \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

die sich im Vakuum in positiver z -Richtung ausbreitet, ist mit $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ und mit

$$E^2(t) = E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) + E_0^2 \sin^2(kz - \omega t) = E_0^2 = E^2 = \text{const} :$$

zirkulare Polarisation : $I = \varepsilon_0 c_0 \langle E^2 \rangle = \varepsilon_0 c_0 E_0^2 = \varepsilon_0 c_0 E^2$

5 Paradoxien im Teilchenbild

Man spricht im Zusammenhang mit quantenphysikalischen Phänomenen gelegentlich von sog. Paradoxien, wenn sich diese Phänomene mit den klassischen Vorstellungen von Teilchen bzw. Körpern nicht erklären lassen.

So hat beispielsweise ein quantenphysikalisches Teilchen wie das Elektron (fast) nichts gemein mit einer Billardkugel, außer dass Elektronen ein Bestandteil der Billardkugel sind. Während man (makroskopischen) Körpern auf der makroskopischen Skala ein im Rahmen der Messgenauigkeit „exaktes“ Volumen und einen im Rahmen der Messgenauigkeit „exakten“ Aufenthaltsort zubilligen kann, besitzen quantenphysikalische Teilchen keine fest umrissene Gestalt bzw. keine exakten räumlichen Grenzen und demzufolge auch kein festes Volumen (siehe Heisenberg'sche Impuls-Ortsunschärfe und Energie-Zeitunschärfe). Allgemein kann man deshalb in der Realität keine Aussage über den jeweiligen exakten Aufenthaltsort eines quantenphysikalischen Teilchens treffen.

Man stößt also zwangsläufig auf Widersprüche bei dem Versuch, quantenphysikalische Phänomene im Teilchenbild auf klassische Weise zu erklären. Wir diskutieren diese Problematik am Beispiel zweier Phänomene.

Reflexionsstrahlteiler

Betrachten wir einen Reflexionsstrahlteiler (halbdurchlässigen Spiegel), der die Intensität des einfallenden Lichts bei der Reflexion/Transmission halbiert. Im Wellenbild ist die Beschreibung dieses Phänomens unproblematisch, nicht jedoch im Teilchenbild. Es stellt sich hier die Frage, was mit dem einzelnen Photon (Wellenpaket) der Energie $E = h \cdot \nu$ geschieht, wenn es auf den Strahlteiler trifft. Zu einer Teilung in ein reflektiertes und ein transmittiertes Photon mit jeweils der halben Energie $\frac{1}{2}E = h \cdot \frac{1}{2}\nu$ kommt es nicht, denn die Lichtfrequenz ν bleibt bei der Strahlteilung erhalten. Die Photonen sind unteilbar. Tatsächlich kann man messen, dass jedes einzelne Photon mit einer Wahrscheinlichkeit von in unserem Fall 50 % reflektiert oder transmittiert wird. Das Ergebnis (Reflexion oder Transmission) im Einzelfall ist dabei nicht vorhersehbar.

Das bedeutet folgendes: Im klassischen Sinne sollte es möglich sein, den Vorgang der Strahlteilung so zu beschreiben, dass er bei jeder Messung zumindest im Idealfall in der gleichen Weise abläuft. Das ist hier im Teilchenbild jedoch nicht möglich, was zu dem Schluss führt, dass das Ergebnis nicht unbeeinflusst von der Messung eintritt sondern durch die Messung herbeigeführt bzw. realisiert wird.

Interferenz am Doppelspalt

Die Intensitätsverteilung im Interferenzmuster beim Doppelspalt zeigt deutliche erste Minima neben dem Hauptmaximum, was sich mit dem Wellencharakter des Lichts problemlos erklären lässt. Allerdings gilt dies auch für quantenphysikalische Teilchen mit einer Ruhemasse. Wir betrachten deshalb im Folgenden die Interferenz von Elektronen am Doppelspalt. Es handelt sich hierbei um ein ortsabhängiges quantenphysikalisches Phänomen.

Im Teilchenbild würde man zunächst intuitiv stets die **Überlagerung der Elektronentrefferbilder** der beiden Einzelspalte auf einem Bildschirm erwarten, wobei es jedem einzelnen Elektron, wenn es einen Spalt passiert, „egal“ sein sollte, ob der andere

Spalt geöffnet ist oder nicht. Besitzt ein Elektron, das den Spalt 1 passiert hat, die Wellenfunktion $\psi_1(x)$ mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichte $w_1(x) = |\psi_1(x)|^2$ und ein Elektron, das den Spalt 2 passiert hat, die Wellenfunktion $\psi_2(x)$ mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichte $w_2(x) = |\psi_2(x)|^2$, dann entspräche die Überlagerung bzw. die Summe

$$|\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 = \tilde{w}(x) \quad (5.1)$$

der beiden Wahrscheinlichkeitsdichten $w_1(x)$ und $w_2(x)$ dem zu erwartenden Trefferbild. Dieses Bild besitzt allerdings keine ersten Minima und entsteht nur dann, wenn die Elektronen an einem oder an beiden Spalten detektiert werden. (5.1) beschreibt also nicht die Interferenz der Elektronen am Doppelspalt.

Sind beide Spalte geöffnet und werden die Elektronen beim Passieren der Spalte nicht beobachtet bzw. detektiert, geht jedes Elektron quasi gleichzeitig durch beide Spalte und bildet danach einen

$$\text{\textbf{Überlagerungszustand}} \quad \psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) \quad (5.2)$$

aus den beiden Wellenfunktionen $\psi_1(x)$ von Spalt 1 und $\psi_2(x)$ von Spalt 2.

Unbeobachtet lässt sich demzufolge den Elektronen bezüglich der Passage durch die Spalte kein bestimmter Ort zuordnen.

Das Doppelspalt-Interferenzmuster ergibt sich damit schließlich aus der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$w(x) = |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2 = |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + \underbrace{\psi_1(x)\psi_2^*(x) + \psi_1^*(x)\psi_2(x)}_{\text{Interferenzterm}}$$

des Überlagerungszustands (5.2).

Dem Elektron an dem einen Spalt ist es also nicht egal, ob der andere Spalt geöffnet oder geschlossen ist. Und es ist den Elektronen auch nicht egal, ob sie beobachtet bzw. detektiert werden oder nicht, denn die Detektion (Beobachtung, Messung) **reduziert** die Überlagerungswellenfunktion bzw. den Zustand $\psi(x)$ der Elektronen auf die Wellenfunktionen bzw. Zustände $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$, was den **Kollaps** des Überlagerungszustands (5.2) bedeutet und das Verschwinden des Interferenzterms und damit des Interferenzmusters zur Folge hat. Es resultiert nach dem Kollaps des Überlagerungszustands das Überlagerungsbild entsprechend $|\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2$ aus den Elektronentrefferbildern jedes der beiden Einzelspalte.

Dieser Sachverhalt führt zu einer grundlegenden Annahme in der Quantenphysik bzw. quantenphysikalischen Theorie:

Bereits einzelne quantenphysikalische Teilchen (Elementarteilchen, Photonen, Atome usw.) gehorchen dem Superpositionsprinzip und können sich demzufolge in einem Überlagerungszustand verschiedener quantenphysikalischer Zustände befinden.

6 Tabellen: Jones-Vektoren und Jones-Matrizen

Tabelle 6.1 Jones-Vektoren

Polarisation	Jones-Vektor	Bra-Ket-Notation
linear in x -Richtung (horizontal)	$\vec{J}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$ H\rangle$
linear in y -Richtung (vertikal)	$\vec{J}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$ V\rangle$
linear mit Neigungswinkel $\pm 45^\circ$	$\vec{J}_{\pm 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$	$ D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (H\rangle + V\rangle)$
linear mit Neigungswinkel α	$\vec{J}_P = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$	$\cos \alpha H\rangle + \sin \alpha V\rangle$
linkszirkular	$\vec{J}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	$ \sigma^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (H\rangle + i V\rangle)$
rechtszirkular	$\vec{J}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	$ \sigma^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (H\rangle - i V\rangle)$
elliptisch allgemein	$\vec{J}_E = \frac{1}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i\Delta\phi} \end{pmatrix}$	

Tabelle 6.2 Jones-Matrizen, Abkürzung TA für Transmissionsachse.

optisches Element	Jones-Matrix
Polarisationsfilter – TA horizontal	$M_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Polarisationsfilter – TA vertikal	$M_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Polarisationsfilter – TA im Winkel $\pm 45^\circ$	$M_{\pm 45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$
Polarisationsfilter – TA im Winkel ϑ	$M_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$
Polarisationsdreher um Winkel β	$M_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$
Phasenverzögerer um Phasendifferenz $\Delta\Phi$	$M_{\Delta\Phi} = \begin{pmatrix} e^{i\Phi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\Phi_y} \end{pmatrix}$
$\frac{\lambda}{2}$ -Platte mit schneller x -Achse	$M_{\lambda/2}^{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\frac{\lambda}{2}$ -Platte mit schneller y -Achse	$M_{\lambda/2}^{(y)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\frac{\lambda}{4}$ -Platte mit schneller x -Achse	$M_{\lambda/4}^{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
$\frac{\lambda}{4}$ -Platte mit schneller y -Achse	$M_{\lambda/4}^{(y)} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\frac{\lambda}{8}$ -Platte mit schneller x -Achse	$M_{\lambda/8}^{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$
$\frac{\lambda}{8}$ -Platte mit schneller y -Achse	$M_{\lambda/8}^{(y)} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7 Polarisation des Lichts in Bra-Ket-Notation

Die Bra-Ket-Notation geht auf Paul Dirac zurück und wird deshalb auch Dirac-Notation genannt. Sie dient insbesondere der bequemeren mathematischen Behandlung der Quantenphysik.

7.1 Der Umgang mit komplexen Vektoren und Matrizen in Bra-Ket-Notation

Als Einstieg in dieses Kapitel bzw. zur Erinnerung geben wir kurzgefasst die wichtigsten Regeln zum Umgang mit komplexen Vektoren und Matrizen in der Bra-Ket-Notation an und verweisen auf das diesbezüglich etwas ausführlichere Kapitel 2 *Rechnen mit komplexen Vektoren und Matrizen* im Skript *Grundlegendes zur Elektrodynamik und Quantenmechanik*.

- **Zustandsvektoren :**

$$\begin{array}{ll} \text{Ket-Vektor (Spaltenvektor)} & |v\rangle := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \\ \text{Bra-Vektor (Zeilenvektor)} & \langle v| := (v_1^* \ v_2^* \ \dots \ v_i^* \ \dots). \end{array}$$

- **Adjungiert** (hochgestellter Index \dagger)

heißt komplex konjugiert (hochgestellter Index $*$) und zusätzlich transponiert (hochgestellter Index T), also sinngemäß

$$\dagger = (*) T = (T) * .$$

Beispiele:

$$\text{Adjungieren der Matrix } A \quad : \quad A^\dagger = (A^*)^T = (A^T)^* ,$$

$$\text{Adjungieren des Spaltenvektors } \vec{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : \quad \vec{v}^\dagger = (\vec{v}^*)^T := (v_1^* , v_2^*) ,$$

$$\text{Adjungieren des Zustands-Ket-Vektors } |v\rangle : \quad |v\rangle^\dagger = (|v\rangle^*)^T = \langle v| .$$

- **Komplexes Standardskalarprodukt** (kurz Skalarprodukt) $\langle \alpha u | \beta v \rangle$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist hermitesch, im ersten Argument antilinear (konjugiert linear) und im zweiten Argument linear :

$$\langle \alpha u | \beta v \rangle = \alpha^* \langle u | \beta v \rangle = \alpha^* \beta \langle u | v \rangle .$$

Ausgeschrieben in Zeilen- und Spaltenvektor erhält dieses Skalarprodukt dann die Gestalt

$$(\alpha^* u_1^* \ \alpha^* u_2^* \ \dots) \cdot \begin{pmatrix} \beta v_1 \\ \beta v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha^* \beta (u_1^* v_1 + u_2^* v_2 + \dots) .$$

- **Vollständige Orthonormalbasis** (kurz VON-Basis) oder vollständiges Orthonormalsystem (kurz VONS) wie beispielsweise $\{|a_i\rangle\}$:

Die Basis-Bra-Vektoren $\langle a_i| := (0 \cdots 0 a_i^* 0 \cdots 0)$ und die

$$\text{Basis-Ket-Vektoren } |a_j\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefern als Skalarprodukt

$$\langle a_i|a_j\rangle = (\langle a_i|a_j\rangle)^* = \delta_{ij} \Rightarrow \langle a_i|a_i\rangle = 1, \langle a_i|a_j\rangle = 0$$

und als dyadisches Produkt

$$\sum_i |a_i\rangle\langle a_i| = \sum_i \hat{P}_i = \mathbb{1}$$

mit den **Projektionsoperatoren** $\hat{P}_i = |a_i\rangle\langle a_i|$ und der Einheitsmatrix bzw. dem **Identitätsoperator** $\mathbb{1}$.

Beispiel :

$$\sum_{i=1}^2 |a_i\rangle\langle a_i| = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (a_1^* \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot (0 \ a_2^*) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 a_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_2 a_2^* \end{pmatrix}}_{P_2},$$

$$\text{mit } a_i a_i^* = a_i^* a_i = \langle a_i|a_i\rangle = 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^2 |a_i\rangle\langle a_i| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} .$$

- Das Skalarprodukt c_i aus dem Zustandsvektor $|v\rangle$ und dem Basis-Bra-Vektor $\langle a_i|$, also

$$c_i = \langle a_i|v\rangle ,$$

ist die Projektion von $|v\rangle$ auf $|a_i\rangle$, gesprochen: „Skalarprodukt v in a_i “. c_i ist somit die komplexe skalare Vektorkomponente von $|v\rangle$ „in Richtung“ des Basisvektors $|a_i\rangle$.

- **Entwicklungssatz** – Darstellung (Entwicklung) eines (Zustands)vektors $|v\rangle$ in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ im \mathbb{C}^n :

$$|v\rangle = \sum_i \underbrace{\langle a_i|v\rangle}_{c_i=v_i} |a_i\rangle = \sum_i v_i |a_i\rangle := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1|v\rangle \\ \langle a_2|v\rangle \\ \vdots \\ \langle a_i|v\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

$$= \underbrace{\sum_i |a_i\rangle\langle a_i|}_{=\mathbb{1}} |v\rangle = \sum_i \hat{P}_i |v\rangle = \mathbb{1}|v\rangle = |v\rangle . \quad (7.2)$$

Die Projektionen von $|v\rangle$ auf die Basisvektoren $|a_i\rangle$ bzw. die Skalarprodukte $\langle a_i|v\rangle$ sind die **Entwicklungskoeffizienten** $v_i \in \mathbb{C}$. In (7.1) steht ganz bewusst nicht das Gleichheitszeichen, sondern das $:=$ -Zeichen („definiert durch“). Die **skalaren** Vektorkomponenten $v_i = \langle a_i|v\rangle$ sind nämlich nicht gleich den zugehörigen (**vektoriellen**) Vektorkomponenten $v_i|a_i\rangle = \langle a_i|v\rangle|a_i\rangle = |a_i\rangle\langle a_i|v\rangle = \hat{P}_i|v\rangle$, wie man bei einem Vergleich von (7.1) und (7.2) feststellt und wodurch noch einmal die Bedeutung des Identitätsoperators $\mathbb{1}$ und der Projektionsoperatoren \hat{P}_i deutlich wird.

- Für Operatoren in der **basisfreien** bzw. abstrakten Form schreiben wir beispielsweise \hat{A} .

Im konkreten Fall bezieht man sich jedoch auf eine geschickt gewählte **VON-Basis**. Die dann in dieser Basis dargestellten Operatoren nehmen die Gestalt von Matrizen (A_{ij}) mit den Matrixelementen A_{ij} an. Es gilt deshalb $\hat{A} := (A_{ij})$.

Zur Erläuterung zeigen wir den Übergang von der basisfreien Darstellung zur Darstellung in einer Basis mit einer Analogie am Beispiel des Zusammenhangs zwischen der elektrischen Feldstärke \vec{E} und der elektrischen Flussdichte \vec{D} in anisotropen Materialien, vermittelt durch die Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. Dabei ist die Permittivität ein Tensor 2. Stufe bzw. im konkreten Fall eine (3×3) -Matrix mit den Matrixelementen ε_{ij} :

Abstrakte, basisfreie Darstellung: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

Darstellung in der Standardbasis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^3 D_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j \vec{e}_j,$$

$$\vec{D} := \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}.$$

- **Hermiteische Operatoren:**

Observablen werden repräsentiert durch Operatoren und realisieren sich in Gestalt von Messwerten. Messwerte aber können nur reelle Zahlen sein. Deshalb sind alle zu den *üblichen* Observablen in der Quantenmechanik gehörigen Operatoren hermitesch, d. h. selbstadjungiert wie beispielsweise die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2+i & i \\ 2-i & 2 & 1-2i \\ -i & 1+2i & 5 \end{pmatrix} = A^\dagger.$$

Hermiteische Operatoren bzw. die zugehörigen hermiteschen Matrizen besitzen nämlich folgende Eigenschaften:

- ★ Ihre Hauptdiagonalelemente sind reell.
- ★ Ihre Eigenwerte sind reell und repräsentieren mögliche Messwerte wie z. B. in den Eigenwertgleichungen $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$ bzw. $\hat{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$.
- ★ Ihre Eigenfunktionen sind orthogonal und bilden ein VONS.

- **Matrixdarstellung von Operatoren** in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$,
Matrizelement :

Die basisfreie Operatorgleichung

$$|v\rangle = \hat{A}|u\rangle \quad (7.3)$$

erhält in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ die Gestalt

$$\begin{aligned} |v\rangle &= \sum_j \underbrace{\langle a_j|v\rangle}_{v_j} |a_j\rangle = \hat{A}|u\rangle = \hat{A} \sum_j \underbrace{\langle a_j|u\rangle}_{u_j} |a_j\rangle \\ &= \sum_j v_j |a_j\rangle = \sum_j u_j \hat{A}|a_j\rangle . \end{aligned} \quad (7.4)$$

Durch Multiplikation von (7.4) mit dem Basis-Bra-Vektor $\langle a_i|$ von links erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_j \langle a_i|v_j|a_j\rangle &= \sum_j v_j \underbrace{\langle a_i|a_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_j u_j \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \Rightarrow \\ v_i &= \sum_j \underbrace{\langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle}_{A_{ij}} \cdot u_j , \quad (7.5) \\ v_i &= \sum_j A_{ij} \cdot u_j , \end{aligned}$$

also die skalare Vektorkomponente v_i des Vektors $|v\rangle$ und die

$$\text{Matrizelemente } \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle = A_{ij}$$

in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$. Aus den Matrizelementen A_{ij} ergibt sich die Matrixdarstellung (A_{ij}) des Operators \hat{A} . Mit ihr erhalten wir

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{pmatrix} = (A_{ij}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1|\hat{A}|a_1\rangle & \langle a_1|\hat{A}|a_2\rangle & \cdots & \langle a_1|\hat{A}|a_j\rangle & \cdots \\ \langle a_2|\hat{A}|a_1\rangle & \langle a_2|\hat{A}|a_2\rangle & \cdots & \langle a_2|\hat{A}|a_j\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle a_i|\hat{A}|a_1\rangle & \langle a_i|\hat{A}|a_2\rangle & \cdots & \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \end{pmatrix} .$$

Die **Matrixdarstellung** eines Operators \hat{A} ist also

$$\boxed{\hat{A} := \sum_{i,j} A_{ij} |a_i\rangle \langle a_j| = (A_{ij})} .$$

In der beispielsweise 2-dimensionalen VON-Basis $\{a_1, a_2\}$ ist dies

$$\begin{aligned} &A_{11}|a_1\rangle\langle a_1| + A_{12}|a_1\rangle\langle a_2| + A_{21}|a_2\rangle\langle a_1| + A_{22}|a_2\rangle\langle a_2| \\ &= A_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{21} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} . \quad \square \end{aligned}$$

Doch wie erhalten wir durch Anwendung des Operators \hat{A} auf den Vektor $|u\rangle$ die Darstellung des Vektors $|v\rangle$ in der Form

$$|v\rangle = v_1|a_1\rangle + v_2|a_2\rangle + \dots + v_i|a_i\rangle + \dots = \sum_i v_i|a_i\rangle ?$$

Wir multiplizieren (7.5) mit dem Basis-Ket-Vektor $|a_i\rangle$ und summieren über i :

$$\begin{aligned} |v\rangle &= \sum_i v_i|a_i\rangle = \sum_i \left(\sum_j \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \cdot u_j \right) |a_i\rangle \\ &= \sum_i \underbrace{\langle a_i|v\rangle}_{v_i} |a_i\rangle = \sum_{ij} \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \cdot \underbrace{\langle a_j|u\rangle}_{u_j} |a_i\rangle \\ &= \underbrace{\sum_i |a_i\rangle \langle a_i|}_{\mathbb{1}} v = \underbrace{\sum_{ij} |a_i\rangle \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \langle a_j|}_{\hat{A}} u, \\ &|v\rangle = \hat{A}|u\rangle. \end{aligned}$$

Wie man sieht, gilt für die Matrixdarstellung (A_{ij}) eines Operators \hat{A} in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ auch

$$\hat{A} = \mathbb{1}\hat{A}\mathbb{1} := \sum_{ij} |a_i\rangle \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \langle a_j| = \sum_{ij} A_{ij}|a_i\rangle \langle a_j| = (A_{ij}).$$

• **Synopsis: Adjungierte** [$(AB)^T = B^T A^T \Rightarrow (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$]

★ Bra-Vektor $\langle u|$: $\langle u|^\dagger = |u\rangle$.

★ Ket-Vektor $|v\rangle$: $|v\rangle^\dagger = \langle v|$.

★ Skalarprodukt $\langle u|v\rangle$:

$$(\langle u|v\rangle)^\dagger = |v\rangle^\dagger \langle u|^\dagger = \langle v|u\rangle = \sum_i v_i^* u_i = (\langle u|v\rangle)^*.$$

★ dyadisches Produkt $|u\rangle\langle v|$:

$$(|u\rangle\langle v|)^\dagger = \langle v|^\dagger |u\rangle^\dagger = |v\rangle\langle u|.$$

★ Matrix-Vektor-Produkt $A|u\rangle = |v\rangle$:

$$(A|u\rangle)^\dagger = |v\rangle^\dagger = \langle v| = |u\rangle^\dagger A^\dagger = \langle u|A^\dagger,$$

wobei A^\dagger rechts von $\langle u|$ stehen muss, u. a. weil $\langle u|$ ein Zeilenvektor ist.

★ Matrix-Matrix-Vektor-Produkt $A(B|u\rangle) = |v\rangle$:

$$\left[A(B|u\rangle) \right]^\dagger = |v\rangle^\dagger = \langle v| = (\langle u|B^\dagger) A^\dagger.$$

Hierbei ist die Reihenfolge von Matrizen und Vektor zu beachten.

7.2 Lineare Polarisation

7.2.1 VON-Basis, Bra- und Ket-Vektoren

Als VON-Basis wählen wir die Jones-Vektoren \vec{J}_H für horizontal bzw. längs der x -Achse polarisiertes und \vec{J}_V für vertikal bzw. längs der y -Achse polarisiertes Licht. In der Bra-Ket-Notation schreiben wir für die Basisvektoren

$$\begin{aligned}\vec{J}_H &\rightarrow |H\rangle \quad \text{und} \quad \vec{J}_H^\dagger &\rightarrow \langle H|, \\ \vec{J}_V &\rightarrow |V\rangle \quad \text{und} \quad \vec{J}_V^\dagger &\rightarrow \langle V|.\end{aligned}$$

Damit erhält die VON-Basis die Gestalt

$$\begin{aligned}\{|a_i\rangle\} &= \{|a_1\rangle, |a_2\rangle\} \\ \longrightarrow &= \{|H\rangle, |V\rangle\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},\end{aligned}$$

sodass beispielsweise

$$\begin{aligned}\langle a_i | a_j \rangle &= \delta_{ij} \\ \longrightarrow &= \langle H | V \rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \\ \longrightarrow &= \langle V | V \rangle = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_i |a_i\rangle \langle a_i| &= \sum_i P_i = \mathbb{1} \\ \longrightarrow &= |H\rangle \langle H| + |V\rangle \langle V| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}\end{aligned}$$

gilt. Wir werden jetzt linear polarisiertes Licht bzw. das linear polarisierte optische Feld

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &:= \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = E_0 \cdot \vec{J}_P \quad \Rightarrow \\ \tilde{\mathbf{E}} &= E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y = E_0 \cos \alpha \cdot \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \cdot \vec{e}_y = \sum_i (\vec{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \vec{e}_i, \quad i \in \{x, y\},\end{aligned}$$

mit dem Neigungswinkel α zur positiven x -Achse in der Bra-Ket-Notation und in der oben gewählten VON-Basis darstellen. Damit gilt für den Jones-Vektor \vec{J}_P :

$$\vec{J}_P \rightarrow \cos \alpha |H\rangle + \sin \alpha |V\rangle \quad \text{und} \quad \vec{J}_P^\dagger \rightarrow \cos \alpha \langle H| + \sin \alpha \langle V|.$$

Analog zur Darstellung eines Bra-Vektors

$$|u\rangle = \sum_i \underbrace{\langle a_i | u \rangle}_{= u_i} |a_i\rangle = \sum_i \underbrace{|a_i\rangle \langle a_i | u \rangle}_{= 1}$$

in der VON-Basis $\{|a_i\rangle\}$ wird demzufolge das linear polarisierte optische Feld $\tilde{\mathbf{E}}$ dargestellt durch den Bra-Vektor $|e\rangle$ gemäß

$$E_0 \cdot \vec{\mathcal{J}}_{\mathcal{P}} \longrightarrow |e\rangle = \underbrace{E_0 \cos \alpha}_{\langle H|e\rangle = E_{0x}} |H\rangle + \underbrace{E_0 \sin \alpha}_{\langle V|e\rangle = E_{0y}} |V\rangle ,$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{E}} \longrightarrow |e\rangle = \langle H|e\rangle |H\rangle + \langle V|e\rangle |V\rangle = E_{0x} |H\rangle + E_{0y} |V\rangle} . \quad (7.6)$$

7.2.2 Polarisationsfilter mit horizontaler Transmissionsachse

Analog zur Wirkung des Operators \hat{A} auf den Bra-Vektor $|u\rangle$ gemäß

$$\text{basisfrei} \quad : \quad |v\rangle = \hat{A}|u\rangle, \quad (7.7)$$

$$\text{Basis } \{|a_i\rangle\} \quad : \quad |v\rangle = \sum_{ij} \langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle \cdot \langle a_j | u \rangle | a_i \rangle, \quad (7.8)$$

$$v_i = \sum_j \underbrace{\langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle}_{A_{ij}} \cdot \underbrace{\langle a_j | u \rangle}_{u_j} = \sum_j A_{ij} \cdot u_j \Rightarrow$$

$$|v\rangle := \left(A_{ij} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

lassen wir jetzt die Jones-Matrix M_H für das Polarisationsfilter, das die horizontal polarisierte Komponente des einfallenden Lichts herausfiltert, auf linear polarisiertes Licht (7.6) entsprechend dem Jones-Vektor \vec{J}_P mit dem Neigungswinkel α wirken. Das einfallende Licht indizieren wir mit „in“ und das austretende mit „out“ :

$$\vec{E}_{\text{out}} = M_H \cdot \vec{E}_{\text{in}} = M_H \cdot \underbrace{E_0 \vec{J}_P}_{\vec{E}_{\text{in}}} = E_0 \cdot M_H \vec{J}_P, \quad (7.9)$$

$$\vec{E}_{\text{out}} := E_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \cdot \cos \alpha \\ E_0 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Wie erwartet wird die horizontale x -Komponente von \vec{E}_{in} , also die *Projektion* von \vec{E}_{in} auf den Basisvektor \vec{J}_H , herausgefiltert.

Weil wir die Jones-Matrizen im Abschnitt 4.4 bezüglich der VON-Basis $\{\vec{J}_H, \vec{J}_V\}$ berechnet hatten,¹ sind die Elemente der Jones-Matrizen gleich den Matrixelementen des Operators \hat{A} bzw. der Matrix (A_{ij}) . Das bedeutet, dass der Operator \hat{A} die Funktion des polarisierenden optischen Elements bzw. hier des Polarisationsfilters repräsentiert. Kurz gesagt:

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |H\rangle\langle H|$$

ist der *Projektionsoperator* für die horizontale Projektion und repräsentiert damit das entsprechende Polarisationsfilter.

Den Übergang von der Gleichung (7.9) im Jones-Formalismus zur Gleichung

$$|e_{\text{out}}\rangle = M_H |e_{\text{in}}\rangle$$

in Bra-Ket-Notation erläutern wir, indem wir, angepasst an unseren Fall, zunächst die allgemeine basisfreie Gleichung (7.7) mittels (7.8) in der speziellen VON-Basis

¹Eine VON-Basis legt man fest. Die Matrixdarstellung eines Operators jedoch muss man „finden“.

$\{|a_i\rangle\} = \{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ darstellen. Dabei verwenden wir für den Operator \hat{A} , ebenfalls angepasst an unseren Fall, die Matrix $|a_1\rangle\langle a_1|$ gemäß

$$\hat{A} := |a_1\rangle\langle a_1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M_H = |H\rangle\langle H| :$$

$$\begin{aligned} |v\rangle &= \hat{A}|u\rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \cdot \langle a_j|u\rangle|a_i\rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \langle a_i|a_1\rangle\langle a_1|a_j\rangle \cdot \langle a_j|u\rangle|a_i\rangle \\ &= \underbrace{\langle a_1|a_1\rangle\langle a_1|a_1\rangle}_{A_{11}=1} \cdot \underbrace{\langle a_1|u\rangle}_{u_1}|a_1\rangle + \underbrace{\langle a_1|a_1\rangle\langle a_1|a_2\rangle}_{A_{12}=0} \cdot \underbrace{\langle a_2|u\rangle}_{u_2}|a_1\rangle + \\ &\quad \underbrace{\langle a_2|a_1\rangle\langle a_1|a_1\rangle}_{A_{21}=0} \cdot \underbrace{\langle a_1|u\rangle}_{u_1}|a_2\rangle + \underbrace{\langle a_2|a_1\rangle\langle a_1|a_2\rangle}_{A_{22}=0} \cdot \underbrace{\langle a_2|u\rangle}_{u_2}|a_2\rangle = \underbrace{\langle a_1|u\rangle}_{u_1}|a_1\rangle \quad (7.11) \\ &= (A_{11}u_1 + A_{12}u_2)|a_1\rangle + (A_{21}u_1 + A_{22}u_2)|a_2\rangle = A_{11}u_1|a_1\rangle = u_1|a_1\rangle, \end{aligned}$$

$$|v\rangle := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Ausgehend von (7.11) und (7.12) können wir jetzt unter Berücksichtigung von

$$|v\rangle = \hat{A}|u\rangle \Rightarrow \begin{cases} |a_1\rangle = |H\rangle, & |a_2\rangle = |V\rangle, \\ |u\rangle = |e_{\text{in}}\rangle = E_0(\cos\alpha|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle) = E_{0x}|H\rangle + E_{0y}|V\rangle = \tilde{\mathbf{E}}_{\text{in}}, \\ u_1 = E_0 \cos\alpha = E_{0x}, & u_2 = E_0 \sin\alpha = E_{0y}, \\ |v\rangle = |e_{\text{out}}\rangle = \tilde{\mathbf{E}}_{\text{out}} \end{cases} \quad (7.13)$$

die Wirkung des Polarisationsfilters mit der

$$\text{Jones-Matrix } M_H = (A_{ij}) =: \hat{A}$$

auf linear polarisiertes Licht mit dem Jones-Vektor $\vec{J}_{\mathcal{P}}$ in Bra-Ket-Notation zeigen:

$$\begin{aligned} |e_{\text{out}}\rangle &= |H\rangle\langle H|e_{\text{in}}\rangle \\ &= \langle H|e_{\text{in}}\rangle|H\rangle = \langle H|E_0(\cos\alpha|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle)|H\rangle \\ &= \underbrace{E_0 \cos\alpha}_{E_{0x}} \underbrace{\langle H|H\rangle}_1 |H\rangle + \underbrace{E_0 \sin\alpha}_{E_{0y}} \underbrace{\langle H|V\rangle}_0 |H\rangle, \\ |e_{\text{out}}\rangle &= E_{0x}|H\rangle, \\ |e_{\text{out}}\rangle &:= \begin{pmatrix} E_{0x} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (7.10) überein.

7.2.3 Polarisationsfilter mit Transmissionsachse im Winkel ϑ

Die Wirkung des Polarisationsfilters mit einer Transmissionsachse im Winkel ϑ zur positiven x -Achse auf linear polarisiertes Licht entsprechend dem Jones-Vektor $\vec{J}_{\mathcal{P}}$ wird mit Hilfe des Jones-Formalismus beschrieben durch

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{out}} = M_{\vartheta} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\text{in}} = M_{\vartheta} \cdot \underbrace{E_0 \vec{J}_{\mathcal{P}}}_{\tilde{\mathbf{E}}_{\text{in}}} = E_0 \cdot M_{\vartheta} \vec{J}_{\mathcal{P}}, \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{out}} &:= \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \cdot E_0 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \\ &:= E_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta \cos \alpha + \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \alpha \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \alpha + \sin^2 \vartheta \sin \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bei der Darstellung von (7.14) in der Bra-Ket-Notation unter Berücksichtigung von (7.13) und mit der

$$\text{Jones-Matrix } M_{\vartheta} = (A_{ij}) =: \hat{A}$$

zeigt sich, wie im Abschnitt 7.2.2 erläutert, dass die Elemente der Jones-Matrix M_{ϑ} gleich den Matrixelementen des entsprechenden Operators \hat{A} sind. Wir wollen dies deshalb lediglich mit der Berechnung *eines* Matrixelements analog zu (7.11) demonstrieren:

$$\begin{aligned} A_{21} = \langle a_2 | M_{\vartheta} | a_1 \rangle &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix} = \sin \vartheta \cos \vartheta = A_{21}. \quad \square \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} |e_{\text{out}}\rangle &= \overbrace{\cos^2 \vartheta}^{A_{11}} \overbrace{\langle H|u\rangle}^{u_1} |H\rangle + \overbrace{\cos \vartheta \sin \vartheta}^{A_{12}} \overbrace{\langle V|u\rangle}^{u_2} |H\rangle + \\ &\quad \overbrace{\sin \vartheta \cos \vartheta}^{A_{21}} \overbrace{\langle H|u\rangle}^{u_1} |V\rangle + \overbrace{\sin^2 \vartheta}^{A_{22}} \overbrace{\langle V|u\rangle}^{u_2} |V\rangle \\ &= \cos^2 \vartheta \cdot \overbrace{E_0 \cos \alpha}^{E_{0x}} |H\rangle + \cos \vartheta \sin \vartheta \cdot \overbrace{E_0 \sin \alpha}^{E_{0y}} |H\rangle + \\ &\quad \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \overbrace{E_0 \cos \alpha}^{E_{0x}} |V\rangle + \sin^2 \vartheta \cdot \overbrace{E_0 \sin \alpha}^{E_{0y}} |V\rangle, \\ |e_{\text{out}}\rangle &:= \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \cos \vartheta \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

7.3 Zirkulare Polarisation

In Analogie zum Jones-Formalismus (siehe Tabelle 6.2) schreiben wir unter Verwendung der VON-Basis $\{|H\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |V\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ für linkszirkular(\mathcal{L})-polarisiertes und rechtszirkular(\mathcal{R})-polarisiertes Licht in Bra-Ket-Notation²

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \quad \vec{J}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} &\longrightarrow |R\rangle = |\sigma^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \\ \mathcal{R} : \quad \vec{J}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} &\longrightarrow |L\rangle = |\sigma^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei sind die Faktoren $\pm i = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$ Phasenfaktoren und stehen für die Unterschiede $\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ der Phase von \tilde{E}_y gegenüber \tilde{E}_x .

Um Verwechslungen zwischen den Bezeichnungen \mathcal{L} , \mathcal{R} und $|R\rangle$, $|L\rangle$ zu vermeiden, schreiben wir in der Bra-Ket-Notation für linkszirkulare Polarisationszustände $|\sigma^+\rangle$ und für rechtszirkulare Polarisationszustände $|\sigma^-\rangle$.

7.4 Photonenspin

Der Begriff Photonenspin wurde im Kapitel 1 eingeführt. Den Spin s_z eines sich in z -Richtung fortbewegenden Photons erhalten wir durch die Anwendung des

$$\text{Photonen-Spinoperators} \quad \hat{s}_z := \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

auf die Zustandsvektoren $|\sigma^+\rangle$ oder $|\sigma^-\rangle$ dieses Photons:

$$\hat{s}_z|\sigma^+\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \hbar \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \hbar|\sigma^+\rangle \quad (7.15)$$

$$\Rightarrow s_z = \hbar \quad \text{bzw.} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hbar \end{pmatrix},$$

$$\hat{s}_z|\sigma^-\rangle = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \hbar \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = -\hbar|\sigma^-\rangle \quad (7.16)$$

$$\Rightarrow s_z = -\hbar \quad \text{bzw.} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\hbar \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ist wie die Pauli-Matrizen hermitesch, unitär (mit Determinante -1) und spurlos. Deshalb sind ihre Eigenwerte reell mit Betrag 1 und in der Summe gleich Null. Folglich sind ihre Eigenwerte $+1$ und -1 . Und die normierten Eigenvektoren³

²Siehe dazu: Wolfgang Demtröder, Springer-Lehrbuch, *Experimentalphysik 2 – Elektrizität und Optik*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, Seite 193.

³Alle Vielfachen von Eigenvektoren sind auch Eigenvektoren. Deshalb findet man in diesem Fall bei der Berechnung beispielsweise mit einem „Online-Eigenvektoren-Berechner“ auch die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = -i\sqrt{2} \cdot |\sigma^+\rangle$ zum Eigenwert $+1$ und $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i\sqrt{2} \cdot |\sigma^-\rangle$ zum Eigenwert -1 .

sind

$$|\sigma^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } +1 \quad \text{und} \quad |\sigma^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } -1 .$$

Die Anwendung des Photonen-Spinoperators auf die Basis-Zustände $|H\rangle$ und $|V\rangle$ liefert

$$\hat{s}_z \cdot \begin{cases} |H\rangle \\ |V\rangle \end{cases} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} = \hbar \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} = \begin{cases} i\hbar|V\rangle \\ -i\hbar|H\rangle \end{cases}$$

und damit keine physikalisch sinnvollen Ergebnisse, weil $|H\rangle$ und $|V\rangle$ keine Eigenzustände zum Operator \hat{s} sind und weil in diesem Fall komplexwertige Messergebnisse für den Spin resultieren würden. Gemäß den Eigenwertgleichungen (7.15) und (7.16) gehören nämlich zum Operator \hat{s}_z die Eigenzustände $|\sigma^+\rangle_{(\hbar)}$ und $|\sigma^-\rangle_{(-\hbar)}$ mit den Eigenwerten \hbar und $-\hbar$.

8 Anhang

8.1 Hauptachsentransformation von Kegelschnitten zur Bestimmung der Parameter von Ellipsen

Siehe dazu:

- Wikipedia, Suchbegriff *Hauptachsentransformation*,
- Friedrich W. Buckel, Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium, 2022, Text Nr. 54303, Suchbegriff *mathe-cd Schräge Ellipsen Hauptachsentransformation*.
- Suchbegriff *46 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen*, <https://resources.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ss10/MFI2/kap46.pdf>
- mein Skript *Grundlegendes zur Elektrodynamik und Quantenmechanik – Herleitungen und Erläuterungen*, Kapitel II/3 *Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen* und Abschnitt II/6.3 *Diagonalisierung von Matrizen (Operatoren)*.

Kegelschnitte sind Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln. Unser Ziel ist es, im Allgemeinen zu zeigen, wie man mit dem Verfahren der Hauptachsentransformation die Parameter von Kegelschnitten bestimmen kann, die nicht in ihrer Normalform gegeben sind.

Die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung mit mehreren Unbekannten (Variablen) ist eine Punktmenge, die Quadrik (Plural: Quadriken). Im \mathbb{R}^2 bzw. in der Ebene, beispielsweise dargestellt durch ein kartesisches (x, y) -Koordinatensystem, sind dies 2-dimensionale Quadriken, welche in der allgemeinen Form durch die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f &= (x \ y) \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + dx + ey + f \\ &= \vec{r}^T A \vec{r} + dx + ey + f = 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

mit den Koeffizienten a, b, c, d, e, f definiert sind. Es handelt sich bei dieser Gleichung um eine implizite Funktion der Form $F(x, y) = 0$ und im Prinzip um ein unterbestimmtes nichtlineares Gleichungssystem, das nur aus einer Gleichung aber mit zwei Unbekannten besteht.

Die symmetrische 2-reihige (quadratische) Matrix A in (8.1) besitzt mit den Koeffizienten a, b, c die Form

$$A = \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Die linke Seite von (8.1) wird quadratische Form genannt. Typische 2-dimensionale Quadriken sind beispielsweise die Kegelschnitte. Aber nicht alle Lösungen von (8.1) sind Kegelschnitte, jedoch sind alle Kegelschnitte Lösungen von (8.1). Achsenparallele Kegelschnitte befinden sich in **Normalform**. Ist ein achsenparalleler Kegelschnitt auch noch in Nullpunkts- oder Ursprungslage, so befindet er sich in seinem **Hauptachsensystem**, d. h. die Hauptachsen des Kegelschnitts und die Achsen des Koordinatensystems fallen zusammen.

8.1.1 Hauptachsentransformation

Wir können einen durch (8.1) beschriebenen Kegelschnitt in die Normalform überführen, indem wir den Kegelschnitt im (x, y) -Koordinatensystem so drehen, dass er im (x, y) -Koordinatensystem achsenparallel liegt, oder indem wir das ursprüngliche (x, y) -Koordinatensystem (dazu entgegengesetzt) drehen, sodass das neue (ξ, η) -Koordinatensystem achsenparallel zum Kegelschnitt liegt. Dabei verschwindet der Koeffizient c bzw. der für die Verdrehung des Kegelschnitts aus der Normalform zuständige gemischte Term cxy und aus der symmetrischen Matrix A wird mittels der Transformations- bzw. **Drehmatrix** S die

$$\text{Diagonalmatrix } D_A = S^T A S. \quad (8.3)$$

Hilfreich ist hier, dass Drehmatrizen (reelle) orthogonale Matrizen sind und folglich die Eigenschaft

$$S = S^T = S^{-1} \quad \text{und im } \mathbb{R}^2 \quad \det S = +1 \quad \text{oder} \quad \det S = -1$$

besitzen. S^T und S sind also die Matrizen für die Diagonalisierung $A \rightarrow D_A$ und gleichzeitig ist S aber auch die Transformationsmatrix für den Übergang der Koordinaten $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ gemäß

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = S \vec{q}.$$

Erläuterungen zur Verwendung der Drehmatrix S :

Das kartesische (ξ, η) -Koordinatensystem sei im mathematisch positiven Drehsinn gegenüber dem kartesischen (x, y) -Koordinatensystem um den gemeinsamen Koordinatenursprung um den Winkel α gedreht. Dann wird die zugehörige Drehmatrix M üblicherweise wie folgt notiert:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow M =: \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = S^{-1} = S^T.$$

In Anlehnung an den Wikipedia-Bertrag zur Hauptachsentransformation verwenden wir für unsere Drehmatrix S :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = S \Rightarrow S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bei der Diagonalisierung von A mittels S verändern sich die Koeffizienten a, b, c bzw. sie werden so transformiert, dass der Kegelschnitt im (x, y) -Koordinatensystem in seine achsenparallele Form gedreht wird. Die anschließende Umbenennung der Koordinaten $x \rightarrow \xi, y \rightarrow \eta$ liefert dann die gewünschte achsenparallele Form des Kegelschnitts im (ξ, η) -Koordinatensystem.

Da die Gleichung (8.1) keine Vektorgleichung ist, sind die Koeffizienten d und e der linearen Terme (Glieder) dx und ey keine skalaren Vektorkomponenten und werden deshalb beim Übergang zum gedrehten (ξ, η) -Koordinatensystem nicht „direkt“ transformiert. In diesen Gliedern betrifft die Transformation im Grunde nur die Koordinaten x, y , die durch die Koordinaten ξ, η ersetzt werden müssen, indem man $x = x(\xi, \eta)$ und $y = y(\xi, \eta)$ verwendet. Die resultierenden Terme werden dann geordnet und schließlich zu den linearen Termen im (ξ, η) -Koordinatensystem zusammengefasst. Die Transformation der linearen Terme geschieht also mittels S wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \\ \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} d \cdot x + e \cdot y &= d \cdot (\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha) + e \cdot (\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha) \\ &= \underbrace{(d \cos \alpha + e \sin \alpha)}_{\tilde{d}} \xi + \underbrace{(-d \sin \alpha + e \cos \alpha)}_{\tilde{e}} \eta, \end{aligned}$$

$$\boxed{d \cdot x + e \cdot y = \tilde{d} \cdot \xi + \tilde{e} \cdot \eta}$$

mit

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{e} \end{pmatrix}.$$

Probe mit $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(S^{-1})^T = (S^T)^T = S$ und $(AB)^T = B^T A^T$:

$$\tilde{d} \xi + \tilde{e} \eta = \begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{e} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \left[S^{-1} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \right]^T \cdot S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}^T \underbrace{S \cdot S^{-1}}_{=1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = dx + ey. \quad \square$$

Symmetrische $(n \times n)$ -Matrizen wie beispielsweise die Matrix A in (8.2) lassen sich immer mit Hilfe einer orthogonalen Matrix S diagonalisieren. So entspricht, wie wir später noch sehen werden, beispielsweise die Drehung einer Ellipse von (8.7) nach (8.6) der Diagonalisierung von A (nach D_A).

Wir erhalten die Drehmatrix S durch Bestimmung der Eigenwerte λ_i von A sowie durch Bestimmung der zugehörigen normierten Eigenvektoren \vec{v}_i aus der quadratischen charakteristischen Gleichung wie folgt:

- Aufstellen der **charakteristischen Gleichung**¹ von A mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}) &= \det \left[\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{vmatrix} a - \lambda & c/2 \\ c/2 & b - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a - \lambda)(b - \lambda) - (c/2)^2 \\ &= \lambda^2 - \lambda(a + b) + ab - (c/2)^2 \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

- Lösen der (quadratischen) charakteristischen Gleichung (8.4):
Die beiden Lösungen sind die zur Matrix A gehörenden Eigenwerte λ_1 und λ_2 .
- Bestimmen der normierten Eigenvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 aus den zwei Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 \cdot \mathbb{1}) \cdot \vec{r} &= \begin{pmatrix} a - \lambda_1 & c/2 \\ c/2 & b - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \tilde{\vec{v}}_1 \Rightarrow \text{Normierung} \Rightarrow \vec{v}_1, \\ (A - \lambda_2 \cdot \mathbb{1}) \cdot \vec{r} &= \begin{pmatrix} a - \lambda_2 & c/2 \\ c/2 & b - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \tilde{\vec{v}}_2 \Rightarrow \text{Normierung} \Rightarrow \vec{v}_2. \end{aligned}$$

- Zusammensetzen der normierten Eigenvektoren zur Diagonalisierungs- bzw. Transformationsmatrix

$$S = \left(\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \right),$$

wobei die Orientierung der Eigenvektoren so gewählt werden muss, dass $\det S = +1$ ist.

Die zu symmetrischen (reellen) Matrizen A gehörenden Eigenvektoren \vec{v}_i stehen orthogonal aufeinander und sind normierte Basisvektoren. Sie bilden also in unserem zweidimensionalen Fall die **Orthonormalbasis** $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

- Mit der (orthogonalen) Transformationsmatrix $S \Rightarrow S^{-1} = S^T$ können wir jetzt die Diagonalmatrix

$D_A = S^T A S$ berechnen, die den Koeffizienten des Kegelschnitts in Normalform entspricht und in der, wie bereits diskutiert wurde, der Koeffizient c verschwunden ist. Weiterhin stellen wir fest, dass die Hauptdiagonalelemente von D_A die Eigenwerte von A sind gemäß

$$D_A = \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Durch das Verschwinden des gemischten Terms cxy legen allein die neuen Koeffizienten $\tilde{a} = \lambda_1$ und $\tilde{b} = \lambda_2$ den quadratischen Anteil der ursprünglichen Gleichung (8.1) für das (ξ, η) -Koordinatensystem fest, denn dort erscheint der ursprüngliche Kegelschnitt infolge der Drehung mittels S jetzt in Normalform, dessen quadratische Terme jetzt nicht mehr durch die symmetrische Matrix A sondern durch die Diagonalmatrix D_A dargestellt werden.

- Wegen $\tilde{f} = f = \text{const}$ brauchen wir nur noch mit Hilfe der Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \left(\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \right) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{pmatrix}$$

¹Die Matrix $(A - \lambda \mathbb{1})$ ist die **charakteristische Matrix** von A und die Gleichung $\det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0$ ist die **charakteristische Gleichung** mit dem charakteristischen Polynom $\det(A - \lambda \cdot \mathbb{1})$.

die Koordinaten x, y durch die Koordinaten ξ, η darzustellen und erhalten aus (8.1)

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \underbrace{d x(\xi, \eta) + e y(\xi, \eta)}_{= \tilde{d} \xi + \tilde{e} \eta} + f = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda_1 \xi^2 + \tilde{d} \xi + \lambda_2 \eta^2 + \tilde{e} \eta = -f} . \quad (8.5)$$

Kegelschnitte, die sich im (ξ, η) -Koordinatensystem in achsenparalleler Lage bzw. in Normalform befinden, erfüllen die Gleichung (8.5).

- Nach Ausklammern von λ_1 aus den ξ -abhängigen Termen und von λ_2 aus den η -abhängigen Termen lässt sich die Gleichung (8.5) durch

$$\text{quadratische Ergänzung von } \xi^2 + \frac{\tilde{d}}{\lambda_1} \xi \quad \text{und} \quad \eta^2 + \frac{\tilde{e}}{\lambda_2} \eta$$

sowie anschließender entsprechender Umformung auf die Form

$$\frac{(\xi - \xi_0)^2}{h_\xi^2} + \frac{(\eta - \eta_0)^2}{h_\eta^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \pm \frac{(\xi - \xi_0)^2}{h_\xi^2} \mp \frac{(\eta - \eta_0)^2}{h_\eta^2} = 1$$

bringen, aus der man dann die Mittelpunktslage (ξ_0, η_0) sowie die Halbachsenlängen h_ξ und h_η ablesen kann.

- Durch die Koordinatentransformation $\vec{\varrho} \xrightarrow{S} \vec{r}$, d. h. durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

lassen sich schließlich auch noch die Mittelpunkts- und Scheitelkoordinaten der Kegelschnitte im (x, y) -Koordinatensystem berechnen

8.1.2 Spezielle Ellipsen

Ellipsen in achsenparalleler Ursprungslage :

Diese befinden sich in der einfachsten Form und erfüllen die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + f = (x \ y) \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}_{A \text{ diagonal}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = \vec{r}^T D_A \vec{r} + f = 0 \quad (8.6)$$

mit der Diagonalmatrix $A = D_A$ und mit $\frac{a}{-f} = \frac{1}{h_x^2}$ sowie $\frac{b}{-f} = \frac{1}{h_y^2}$ schließlich die übliche Gleichung

$$\boxed{\frac{x^2}{h_x^2} + \frac{y^2}{h_y^2} = 1}$$

für eine Ellipse in ihrem **Hauptachsensystem**. Dabei ist h_x die Länge der Halbachse in x -Richtung und h_y ist die Länge der Halbachse in y -Richtung. Entsprechend der Länge von h_x und h_y spricht man von kleiner und großer Halbachse. Die Ellipsenachsen, manchmal auch Hauptachsen genannt, mit den Längen $2h_x$ und $2h_y$ stehen senkrecht aufeinander. Die kleine Ellipsenachse bezeichnet man als **Nebenachse** und die große Ellipsenachse als **Hauptachse**.

Ellipsen in achsenparalleler Lage und mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0) :

Diese erfüllen die Gleichung

$$\frac{(x - x_0)^2}{h_x^2} + \frac{(y - y_0)^2}{h_y^2} = 1.$$

Ausmultiplizieren der Binome liefert

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x^2} (x^2 - 2xx_0 + x_0^2) + \frac{1}{h_y^2} (y^2 - 2yy_0 + y_0^2) = 1 \\ \Rightarrow & \frac{1}{h_x^2} x^2 + \frac{1}{h_y^2} y^2 - \frac{2x_0}{h_x^2} x - \frac{2y_0}{h_y^2} y + \underbrace{\frac{x_0^2}{h_x^2} + \frac{y_0^2}{h_y^2} - 1}_{=0} = 0 \Rightarrow \\ & ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0. \end{aligned}$$

Wie wir sehen, stehen die linearen Terme dx und ey für die Verschiebung des Mittelpunkts der Ellipse aus dem Koordinatenursprung.

Ellipsen in nicht achsenparalleler Ursprungslage (schräge Ursprungsellipsen) :

Diese erfüllen die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cxy + f = (x \ y) \underbrace{\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}}_{A \text{ symmetrisch}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = \vec{r}^T A \vec{r} + f = 0. \quad (8.7)$$

Der gemischte Term cxy steht für die Verdrehung der Ellipse im (x, y) -Koordinatensystem. Die Ellipse ist folglich nicht achsenparallel. Das Fehlen der linearen Terme dx und ey zeigt, dass sich die Ellipse in Ursprungslage befindet.

8.1.3 Eigenwerte und Eigenvektoren zur Matrix A

Wir berechnen jetzt die Eigenwerte λ_i und die Eigenvektoren $\tilde{\vec{v}}_i$ sowie die normierten Eigenvektoren \vec{v}_i der reellen **symmetrischen Matrix**

$$A = \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}$$

über die **charakteristische Gleichung** (8.4)

$$\lambda^2 - \lambda(a+b) + ab - (c/2)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

und das **homogene lineare Gleichungssystem**

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & c/2 \\ c/2 & b-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{I. } (a-\lambda)x + \frac{c}{2}y = 0, \\ \text{II. } \frac{c}{2}x + (b-\lambda)y = 0. \end{array} \quad (8.8)$$

Für lineares Gleichungssystem schreiben wir im Folgenden kurz LGS. Mit Hilfe der sog. pq -Formel

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

zur Lösung quadratischer Gleichungen und mit den Ersetzungen

$$-(a+b) = p \quad \text{und} \quad ab - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = q$$

erhalten wir die **Eigenwerte**

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a+b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right], \\ \lambda_2 &= \frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left[(a+b) + \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right]. \end{aligned}$$

Mit diesen Eigenwerten gehen wir in das homogene LGS (8.8), dessen Lösungen dann die Eigenvektoren sind.

Hinsichtlich **homogener LGS** müssen wir dabei folgendes berücksichtigen:

- Homogene LGS besitzen (immer) die triviale bzw. Nullvektor-Lösung.
- Ist die Anzahl der Variablen in der zu einem homogenen LGS gehörenden Koeffizientenmatrix gleich ihrem Rang, so ist der Nullvektor die einzige Lösung.
- Triviale Lösungen bzw. Nullvektoren kommen als Eigenvektoren nicht in Betracht: $\tilde{\vec{v}}_i \stackrel{!}{\neq} \vec{0}$.
- Ist der Rang der zu einem homogenen LGS gehörenden Koeffizientenmatrix kleiner als die Anzahl der Variablen, so existieren **unendlich viele Lösungen**, die als Eigenvektoren in Betracht kommen.

Eine derartige Matrix ist **singulär** (nicht invertierbar) und ihre Zeilen sind linear abhängig. Ein zu einer singulären Koeffizientenmatrix gehörendes *homogenes* LGS besitzt also außer der „obligatorischen“ trivialen Lösung immer noch mehr als eine Lösung.

- Das bedeutet:
Das zur Koeffizientenmatrix gehörende homogene LGS darf nicht eindeutig lösbar sein, um Eigenvektoren zu liefern. Alle Vielfachen von Eigenvektoren sind ebenfalls Eigenvektoren.
Die Ursache dafür ist, dass das charakteristische Polynom, also die Determinante der charakteristischen Matrix zur Bestimmung der zu den Eigenvektoren gehörenden Eigenwerte, gleich Null gesetzt wurde. Ist aber die Determinante einer Matrix gleich Null, so ist diese Matrix singulär.
- Reelle symmetrische ($n \times n$)-Matrizen und allgemein auch hermitesche ($n \times n$)-Matrizen besitzen nur reelle Eigenwerte und genau n **orthogonale Eigenvektoren** zu verschiedenen Eigenwerten.

Bestimmung der Eigenvektoren zur reellen symmetrischen Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right], \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left[(a+b) + \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right].$$

Wir verwenden jetzt den Gauß-Algorithmus und schreiben dabei (8.8) wegen der besseren Übersicht als (zweizeilige) erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} \text{I} \\ \text{II} \end{pmatrix} := \left(\begin{array}{cc|c} a - \lambda & c/2 & 0 \\ c/2 & b - \lambda & 0 \end{array} \right).$$

Bestimmung von $\tilde{v}_1(\lambda_1)$ aus

$$\left(\begin{array}{cc|c} a - \frac{1}{2} \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right] & c/2 & 0 \\ c/2 & b - \frac{1}{2} \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right] & 0 \end{array} \right) :$$

Wir dividieren die Zeile I durch $a - \frac{1}{2} \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right]$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & c / \left\{ 2a - \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right] \right\} & 0 \\ c/2 & b - \frac{1}{2} \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right] & 0 \end{array} \right). \quad (8.9)$$

Von Zeile II subtrahieren wir jetzt

$$\frac{c}{2} \cdot \text{Zeile I von (8.9)} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{c}{2} & \frac{c^2}{4a - 2 \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right]} & 0 \end{array} \right)$$

und erhalten schließlich die mit Hilfe des Gauß-Algorithmus vereinfachte erweiterte singuläre Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & c / \left\{ 2a - \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right] \right\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Wegen (8.4) muss im letzten Schritt tatsächlich

$$\left\{ b - \frac{1}{2} \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right] \right\} - \frac{c^2}{4a - 2 \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right]} = 0$$

resultieren, was wir durch akribisches Umformen und Ausmultiplizieren mit dem Zwischenergebnis

$$\begin{aligned} c^2 &= 4ab - 2a \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right] \\ &\quad - 2b \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right] + \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right]^2 \end{aligned}$$

zeigen können:

$$c^2 = \underbrace{4ab - 2(a+b)^2 + (a+b)^2 + (a-b)^2}_{=0} + c^2 = c^2. \quad \square$$

Wir dürfen jetzt eine der beiden Variablen x_1 und y_1 frei wählen und erhalten mit $y_1 \stackrel{!}{=} 1$ aus der Zeile I

$$1 \cdot x_1 + \frac{c}{2a - \left[(a+b) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right]} \cdot y_1 = 0$$

$$\xrightarrow{y_1 \stackrel{!}{=} 1} x_1 = \frac{c}{b - a - \sqrt{(a-b)^2 + c^2}}.$$

Damit ist der nicht normierte Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 :

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{(b-a) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Völlig analog ist die **Bestimmung von $\tilde{\mathbf{v}}_2(\lambda_2)$** aus

$$\begin{pmatrix} a - \frac{1}{2} \left[(a+b) + \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right] & c/2 \\ c/2 & b - \frac{1}{2} \left[(a+b) + \sqrt{(a-b)^2 + c^2} \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{(b-a) + \sqrt{(a-b)^2 + c^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Normierung der Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_i$ gemäß

$$\mathbf{v}_i = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_i}{|\tilde{\mathbf{v}}_i|} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}$$

erhalten wir die **normierten Eigenvektoren**

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{c}{(b-a) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2}} \right]^2}} \begin{pmatrix} \frac{c}{(b-a) - \sqrt{(a-b)^2 + c^2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.10)$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{c}{(b-a) + \sqrt{(a-b)^2 + c^2}} \right]^2}} \begin{pmatrix} \frac{c}{(b-a) + \sqrt{(a-b)^2 + c^2}} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

8.1.4 Bestimmung der Halbachsenlängen schräger Ursprungsellipsen

Zunächst überführen wir die Gleichung $ax^2 + by^2 + cxy + f = \mathbf{r}^T A \mathbf{r} + f = 0$ für eine schräge Ursprungsellipse durch Diagonalisierung von A , also durch

$$A = \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Diagonalisierung}} D_A = \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

in die Gleichung

$$\tilde{a}x^2 + \tilde{b}y^2 + f = \mathbf{r}^T D_A \mathbf{r} + f = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + f = 0$$

für die entsprechende achsenparallele Ursprungsellipse. Aus dieser Gleichung erhalten wir durch Äquivalenzumformung die übliche Form der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{\frac{-f}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{-f}{\lambda_2}} = \frac{x^2}{h_x^2} + \frac{y^2}{h_y^2} = 1, \quad f \neq 0$$

mit den Halbachsenlängen

$$h_x = \sqrt{\frac{-f}{\lambda_1}} \quad \text{und} \quad h_y = \sqrt{\frac{-f}{\lambda_2}}.$$

8.1.5 Bestimmung des Winkels α schräger Ursprungsellipsen

Die Ellipsengleichung (8.7)

$$ax^2 + by^2 + cxy + f = (x, y) \underbrace{\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

mit der **symmetrischen** Matrix A bildet eine schräge (nicht achsenparallele) Ellipse in Ursprungslage auf das (x, y) -Koordinatensystem bzw. deren Standardbasis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ ab. Zwischen der (großen) Hauptachse der schrägen (ursprünglichen) Ellipse und der x -Achse des (x, y) -Koordinatensystem liegt dann der Winkel α , den wir aus den Koeffizienten bzw. Parametern der schrägen Ellipse berechnen wollen. Dafür benötigen wir die Drehmatrix S .

Die (passive) Drehung des kartesischen (x, y) -Koordinatensystems K um den Winkel α im mathematisch **positiven** Drehsinn gemäß

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

liefert das gedrehte (x', y') -Koordinatensystem K' und ist gleichbedeutend mit der (aktiven) Drehung des Ortsvektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ innerhalb des (x, y) -Koordinatensystems K um den Winkel α im mathematisch **negativen** Drehsinn. Die Umkehroperation dazu bzw. die Drehung in umgekehrter Richtung wird beschrieben durch die Drehmatrix

$$S = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow S^T = S^{-1}.$$

Bei der Diagonalisierung von A gemäß (8.3)

$$S^T A S = D_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit der (orthogonalen) Drehmatrix

$$S = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2),$$

deren Spalten die **orthonormalen** Eigenvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 zu A sind, resultiert die Diagonalmatrix D_A , die der Abbildung der ursprünglichen Ellipse in ihrem (x, y) -**Hauptachsensystem** entspricht. Anders gesagt, mit Hilfe der Drehmatrix S wird die ursprünglich schräge Ellipse um den Winkel α so gedreht, dass sie schließlich im (x, y) -Koordinatensystem achsenparallel liegt. Der Übergang von der schrägen zur achsenparallelen Ellipse durch Drehung um den Winkel α stellt sich ausgehend von (8.7) wie folgt dar:

$$(x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow (x, y) S^T A S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) D_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Das aber bedeutet, dass wir den Drehwinkel α aus der Drehmatrix

$$S = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ermitteln können, denn die normierten Eigenvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 zur Matrix A hatten wir bereits mit (8.10) und (8.11) berechnet.

Anmerkungen

Die Vertauschung der normierten Eigenvektoren bzw. der Spalten in der Drehmatrix S bewirkt eine Vertauschung der Eigenwerte in der Diagonalmatrix D_A und damit eine Änderung der Schrägstellung der Ellipse um 90° , also eine Vertauschung der Richtung von Haupt- und Nebenachse. Weil von vornherein aber nicht klar ist, welcher der beiden Eigenvektoren die Richtung der Hauptachse und

welcher die Richtung der Nebenachse besitzt und da man der Ellipsengleichung (8.7) die Richtung der Ellipsenachsen nicht unbedingt ansieht, kann es ratsam sein, sich diesbezüglich vorab Klarheit zu verschaffen.

Dafür bestimmen wir in (8.7) die beiden y -Werte für einen möglichst kleinen festen Wert $x_0 > 0$, indem wir $ax_0^2 + by^2 + cx_0y + f = 0$ in die quadratische Gleichung $y^2 + py + q = 0$ umformen und diese mittels der sog. pq -Formel lösen. Wir erhalten die beiden Lösungen $y_+(x_0) > 0$ und $y_-(x_0) < 0$, die uns zeigen, welche der Ellipsenachsen durch den ersten Quadranten verläuft:

$$|y_+| > |y_-| \quad \Rightarrow \quad (\text{gro\ss e}) \text{ Hauptachse liegt im 1. Quadranten,}$$

$$|y_+| < |y_-| \quad \Rightarrow \quad \text{Nebenachse liegt im 1. Quadranten.}$$

Dabei stellen wir fest, dass der kleinere der beiden Eigenwerte λ den Eigenvektor liefert, welcher die Hauptachse beschreibt. Wählen wir beispielsweise $\lambda_1 < \lambda_2$, so beschreibt der zu λ_1 gehörende Eigenvektor \vec{v}_1 die Richtung der Hauptachse und der zu λ_2 gehörende Eigenvektor \vec{v}_2 die Richtung der Nebenachse.

8.2 Zu Abschnitt 4.3 – Berechnung von E_{0x} und E_{0y}

Achtung!

Die Länge der Halbachsen bezeichnen wir in diesem Abschnitt wie allgemein üblich mit a und b . Abweichend davon hatten wir in der Abbildung 4.1 (wegen der Notation bei der Hauptachsentransformation im Abschnitt 8.1) die Länge der großen Halbachse mit H und die Länge der kleinen Halbachse mit h bezeichnet.

Das (x', y') -Koordinatensystem K' sei das Hauptachsensystem der Ellipse

$$\mathcal{E}' := \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x'(y') = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y'^2}, \\ y' = y'(x') = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x'^2}. \end{cases} \quad (8.12)$$

K' sei gegenüber dem (x, y) -Koordinatensystem K um den gemeinsamen Koordinatenursprung im mathematisch positiven Sinn um den Winkel α gedreht, sodass \mathcal{E}' in K als die schräge Ursprungsellipse \mathcal{E} erscheint. Die Substitution der K' -Koordinaten durch die zugehörigen K -Koordinaten in (8.12) liefert dann die Gleichung von \mathcal{E} in K . Die dafür erforderlichen in (x, y) -Koordinaten ausgedrückten (x', y') -Koordinaten erhalten wir mit der Drehmatrix S^{-1} gemäß

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(x, y) \\ y'(x, y) \end{pmatrix}.$$

Damit resultiert aus (8.12)

$$\mathcal{E} := \frac{1}{a^2} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + \frac{1}{b^2} (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 = 1 = F(x, y). \quad (8.13)$$

Die Extrema (Index E) der Ellipse \mathcal{E} in K sind

$$\begin{aligned} y_E = y(x_0) = \pm |y_E| \quad \text{an den Stellen} \quad x_0 = \pm |x_0| \quad \text{oder} \quad x_0 = \mp |x_0|, \\ x_E = x(y_0) = \pm |x_E| \quad \text{an den Stellen} \quad y_0 = \pm |y_0| \quad \text{oder} \quad y_0 = \mp |y_0|. \end{aligned}$$

Diese bestimmen wir, indem wir zunächst (8.13) implizit nach x bzw. nach y differenzieren und anschließend $\frac{dy}{dx}$ bzw. $\frac{dx}{dy}$ gleich Null setzen. Dabei verwenden wir

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{und analog} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x} :$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{a^2} 2(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \cos \alpha + \frac{1}{b^2} (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)(-\sin \alpha)}{\frac{1}{a^2} 2(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \sin \alpha + \frac{1}{b^2} (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \cos \alpha} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 \quad \Rightarrow \quad y(x_0) = y_E \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a^2} 2(x_0 \cos \alpha + y_E \sin \alpha) \cos \alpha + \frac{1}{b^2} 2(-x_0 \sin \alpha + y_E \cos \alpha)(-\sin \alpha) = 0 \quad \left| \cdot \frac{a^2 b^2}{2} \right.$$

$$b^2 (x_0 \cos \alpha + y_E \sin \alpha) \cos \alpha - a^2 (-x_0 \sin \alpha + y_E \cos \alpha) \sin \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_0 (a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) = y_E \sin \alpha \cos \alpha (a^2 - b^2),$$

$$x_0 = y_E \underbrace{\frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}_{k_x} = k_x \cdot y_E.$$

Dies setzen wir in die Ellipsengleichung (8.13) für $F(x, y) \rightarrow F(x_0, y_E)$ ein und erhalten

$$\frac{1}{a^2} \left(k_x y_E \cos \alpha + y_E \sin \alpha \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(-k_x y_E \sin \alpha + y_E \cos \alpha \right)^2 = 1,$$

$$y_E^2 \frac{(k_x \cos \alpha + \sin \alpha)^2}{a^2} + y_E^2 \frac{(\cos \alpha - k_x \sin \alpha)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$y_E^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 (k_x \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)^2 + a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha \cdot k_x)^2},$$

$$y_E^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} \left[\frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \right]^2 + \frac{1}{b^2} \left[\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \right]^2}, \quad (8.14)$$

$$y_E = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} \left[\frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos^2 \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} + \sin \alpha \right]^2 + \frac{1}{b^2} \left[\cos \alpha - \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 \alpha \cos \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \right]^2}}.$$

y_E entspricht dabei E_{0y} . Wie man sofort sieht, gilt wie erwartet

$$\alpha = 0^\circ \Rightarrow y_E = \pm b, \quad \alpha = 90^\circ \Rightarrow y_E = \pm a.$$

Völlig analog erhalten wir aus dem Ansatz $\frac{dx}{dy} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow F(x, y) \rightarrow F(x_E, y_0)$ und $x(y_0) = x_E$ mit

$$y_0 = x_E \underbrace{\frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}}_{k_y} = k_y \cdot x_E$$

schließlich

$$x_E^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} \left[\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} \right]^2 + \frac{1}{b^2} \left[\frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \right]^2}, \quad (8.15)$$

$$x_E = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} \left[\cos \alpha + \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 \alpha \cos \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} \right]^2 + \frac{1}{b^2} \left[\frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha \cos^2 \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \right]^2}}.$$

x_E entspricht dabei E_{0x} . Wie man sofort sieht, gilt wie erwartet

$$\alpha = 0^\circ \Rightarrow x_E = \pm a, \quad \alpha = 90^\circ \Rightarrow x_E = \pm b.$$

Weiterhin gilt

$$\boxed{a^2 + b^2 = x_E^2 + y_E^2},$$

was man mit (8.14) und (8.15) beispielsweise für $\alpha = 45^\circ \Rightarrow \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ leicht zeigen kann, denn in diesem Fall gilt

$$x_E^2 + y_E^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = a^2 + b^2.$$

Und für $a = 4$, $b = 3$, $\alpha = 30^\circ \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ erhalten wir

$$x_E^2 = 14,25, \quad y_E^2 = 10,75 \quad \Rightarrow \quad x_E^2 + y_E^2 = 25 = a^2 + b^2.$$