

Reinhard Weiß

Gleichmäßige Konvergenz

– Fourier-Reihen –

Fourier-Transformation

04.01.2023

Inhaltsverzeichnis

1	Intervall, Schranke, Supremumsnorm	3
2	Zur Konvergenz von Funktionenfolgen	7
2.1	Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen	7
2.2	Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen	10
3	Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen	16
3.1	Beispiel geometrische Reihe	19
4	Fourier-Reihen	22
4.1	Die reelle Form der Fourier-Reihe	22
4.2	Die komplexe Form der Fourier-Reihe	27
4.3	Gewinnung der reellen aus der komplexen Form der Fourier-Reihe . . .	30
4.4	Zur Periodizität	31
4.5	Beispiel: Fourier-Reihe der periodischen Rechteckfunktion	32
4.6	Spektrale Darstellung von Fourier-Reihen	34
5	Was ist die Fourier-Transformation?	36
5.1	Herleitung der Fourier-Integraldarstellung	36
5.2	Satz von Plancherel (Plancherel-Identität)	41
5.3	Eigenschaften der Fourier-Transformation – Rechenregeln	42
5.4	Fourier-Transformation der Gauß’schen Normalverteilung	52
5.5	Fourier-Transformation der Rechteckfunktion	54
5.6	Fourier-Transformation der Dirac’schen delta-Funktion	56
5.7	Exponentialfunktionen mit imaginärem Exponenten	59
5.8	Fourier-Transformation der Kammfunktion	59
5.9	Fourier-Transformation der Funktion eines Wellenpaketes	62
5.10	Fourier-Transformation der Sprungfunktion	63

Quellen

- Autorenngemeinschaft: Paul Matussek . . . ,
Lehr- und Übungsbuch Mathematik, Band V, Fachbuchverlag Leipzig - Köln, 1992,
Abschnitt 6.1 *Darstellung periodischer Funktionen durch Fourier-Reihen* bis
Abschnitt 7.1.1 *Die Fourier-Transformation*, Seite 206 bis Seite 260.
- Tilman Butz, *Fouriertransformation für Fußgänger – Studium*,
7. Auflage, Vieweg & Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011.
- Christian B. Lang und Norbert Pucker,
Hochschultaschenbuch, *Mathematische Methoden in der Physik*,
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1998, Seite 373 bis Seite 385.
- Franz Embacher, *Fouriertransformation: Einführung*, mathe online Skripten, Fakultät für
Mathematik der Universität Wien, 2018,
[https://www.mathe-online.at/skripten/techn_fourier/
techn_fouriertransformation_einfuehrung.pdf](https://www.mathe-online.at/skripten/techn_fourier/techn_fouriertransformation_einfuehrung.pdf)

Die Menge der **natürlichen Zahlen** notieren wir wie folgt:

$$\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

1 Intervall, Schranke, Supremumsnorm

Siehe:

<https://www.mathebibel.de/intervalle>

https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_für_Nicht-Freaks:_Intervall

https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_für_Nicht-Freaks:_Uneigentliches_Supremum_und_Infimum

Intervalle mit Ausnahme der uneigentlichen Intervalle sind immer beschränkt. Anders gesagt, die beschränkten Intervalle sind die (eigentlichen) Intervalle und die unbeschränkten Intervalle sind die uneigentlichen Intervalle.

Untere Intervallgrenzen bezeichnen wir mit a und obere Intervallgrenzen mit b .

Beschränkte (eigentliche) **Intervalle** sind Intervalle, für die $a \nrightarrow -\infty$ und $b \nrightarrow \infty$ gilt:

abgeschlossenes Intervall $I = [a, b] \hat{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,

offenes Intervall $I = (a, b) \hat{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,

links offenes Intervall $I = (a, b] \hat{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, enthält b aber nicht a ,

rechts offenes Intervall $I = [a, b) \hat{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, enthält a aber nicht b .

Halboffene Intervalle sind entweder nur linksseitig und nur rechtsseitig offen. Bei offenen Intervallen verwendet man statt der runden Klammern $(a\dots$ bzw. $\dots b)$ auch nach außen geöffnete eckige Klammern $]a\dots$ bzw. $\dots b[$.

Kompakte Intervalle sind abgeschlossen und beschränkt gemäß

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{für } a \nrightarrow -\infty, b \nrightarrow \infty.$$

Ist eine Menge M nach oben (unten) beschränkt, so hat sie mindestens *eine* obere (untere) Schranke $S \in \mathbb{R}$ gemäß

$$S \geq x \quad (S \leq x) \quad \forall x \in M.$$

Die kleinste obere Schranke ist das **Supremum** \sup und die größte untere Schranke ist das **Infimum** \inf . Für die Suprema und die Infima beispielsweise von Intervallen I mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ gilt

$$\left. \begin{array}{l} I = [a, b] \\ I = (a, b] \\ I = [a, b) \\ I = (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \inf I = a, \sup I = b.$$

Bei abgeschlossenen Intervallgrenzen liegen das Infimum a bzw. das Supremum b innerhalb des Intervalls, d. h. a oder/und b gehören zum Intervall.

Bei offenen Intervallgrenzen liegen das Infimum a bzw. das Supremum b außerhalb des Intervalls, d. h. a oder/und b gehören nicht zum Intervall.

Die unbestimmten Ausdrücke ∞ und $-\infty$ sind keine Zahlen und können deshalb auch **keine Schranken** bilden, denn Schranken müssen reelle Zahlen sein. Dessen ungeachtet ist es hilfreich, in Analogie zu den uneigentlichen Grenzwerten $\pm\infty$ wie beispielsweise im einfachsten Fall $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\pm x} = \pm\infty$ die Begriffe uneigentliches Intervall, uneigentliches Supremum und uneigentliches Infimum einzuführen.

Unbeschränkte (uneigentliche) **Intervalle** sind Intervalle, für die $a \rightarrow -\infty$ oder/und $b \rightarrow \infty$ gilt:

links unbeschränkt, rechts abgeschlossen	$(-\infty, b] \hat{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ für $a \rightarrow -\infty$,
links unbeschränkt, rechts offen	$(-\infty, b) \hat{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ für $a \rightarrow -\infty$,
links abgeschlossen, rechts unbeschränkt	$[a, \infty) \hat{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ für $b \rightarrow \infty$,
links offen, rechts unbeschränkt	$(a, \infty) \hat{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ für $b \rightarrow \infty$,
Spezialfall beidseitig unbeschränkt	$(-\infty, \infty) \hat{=} \mathbb{R}$ für $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$.

Eine Menge M ist nach oben (unten) unbeschränkt, wenn sie keine obere (untere) Schranke S besitzt.

Bei Unbeschränktheit nach oben gemäß $\forall S \in \mathbb{R} \exists x \in M : x > S$ besitzt M ein
uneigentliches Supremum : $\sup M = \infty$.

Bei Unbeschränktheit nach unten gemäß $\forall S \in \mathbb{R} \exists x \in M : x < S$ besitzt M ein
uneigentliches Infimum : $\inf M = -\infty$.

Beispiele

- Betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = y = \frac{1}{x}, \quad x \in I = (0; 1] .$$

Den Definitionsbereich bzw. das Intervall I lassen wir hier zunächst links offen, weil die Division durch Null nicht definiert ist:

$$x = 1 \quad : \quad f(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \inf f = 1 ,$$

$$x \rightarrow 0 \quad : \quad \lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad \sup f = \infty \quad (\text{uneigentliches Supremum}) ,$$

$$f(x) = y \in [1, \infty) \quad (\text{rechts unbeschränktes Intervall}) .$$

Die Funktion $f : (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist **unbeschränkt** mit (uneigentlichem) $\sup f = \infty$ und sie ist auf dem links offenen Intervall $I = (0; 1]$ **stetig**, weil die Null *außerhalb* des Definitionsbereichs liegt.

- Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = y = \frac{1}{x}, \quad x \in I = [0; 1]$$

ist **unbeschränkt** mit (uneigentlichem) $\sup f = \infty$ und sie ist auf dem links abgeschlossenen Intervall $I = [0; 1]$ **nicht stetig**, weil die Null *innerhalb* des Definitionsbereichs liegt. Die Unstetigkeitsstelle $x = 0$ resultiert aus der Nichtexistenz von $f(0)$, weil die Division durch Null nicht definiert ist. Also darf man beim Rechnen für x nicht die Null einsetzen, sondern muss dafür ggf. den Limes für $x \rightarrow 0$ verwenden wie beispielsweise im Fall $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$.

Unstetigkeitsstellen sind entweder Definitionslücken (Polstellen und hebbare Definitionslücken) oder Sprungstellen. Besitzt eine Funktion eine Definitionslücke und ist die Funktion dort *stetig fortsetzbar*, dann ist die Definitionslücke stetig hebbbar oder kurz *hebbbar*.

Die Definitionslücke von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 0$ ist nicht stetig hebbbar.

Besitzen Zähler $y = y(x)$, $y \in \mathbb{R}$ und Nenner $z = z(x)$, $z \in \mathbb{R}$ einer Funktion $f = \frac{y(x)}{z(x)}$ gemeinsame Nullstellen, so besitzt f an diesen Stellen jeweils eine hebbare Definitionslücke wie beispielsweise die Funktion $f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, $n \in \mathbb{N}$ an der Stelle $x = 1$.

Supremumsnorm

Im Zusammenhang mit der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen im Abschnitt 2.2 werden wir die Supremumsnorm, auch Unendlich-Norm genannt, benötigen.

$f_n(x)$ und $f(x)$ seien beschränkte Funktionen und die Funktionendifferenz $f_n(x) - f(x)$ sei die Funktion $g(x)$ auf dem Intervall I . Damit definieren wir die Supremumsnorm $\|g\|_\infty$ wie folgt:

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|g\|_\infty := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |g(x)| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \overbrace{|f_n(x) - f(x)|}^{\text{Betrag}} = \|f_n - f\|_\infty.$$

Manchmal schreibt man für die Supremumsnorm von g auch $\|g\|_{\text{sup}}$.

Beispiel (siehe Abbildung 2.1)

Es sei $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_n(x) = x^n$

eine Funktionenfolge mit $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$, $x \in I = [0; 1)$ und es sei

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \quad \text{für } x \in I = [0; 1)$$

die Grenzfunktion zu $f_n(x)$. Dann gilt

$$\left(\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow x^n = 0 \quad \text{für alle } n \text{ und für } \lim_{n \rightarrow \infty} , \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow x^n \rightarrow 1 \quad \text{für alle } n , \end{array} \right) \quad (1.1)$$

$$\left(x = 1 \Rightarrow x^n = 1 \quad \text{für alle } n \text{ und für } \lim_{n \rightarrow \infty} , \right)$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad \text{für } 0 \leq x < 1 \text{ bzw. } x \in I = [0; 1). \quad (1.2)$$

Aus (1.1) und (1.2) resultiert

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n \Rightarrow x^n \in [0; 1) \quad \text{für } x \in [0; 1) \Rightarrow \sup_{x \in [0; 1)} x^n = 1$$

und damit schließlich die Supremumsnorm

$$\|g\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0; 1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0; 1)} x^n = 1. \quad (1.3)$$

2 Zur Konvergenz von Funktionenfolgen

- Eine Zahlenfolge heißt beschränkt (oder auch beiderseitig beschränkt), wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.
- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.
- Nullfolgen sind konvergent.
Folgen, die einen Grenzwert haben, sind konvergent.
- Nicht konvergente Folgen sind divergent.
- Unbeschränkte Folgen sind divergent.
- Folgen mit den uneigentlichen Grenzwerten $+\infty$ oder/und $-\infty$ sind nicht konvergent sondern **bestimmt divergent**.
Folgen ohne eigentlichen und ohne uneigentlichen Grenzwert sind **unbestimmt divergent**.¹
- Der Begriff **fast alle** bedeutet in der Mathematik:
alle bis auf endlich viele bzw. unendlich viele mit Ausnahme endlich vieler.

2.1 Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen

Die Funktionen $f_n = f_n(x)$ mit dem Laufindex $n \in \mathbb{N}$ seien die Glieder der

$$\textbf{Funktionenfolge} \quad (f_n(x)) := (f_n(x))_{n=1}^{\infty} .$$

Dabei hängt jedes Glied f_n vom Parameter $x \in \mathbb{R}$ ab. Wir betrachten die Folge $(f_n(x))$ auf dem Definitionsbereich bzw. Intervall I , also für $x \in I$.

Definition

Existiert für alle $x \in I$ eine **Grenzfunktion** $f(x) := f_{\infty}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, dann ist die Funktionenfolge $(f_n(x))$ **punktweise konvergent** gemäß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I \quad \text{oder kurz} \quad f_n \rightarrow f .$$

Wie wir im Folgenden sehen werden, hängt die punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge nicht allein von den Funktionen $f_n(x)$ ab, sondern insbesondere auch vom betrachteten Intervall I .

Die Grenzfunktion $f(x)$ einer Folge von stetigen Funktionen $f_n(x)$ kann unstetig sein. Die Grenzfunktion $f(x)$ einer Folge von beschränkten Funktionen $f_n(x)$ kann unbeschränkt sein.

¹Siehe *Grenzwerte von Folgen*, <https://statmath.wu.ac.at/~leydold/MOK/HTML/mode65.html>

Beispiele

$$\bullet f_n(x) = x^n, \quad x \in I = [0; 9/10] \quad \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0^n = 0 \\ f(9/10) = \lim_{n \rightarrow \infty} (9/10)^n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = 0. \quad (2.1)$$

Die Grenzfunktion $f(x)$ ist hier für alle $x \in I$ gleich Null und existiert somit für alle $x \in I$. Demzufolge ist die Funktionenfolge $(f_n(x)) = (x^n)$ auf dem Intervall $[0; 9/10]$ punktweise konvergent.

Mit der gleichen Argumentation ist auch

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in I = [0; 9/10) \quad \text{punktweise konvergent.}$$

$$\bullet f_n(x) = x^n, \quad x \in I = [0; 1) \quad \Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{für } 0 \leq x < 1. \quad (2.2)$$

Die Grenzfunktion $f(x)$ ist hier für alle $x \in I$ gleich Null und existiert somit für alle $x \in I$. Demzufolge ist die Funktionenfolge $(f_n(x)) = (x^n)$ auf dem Intervall $[0; 1)$ punktweise konvergent.

$$\bullet f_n(x) = x^n, \quad x \in I = [0; 1] \quad \Rightarrow$$

Für $0 \leq x < 1$ gilt (2.1). Für $x = 1$ gilt $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$, sodass

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion $f(x)$ existiert für alle $x \in I$. Demzufolge ist die Funktionenfolge $(f_n(x)) = (x^n)$ auf dem Intervall $[0; 1]$ punktweise konvergent.

Achtung!

Obwohl jede Glied-Funktion $f_n(x) = x^n$ stetig ist, ist hier die Grenzfunktion $f(x)$ nicht stetig, denn sie springt im Punkt $x = 1$ von 0 auf 1. Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \uparrow 1} x^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1, \quad (2.3)$$

$$\lim_{x \uparrow 1} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right] = \begin{cases} \lim_{x \uparrow 1} 0 = 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ \lim_{x \uparrow 1} 1 = 1 & \text{für } x = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \uparrow 1} x^n \right] \neq \lim_{x \uparrow 1} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right]. \quad (2.5)$$

Wie man an (2.3) und (2.4) erkennt, gewährleistet die alleinige punktweise Konvergenz im Allgemeinen nicht, dass bei Änderung der Reihenfolge der Grenzprozesse das gleiche Ergebnis resultiert.

$$\bullet f_n(x) = x^n, \quad x \in I = [-1; 1] \quad \Rightarrow$$

Für $n \rightarrow \infty$ sind die Folgen x^n im Fall $0 \leq x < 1$ Nullfolgen und im Fall $-1 < x < 0$ alternierende Nullfolgen, während sie im Fall $x \leq -1$ keinen Grenzwert besitzen.

Es gilt nämlich

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{für } x > 1, \\ 1 & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{für } -1 < x < 1, \\ \nexists & \text{für } x \leq -1. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion $f(x)$ existiert nicht für $x = -1$ und somit nicht für alle $x \in I$. Demzufolge ist die Funktionenfolge $(f_n(x)) = (x^n)$ auf dem Intervall $[-1; 1]$ nicht punktweise konvergent sondern unbestimmt divergent.

- $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2} = \frac{x}{\frac{1}{n^2} + x^2}, \quad x \in I = [0; 1] \quad \Rightarrow$
 $f_3(0) = 0, \quad f_3(0,01) \approx 0,09, \quad f_3(0,1) \approx 0,83, \quad f_3(0,5) \approx 1,39, \quad f_3(1) = 0,9,$
 $f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge n = 0, \quad \text{denn } \frac{n^2 \cdot 0}{1 + n^2 \cdot 0} = \frac{0}{1} = 0,$
 $f_n(1) = \frac{n^2}{1 + n^2} \quad \Rightarrow \quad f_0(1) = 0, \quad f_1(1) = \frac{1}{2}, \quad f_\infty(1) = f(1) = 1,$
 $f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für } 0 < x \leq 1, \quad \text{denn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\frac{1}{n^2} + x^2} = \frac{x}{0 + x^2},$
 $f(0) = 0, \quad \text{denn } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1} = 0.$

Das Maximum der einzelnen Glied-Funktionen erhält man mittels $\frac{d}{dx} f_n(x) = 0$ hier an der Stelle $x_{\max} = \frac{1}{n}$ und damit beispielsweise für

$$n = 3 : \quad \max f_3(x) = f_3\left(\frac{1}{3}\right) = 1,5.$$

Auch wenn die Grenzfunktion f an der Stelle $x = 0$ des Intervalls $I = [0; 1]$ mit $f(0) = 0$ existiert, ist sie wegen des uneigentlichen Supremums

$$\sup f(x) = \sup \frac{1}{x} = \infty \quad \text{auf } I = (0; 1]$$

unbeschränkt (siehe Beispiel im Kapitel 1). Die Grenzfunktion $f(x)$ divergiert also für $x \rightarrow 0$ und existiert somit nicht für alle $x \in I$.

Demzufolge ist die Funktionenfolge $(f_n(x)) = \left(f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}\right)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ nicht punktweise konvergent.

Achtung!

– Die Grenzprozesse sind hier (bezüglich der Reihenfolge) nicht vertauschbar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x \downarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2} \right) \right] = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

– Während die einzelnen Glied-Funktionen $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2}$ auf dem Definitionsbereich $I = [0; 1]$ beschränkt und stetig sind, ist die zugehörige Grenzfunktion $f(x)$ unbeschränkt und unstetig, denn sie springt im Punkt $x = 0$ von $\sup f(x) = \infty$ auf $f(0) = 0$.

2.2 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Die Funktionen $f_n = f_n(x)$ mit dem Laufindex $n \in \mathbb{N}$ seien die Glieder der Funktionenfolge $(f_n(x))$. Dabei hängt jedes Glied f_n vom Parameter $x \in \mathbb{R}$ ab. Wir betrachten die Folge $(f_n(x))$ auf dem Definitionsbereich bzw. Intervall I , also für $x \in I$.

Definition

Eine Funktionenfolge $(f_n(x))$ ist **gleichmäßig konvergent** bzw. konvergiert gleichmäßig auf I gegen die Grenzfunktion $f(x)$, falls gilt

$$\text{Supremumsnorm } \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

bzw. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine von x unabhängige Zahl N gibt, sodass für alle $n \geq N$ und alle $x \in I$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \underline{\exists N \in \mathbb{N} \forall x \in I} \quad \forall n \geq N : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon . \quad (2.6)$$

Voraussetzung für gleichmäßige Konvergenz ist punktweise Konvergenz gemäß

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \underline{\forall x \in I} \quad \underline{\exists N \in \mathbb{N}} \quad \forall n \geq N : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon . \quad (2.7)$$

Gleichmäßige Konvergenz ist keine Voraussetzung für punktweise Konvergenz! Äquivalent zu (2.6) ist

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon ,$$

was anschaulich ausgedrückt bedeutet, dass bei gleichmäßiger Konvergenz *alle* Funktionen $f_{n \geq N}(x)$ für *alle* $x \in I$ innerhalb eines Schlauchs der Breite 2ε bzw. innerhalb des sog. ε -Schlauchs um $f(x)$ liegen.

Die Unterstreichungen in den Definition (2.6) und (2.7) zeigen den Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz, also die unterschiedliche Reihenfolge von Existenzquantor bezüglich N und Allquantor bezüglich x :

- Bei **punktweiser Konvergenz** ist es ausreichend, wenn man für jedes (einzelne) x (also $\forall x \in I$) *immer* ein N findet (also $\exists N \in \mathbb{N}$), sodass die Funktionen $f_{n \geq N}(x)$ kleiner als ein vorgegebenes ε sind. Das bedeutet, dass die Funktionen $f_n(x)$ nur in jedem (einzelnen) Punkt x gegen $f(x)$ zu konvergieren brauchen und folglich an verschiedenen Stellen $x \in I$ verschieden N gelten *können*. Bei *alleiniger* punktweiser Konvergenz ist N abhängig von x , wie beispielsweise im Fall der Folge $(f_n(x)) = (x^n)$, $x \in [0; 1)$.
- Bei **gleichmäßiger Konvergenz** findet man *immer* ein N (also $\exists N \in \mathbb{N}$), ganz gleich wie schmal der ε -Schlauch dann wird, sodass *für alle* x (also $\forall x \in I$) die Funktionen $f_{n \geq N}(x)$ innerhalb des ε -Schlauchs liegen. Dann gilt also dieses eine N für alle $x \in I$. Bei gleichmäßiger Konvergenz ist N unabhängig von x .

„Anders als bei der punktweisen Konvergenz müssen also die Folgen $(f_n(x))$ für *alle* $x \in D$ den ε -Test *gleichzeitig* bestehen. Anschaulich bedeutet dies, dass in

jedem ε -Schlauch um den Graphen der Grenzfunktion f die Graphen fast aller Funktionen f_n liegen müssen.

Umgekehrt konvergiert eine Folge (f_n) *nicht gleichmäßig* gegen f , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

für unendlich viele n gilt.² (Siehe Abbildung 2.1 c!)

- Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge erhält deren Stetigkeit.

Zur Notation! Konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n(x))$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f(x)$, schreibt man auch kurz

$$f_n \rightrightarrows f, \quad f_n \Rightarrow f \quad \text{oder} \quad f_n \xrightarrow{\text{glm}} f.$$

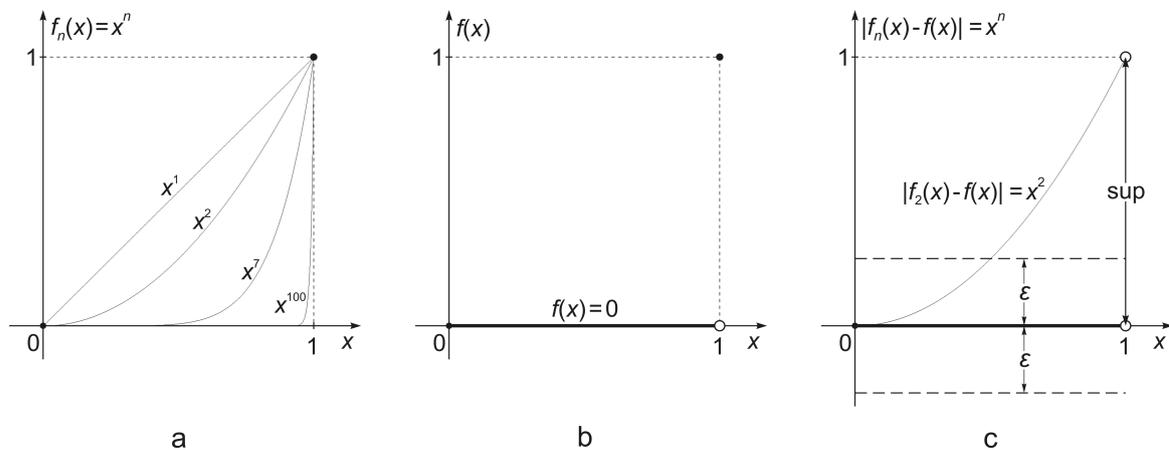


Abb. 2.1

a Veranschaulichung der Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ für $n = 1, n = 2, n = 7$ und $n = 100$ auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [0; 1]$.

b Darstellung der Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \{0 \text{ für } 0 \leq x < 1; 1 \text{ für } x = 1\}$.

c Veranschaulichung eines ε -Schlauchs um den Graphen der Grenzfunktion $f(x) \equiv 0$ und der Supremumsnorm (\sup) von $g(x) = f_n(x) - f(x) = x^n$ auf dem rechts offenen Intervall $I = [0; 1)$.

Überlegungen zur Abbildung 2.1

Über festem x wird der Abstand zwischen benachbarten Graphen $f_n(x) = x^n$ mit wachsendem n kleiner. Das heißt, dass einerseits die „Konvergenzgeschwindigkeit“ der Funktionenfolge gegen die x -Achse mit wachsendem n kleiner wird und andererseits die Graphen x^n mit wachsendem n immer „später“ gegen $x^n = 1$ gehen. Tatsächlich erreichen die Graphen x^n im Fall $x \in [0; 1)$ den Wert $x^n = 1$ nicht, sondern sie kommen $x^n = 1$ nur beliebig nahe gemäß $x \rightarrow 1 \Rightarrow x^n \rightarrow 1 \forall n$.

Beachtenswert ist das Verhalten der Grenzfunktion $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ im Fall des (rechts offenen) Intervalls $[0; 1)$. Ihr Graph $f(x) = 0$ liegt vollständig auf der x -Achse und beschreibt dort das Intervall $[0; 1)$, also ohne die Stelle $x = 1$ zu erreichen.

Die *Schnittpunkte* der Graphen x^n mit den Senkrechten zur x -Achse nähern sich im Intervall $0 < x < 1$ mit wachsendem n der x -Achse. Für $x = 1$ ist das anders, denn in diesem Fall laufen alle Graphen x^n durch denselben Punkt $(x = 1, x^n = 1)$. Demzufolge besitzt die Grenzfunktion $f(x)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [0; 1]$ an der Stelle $x = 1$ einen Sprung von 0 auf $f(1) = 1$.

²Zitat: <https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/Ana1-Poschel-WS2021/v/v25-txt.pdf>
Hinweis zur Notation: Anders als in diesem Zitat schreiben wir für den Definitionsbereich I statt D .

Beispiele³

- Im Abschnitt 2.1 wird u. a. mit (2.1) gezeigt, dass die Funktionenfolgen

$$(f_n(x)) = (x^n), \quad x \in I = [0; 9/10] \quad \text{und} \quad x \in I = [0; 9/10]$$

die Grenzfunktion $f(x) = 0 \quad \forall x \in I$ besitzen und demzufolge punktweise konvergent sind.

$$(f_n(x)) = (x^n), \quad x \in I = [0; 9/10] \quad \Rightarrow$$

Auch wenn man den ε -Schlauch um die Grenzfunktion $f(x) = 0$ in diesem Fall beliebig schmal wählt, so existiert dennoch gemäß (2.6) stets *ein* $N \leq n$, sodass dann die Funktionen $f_{n \geq N}(x)$ für *alle* $x \in I$ innerhalb des ε -Schlauchs liegen.

Demzufolge ist die Funktionenfolge (x^n) auf dem Definitionsbereich bzw. Intervall $[0; 9/10]$ gleichmäßig konvergent:

$$f(x) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0; 9/10]} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0; 9/10]} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (9/10)^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0; 9/10]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0; 9/10]} |f_n(x) - 0| = 0. \quad \square$$

Im Gegensatz zur alleinigen punktweisen Konvergenz (siehe Ungleichung (2.5)) sind bei gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenfolgen $(f_n(x))$ die beiden Grenzprozesse $\lim_{x \rightarrow \dots}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty}$ in ihrer Reihenfolge *immer* vertauschbar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \uparrow (9/10)} x^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (9/10)^n = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq (9/10),$$

$$\lim_{x \uparrow (9/10)} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right] = \lim_{x \uparrow (9/10)} 0 = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq (9/10),$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \uparrow (9/10)} x^n \right] = \lim_{x \uparrow (9/10)} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right].$$

$$(f_n(x)) = (x^n), \quad x \in I = [0; 9/10] \quad \Rightarrow$$

Durch die Anwendung von (2.6) lässt sich die gleichmäßige Konvergenz in diesem Fall beispielsweise wie folgt zeigen:

Wenn wir $0 < \varepsilon < 1$ wählen, dann erhalten wir mit $n \geq N$, $0 < x < 1$ und $f(x) = 0$ für das zugehörige N bzw. „ $N(\varepsilon)$ “

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x)| = x^n < \varepsilon \\ \Rightarrow \quad \ln x^n &= n \cdot \ln x < \ln \varepsilon, \quad \ln x = -|\ln x|, \quad \ln \varepsilon = -|\ln \varepsilon|. \end{aligned} \quad (2.8)$$

³Siehe Video der Vorlesung von Prof. Dr. Roland Speicher, zu finden unter dem Suchbegriff HMI 1: 10.3. Beispiel für nicht gleichmäßige Konvergenz – YouTube.

Bei Division einer Ungleichung durch -1 kommt es zu einer Umkehrung der Vergleichsrelation, sodass aus (2.8) folgendes resultiert:

$$n \cdot (-1) \cdot |\ln x| < (-1) \cdot |\ln \varepsilon| \quad \Rightarrow \quad n \cdot |\ln x| > |\ln \varepsilon| \quad \Leftrightarrow$$

$$n > \frac{|\ln \varepsilon|}{|\ln x|} = \frac{-|\ln \varepsilon|}{-\ln x} = \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} . \quad (2.9)$$

Wenn wir $f_n(x) = x^n$ für $x \rightarrow 9/10$ betrachten, so stellen wir fest, dass N in Abhängigkeit vom gegebenen ε hier **beschränkt** ist durch

$$N = \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} = \frac{\ln \varepsilon}{\ln 9/10} .$$

Damit ist die Definition (2.6) für die gleichmäßige Konvergenz erfüllt, denn es existiert dann für jedes ε ein N , sodass für alle $x \in I$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n < (9/10)^n < \varepsilon , \quad n \geq N .$$

- Im Abschnitt 2.1 wird mit (2.2) gezeigt, dass die Funktionenfolge

$$(f_n(x)) = (x^n) , \quad x \in I = [0; 1)$$

die Grenzfunktion $f(x) = 0 \quad \forall x \in I$ besitzt und demzufolge punktweise konvergent ist gemäß der Definition

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \underline{\forall x \in I} \quad \underline{\exists N \in \mathbb{N}} \quad \forall n \geq N : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Trotzdem ist die Funktionenfolge (x^n) auf dem Definitionsbereich $[0; 1)$ nicht gleichmäßig konvergent. Wie wir jetzt zeigen werden, ist nämlich in diesem Fall die Definition

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \underline{\exists N \in \mathbb{N}} \quad \underline{\forall x \in I} \quad \forall n \geq N : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für gleichmäßige Konvergenz nicht erfüllt.

Schauen wir also, was passiert, wenn wir $0 < \varepsilon < 1$ in (2.6) verwenden. Mit $f(x) = 0$ erhalten wir dann wie im vorherigen Beispiel

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = x^n < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} .$$

Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel ist N jetzt aber **unbeschränkt** wegen

$$x \in [0; 1) \quad \Rightarrow \quad N = \lim_{x \uparrow 1} \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} = \infty .$$

Wenn x von links gegen 1 geht, also für $x \uparrow 1$ bzw. $x \rightarrow 1^-$, dann wächst N über alle Grenzen, sodass es kein (festes) N (für *alle* $x \in I$) geben kann, wodurch die Definition (2.6) für gleichmäßige Konvergenz erfüllt wäre.

Dass x^n auf $I = [0; 1)$ nicht gleichmäßig konvergent ist, können wir auch formal durch die **Verneinung** von (2.6), also durch

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \exists x \in I : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \quad (2.10)$$

zeigen. Wir brauchen also nur zu zeigen, dass es eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gibt und dass für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Stelle $x \in I$ existiert, sodass $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ erfüllt ist. In diesem Fall liegt $f_n(x)$ an (mindestens) einer Stelle $x \in I$ für alle $n \in \mathbb{N}$ außerhalb des ε -Schlauchs um $f(x)$.

Dazu betrachten wir (2.10) für ein beliebiges $N = n$ an der Stelle $x = x(n) \in I$ im Bereich $\frac{1}{2} \leq x < 1$, also für

$$x \geq 1 - \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n = 1 & \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \\ n \rightarrow \infty & \Rightarrow x \rightarrow 1. \end{cases}$$

Diese Ungleichung lösen wir nach $\frac{1}{2}$ auf:

$$\frac{1}{2n} \geq 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \geq n(1 - x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leq 1 - n(1 - x) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{1 + n(x - 1) \geq \frac{1}{2}}.$$

Wenn wir jetzt $\varepsilon = \frac{1}{2} \leq 1 + n(x - 1)$ wählen und in (2.10) einsetzen, erhalten wir mit der

Bernoullischen Ungleichung $[1 + z]^n \geq 1 + n \cdot z, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R} \geq -1$

und mit $z = (x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + z = x = 1 + (x - 1)$ schließlich

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n = [1 + (x - 1)]^n \geq 1 + n(x - 1) \geq \frac{1}{2} = \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [\frac{1}{2}; 1) . \quad \square$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz würden sich die Graphen $f_n(x) = x^n$ ab einem gewissen $N \leq n$ für alle $x \in I$ in jeden ε -Schlauch um die Nullfunktion einschließen lassen. Wie man sieht, ist das hier nicht der Fall.

Geht x von links gegen 1, dann liegt der Abstand $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = x^n$ für *alle* n beliebig nahe bei 1. Deshalb liefert die Abschätzung dieses Abstands auf dem Intervall $I = [0; 1)$ die Supremumsnorm gemäß (1.3):

$$\|f_n - f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0; 1)} |f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{=0}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0; 1)} x^n = 1 \neq 0 . \quad \square$$

- Im Abschnitt 2.1 wird gezeigt, dass die Funktionenfolge

$$(f_n(x)) = (x^n), \quad x \in I = [0; 1]$$

die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

besitzt und demzufolge punktweise konvergent ist. Trotzdem ist die Funktionenfolge (x^n) auf dem Definitionsbereich $[0; 1]$ insbesondere wegen des Sprungs von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ von 0 auf 1 nicht gleichmäßig konvergent, sondern sie ist für alle n stets gleich 1. Daraus folgt

$$f_n(1) = f(1) = 1 \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad |f_n(1) - f(1)| = 0.$$

Deshalb ist die Stelle $x = 1$ bei der Abschätzung des Abstands zwischen $f_n(x)$ und $f(x)$ bzw. bei der Berechnung der Supremumsnorm auf dem (ganzen) Intervall $I = [0; 1]$ nicht relevant. Wir brauchen hier also nur das (rechts offene) Intervall $I = [0; 1)$ zu berücksichtigen und erhalten wie im vorherigen Beispiel

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0; 1]} |f_n(x) - f(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0; 1)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0; 1)} x^n = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ ist also sowohl auf $I = [0; 1)$ als auch auf $I = [0; 1]$ nicht gleichmäßig konvergent.

Anmerkung: Für $x \in I = [0; 1]$ gilt:

$$\sup x^n = \max x^n \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad \text{Supremumsnorm} = \text{Maximumsnorm}.$$

3 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen

Siehe auch:

<https://www.math.tugraz.at/~ganster/>

lv_analysis_2/24_gleichmaessige_konvergenz_funktionenreihen.pdf

Einige Beispiele für **Zahlenreihen** $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \rightarrow \infty \quad \text{harmonische Reihe ,}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6} ,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1 \quad \text{Teleskop-Reihe ,}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = e ,$$

$$\text{geometrische Reihe (spezielle Form)} \quad \left\{ \begin{array}{l} = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } 0 < |q| < 1 \text{ (konvergent) ,} \\ \rightarrow +\infty \quad \text{für } q \geq +1 \text{ (bestimmt divergent) ,} \\ \rightarrow \pm\infty \quad \text{für } q \leq -1 \text{ (unbestimmt divergent) .} \end{array} \right.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

Wenn die einer Reihe s zugrunde liegende Folge (a_k) nicht hinreichend schnell konvergiert, dann divergiert die Reihe s , wie man an der harmonischen Reihe leicht erkennen kann.

Anmerkung zur geometrischen Reihe

Allgemein erhält man die geometrische Reihe s aus den zugehörigen Partialsummen s_n wie folgt:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \underbrace{a_1 q^0}_{a_1} + \underbrace{a_1 q^1}_{a_2} + \underbrace{a_1 q^2}_{a_3} + a_1 q^3 + \dots + \underbrace{a_1 q^{n-1}}_{a_n} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \right) = a_1 \frac{1}{1-q} \quad \text{für } 0 < |q| < 1 . \quad (3.1)$$

Die geometrische Reihe mit $a_1 = 1 = q^0$ ist eine spezielle (vereinfachte) Form der geometrischen Reihe, bei der man k nicht von 1 bis n sondern von 0 bis n laufen lässt, sodass dann die Partialsummen s_n ein Glied mehr besitzen als in der Schreibweise (3.1). Es resultiert

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \Rightarrow$$

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = \frac{1}{1-q} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} - q^0 = \frac{q}{1-q} \quad \text{für } 0 < |q| < 1 .$$

Die Summe aller Glieder a_k mit

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_k(x), x \in I, n \in \mathbb{N}$$

einer unendlichen Funktionenfolge

$$(a_k(x)) := (a_k(x))_{k=1}^{\infty} .$$

ist die unendliche Funktionenreihe oder kurz

$$\textbf{Funktionenreihe } s = s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$$

auf dem Definitionsbereich bzw. Intervall I . Teile einer Funktionenreihe, bei denen der Index k von 1 bis n läuft, sind die

$$\textbf{Partialsommen } s_n = s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) .$$

Jede Partialsumme s_n ist die Summe aus n Gliedern der Funktionenfolge $(a_k(x))$. Zu jeder Partialsumme $s_n(x)$ gehört ein

$$\textbf{Restglied } R_n(x) = s(x) - s_n(x) .$$

Die punktweise Konvergenz einer Reihe kann auf die punktweise Konvergenz der zugehörigen Folge (s_n) der Partialsummen zurückgeführt werden:

$$(s_n) = \left(\sum_{k=1}^n a_k(x) \right) \text{ punktw. konvergent} \iff s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \text{ punktw. konvergent} .$$

Alles, was wir im Abschnitt 2.2 für die punktweise und die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen festgestellt hatten, gilt mit den Analogien

$$\begin{aligned} f_n(x) &\longleftrightarrow s_n(x) , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) &\longleftrightarrow s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) , \\ |f_n(x) - f(x)| = |g(x)| &\longleftrightarrow |R_n(x)| = |s_n(x) - s(x)| , \\ \|g\|_{\infty} &\longleftrightarrow \|R_n\|_{\infty} \end{aligned}$$

auch für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen. So ist die Funktionenreihe $s(x)$ punktweise konvergent, wenn ihr Restglied für alle $x \in I$ verschwindet gemäß $n \rightarrow \infty \Rightarrow R_n \rightarrow 0$.

Definition

Eine Funktionenreihe $s(x)$ ist **gleichmäßig konvergent** auf dem Definitionsbereich bzw. Intervall I , falls gilt:

$$\|R_n\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |R_n(x)| = 0 \quad (3.2)$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in I \forall n \geq N : |s_n(x) - s(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon . \quad (3.3)$$

Folgerungen aus der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenreihen:

- Sind die einer gleichmäßig konvergenten Funktionenreihe $s(x)$ zugrundeliegenden Funktionen $a_k(x)$ stetig, so ist auch $s(x)$ stetig. Gleichmäßige Konvergenz erhält die Stetigkeit.
- Wenn die Gliedfunktionen $a_k(x)$ einer gleichmäßig konvergenten Funktionenreihe $s(x)$ auf $I = [a, b]$ Riemann-integrierbar sind, dann ist auch $s(x)$ Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und es darf „gliedweise integriert“ werden gemäß

$$\int_a^b s(x) \, dx = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \right] \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b a_k(x) \, dx .$$

- Wenn die Gliedfunktionen $a_k(x)$ einer *konvergenten* Funktionenreihe $s(x)$ auf $I = [a, b]$ differenzierbar sind und wenn die nach Differentiation resultierende Funktionenreihe $s'(x)$ auf $I = [a, b]$ gleichmäßig konvergent ist, dann ist die Funktionenreihe $s(x)$ auch gleichmäßig konvergent und differenzierbar auf $[a, b]$, sodass „gliedweise differenziert“ werden darf gemäß

$$s'(x) = \frac{d}{dx} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} a_k(x) .$$

Von besonderer Bedeutung unter den Funktionenreihen sind die **Potenzreihen**

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{für den Entwicklungspunkt } x_0 \text{ bzw.}$$

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{für den Entwicklungspunkt } x_0 = 0$$

insbesondere im Zusammenhang mit der Taylor-Entwicklung von Funktionen. Erfreulicherweise sind Potenzreihen *im Innern* ihres Konvergenzgebiets *immer* gleichmäßig konvergent, aber nicht unbedingt auch an dessen Rändern.

3.1 Beispiel geometrische Reihe

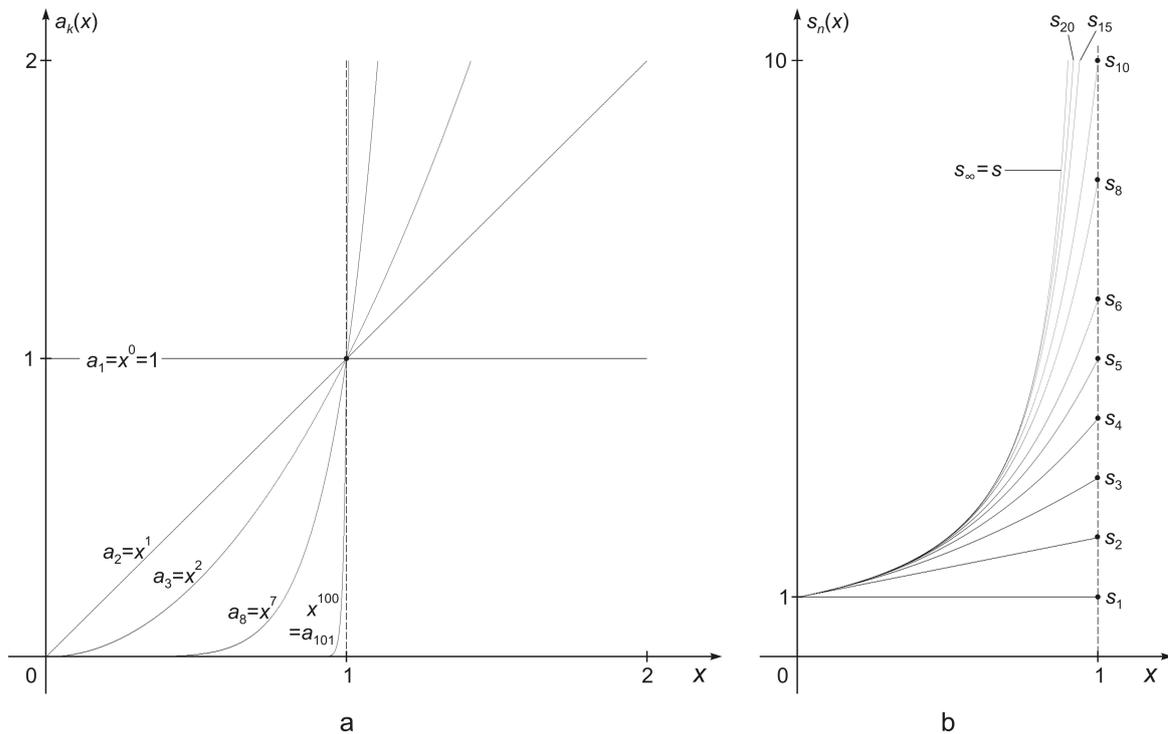


Abb. 3.1 Funktionenfolgen bilden die Grundlage für die geometrische Funktionenreihe.
a Veranschaulichung der Funktionenfolge $(a_k(x))$ auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [0; 2]$:
 $(a_k(x)) = (x^{k-1})$ mit $k \in \{1, 2, 3, 8, 101\}$.
b Veranschaulichung der Funktionenfolge $(s_n(x))$ auf dem abgeschlossenen Intervall $I = [0; 1]$:
 $(s_n(x)) = \left(\sum_{k=1}^n x^{k-1}\right) = \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$ mit $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20\}$.
Für die Grenzfunktion $s(x) = s_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \frac{1}{1-x}$ der Funktionenfolge $(s_n(x))$ gilt
 $x \rightarrow 1 \Rightarrow s(x) \rightarrow \infty$.

Erläuterungen zur Abbildung 3.1

Wir gehen hier aus von der (unendlichen) geometrischen Reihe s der Form

$$(3.1) \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_1 \frac{1}{1 - q} \quad \text{für } k, n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad 0 < |q| < 1,$$

tauschen dann q durch die Variable x aus und setzen zur Vereinfachung $a_1 = 1$.

Die Abbildung 3.1 a veranschaulicht also die Funktionenfolge $(a_k(x)) = x^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, welche die Grundlage für die geometrische Funktionenreihe darstellt und bereits in Gestalt der Funktionenfolge $(f_n(x)) = (x^n)$ im Kapitel 2 diskutiert wurde.

Aus der Funktionenfolge (x^{k-1}) mit $k \in \mathbb{N}$ resultiert dann die in der Abbildung 3.1 b veranschaulichte Funktionenfolge $(s_n(x))$ der Partialsummen $s_n(x)$ mit der zugehörigen Grenzfunktion $s(x)$, die die (unendliche) geometrische Funktionenreihe s beschreibt.

Weil Zähler und Nenner der Funktion $s_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ an der Stelle $x = 1$ eine gemeinsame Nullstelle besitzen bzw. weil der Nenner nach Ausklammern von $(1-x)$ aus dem Zähler weggekürzt werden kann, besitzt $s_n(x)$ an der Stelle $x = 1$ eine hebbare Definitionslücke. Mit der Regel von de L'Hospital resultiert

$$s_n(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx}(1 - x^n)}{\frac{d}{dx}(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-nx^{n-1}}{-1} = \lim_{x \rightarrow 1} nx^{n-1} = n.$$

Deshalb schneiden alle Graphen $s_n(x)$ die Senkrechte durch $x = 1$ gemäß $s_n(1) = n$. Die Grenzfunktion $s(x)$ hingegen nähert sich der Senkrechten durch $x = 0$ asymptotisch und schneidet sie folglich nicht.

Mit den Umbenennungen $s_n(x)$ für $f_n(x)$ und $s(x)$ für $f(x)$ ist die Ermittlung des Konvergenzverhaltens von Funktionenreihen völlig analog zu der von Funktionenfolgen im Abschnitt 2.2. Wir verwenden in den folgenden Beispielen die allgemeine Form (3.1) der geometrischen Reihe mit der Vereinfachung $a_1 = 1$:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \underbrace{x^0}_{a_1} + \underbrace{x^1}_{a_2} + \underbrace{x^2}_{a_3} + x^3 + \cdots + \underbrace{x^{n-1}}_{a_n} = \frac{1-x^n}{1-x} \Rightarrow$$

$$s(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x < 1.$$

Die Folge $(s_n(x))$ der Partialsummen der geometrische Reihe besitzt auf dem Intervall $I = (0; 1)$ die Grenzfunktion $s(x)$ und ist demzufolge auf I punktweise konvergent.

- Wir zeigen, dass die geometrische Reihe auf dem Intervall $x \in I = (0; 9/10)$ gleichmäßig konvergent ist:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |s_n(x) - s(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} \left| \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (0; 9/10)} \left| \frac{-(x^n)}{1-x} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(0,9)^n}{1-0,9} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Bei der Ermittlung des Supremums konnten wir die Tatsache verwenden, dass die Funktion $\frac{x^n}{1-x}$ auf dem Intervall $(0; 9/10)$ stetig ist und (mit x) streng monoton wächst.

- Dass die geometrische Reihe auf dem Intervall $x \in I = (0; 1)$ nicht gleichmäßig konvergent ist, zeigen wir analog zum entsprechenden Beispiel im Abschnitt 2.2 durch die Verneinung von (3.3), nämlich durch

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \exists x \in I : |s_n(x) - s(x)| = |R_n(x)| \geq \varepsilon. \quad (3.4)$$

Dabei gehen wir aus von

$$s_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}, \quad s(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow |s_n(x) - s(x)| = \left| \frac{-(x^n)}{1-x} \right| = \frac{x^n}{1-x} \quad (3.5)$$

und betrachten (3.4) für ein $x(n) \in I$ im Bereich $\frac{1}{2} \leq x(n) < 1$, also für¹

$$x = x(n) = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 & \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \\ n \rightarrow \infty & \Rightarrow x \rightarrow 1. \end{cases}$$

Dies setzen wir in (3.5) ein und erhalten

$$\frac{x^n}{1-x} = \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}{1 - \frac{n}{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}{\frac{1}{n+1}} = (n+1) \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = (n+1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

¹Wegen $n \in \mathbb{N}$, $x(n) = \frac{n}{n+1} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$ gilt $x(n) \in \mathbb{Q}$.

Wenn wir jetzt die **Bernoullische Ungleichung**

$$[1 + z]^n \geq 1 + n \cdot z, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R} \geq -1$$

mit $z = -\frac{1}{n+1}$ benutzen und $\varepsilon = 1$ wählen, resultiert schließlich

$$\frac{x^n}{1-x} = (n+1) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \geq (n+1) \left(1 - n \cdot \frac{1}{n+1}\right) = (n+1) - n = 1 = \varepsilon \Rightarrow$$

$$|s_n(x) - s(x)| = |R_n(x)| \geq \varepsilon. \quad \square$$

4 Fourier-Reihen

4.1 Die reelle Form der Fourier-Reihe

Nach Fourier lässt sich eine periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto f(\varphi)$ unter bestimmten Bedingungen in die trigonometrische Reihe

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \right], \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (4.1)$$

$$\boxed{f(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \right]} \quad (4.2)$$

$$\Rightarrow f(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\varphi + \varphi_n), \quad A_0 = a_0, \quad A_n \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

entwickeln.¹

Mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$ folgt:

$$\begin{aligned} A_n \sin(n\varphi + \varphi_n) &= A_n [\sin(n\varphi) \cdot \cos \varphi_n + \cos(n\varphi) \cdot \sin \varphi_n] \\ &= \underbrace{A_n \sin \varphi_n}_{a_n} \cdot \cos(n\varphi) + \underbrace{A_n \cos \varphi_n}_{b_n} \cdot \sin(n\varphi). \quad \square \end{aligned}$$

Diese Reihe heißt **Fourier-Reihe** mit der Periode 2π und beschreibt die 2π -periodische Funktion $f(\varphi)$. Die Konstanten a_n und b_n heißen **Fourier-Koeffizienten**. Das konstante Glied a_0 hat keinen Einfluss auf die Periodizität der Fourier-Reihe, sondern bewirkt nur eine Verschiebung längs der Ordinatenachse und wird deshalb Gleichglied oder auch **Gleichanteil** der Fourier-Reihe genannt.

Die **Bedingungen** (Dirichlet'sche Bedingungen) an $f(\varphi)$ zur Entwicklung der Fourier-Reihe sind:

1. $f(\varphi)$ muss 2π -periodisch sein gemäß $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$.
2. $f(\varphi)$ muss stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar sein.
3. $f(\varphi)$ darf im abgeschlossenen Intervall keine Pole besitzen sondern höchstens endlich viele bei φ_i gelegene Sprünge mit existierenden Grenzwerten $f(\varphi_i - 0)$ von links und $f(\varphi_i + 0)$ von rechts.

„Die Fourier-Reihe konvergiert dann an jeder Stetigkeitsstelle gegen den Funktionswert $f(\varphi)$ und an jeder Unstetigkeitsstelle φ_i gegen das arithmetische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes.“²

$$\frac{f(\varphi_i - 0) + f(\varphi_i + 0)}{2}$$

¹Im Abschnitt 4.2 diskutieren wir die oft verwendete Darstellung der reellen Fourier-Reihe

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \right] \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

²Zitiert aus: *Übungsbuch Mathematik*, Band V, Fachbuchverlag Leipzig – Köln, 1992, Seite 207. Dabei wurden die Umbenennungen $f(x) \rightarrow f(\varphi)$ und $x_0 \rightarrow \varphi_i$ vorgenommen.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten nutzen wir die Tatsache, dass der Wert des Integrals über eine ganze Periode der Fourier-Reihe (einer periodischen Funktion $f(\varphi)$) unabhängig ist vom Anfangspunkt φ_i der Integration gemäß

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_i+2\pi} f(\varphi) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi) \, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \, d\varphi .$$

Berechnung von a_0 (für $n = 0$):

Wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = 2\pi \quad \text{für } n = 0 , \quad (4.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\varphi) \, d\varphi = 0 \quad \text{für } n = 0 , \quad (4.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\varphi) \, d\varphi = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus 0 \quad (4.6)$$

liefert die Integration der Fourier-Reihe (4.2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \, d\varphi = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = a_0 2\pi \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \, d\varphi} . \quad (4.7)$$

Achtung! Der Fourier-Koeffizient a_0 in (4.7) ist der Mittelwert der Funktion $f(\varphi)$.

Berechnung von a_n und b_n für $n = 1, 2, 3, 4, \dots$:

Die übrigen Fourier-Koeffizienten erhalten wir unter Berücksichtigung von (4.6) mit einem Trick. Zur Berechnung der a_n erweitern wir (4.2) mit $\cos(m\varphi)$ und zur Berechnung der b_n erweitern wir (4.2) mit $\sin(m\varphi)$, wobei

$$n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad m + n = q \in \mathbb{N}, \quad m - n = \tilde{q} \in \mathbb{Z} .$$

Außerdem benötigen wir die Additionstheoreme (für Winkelfunktionen)

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] = \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] = \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] = \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{cases} \quad (4.9)$$

sowie die folgenden bestimmten Integrale in den Integrationsgrenzen von $-\pi$ bis π :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi) \cdot \cos(n\varphi) \, d\varphi &\stackrel{(4.8)}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi - n\varphi) \, d\varphi + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi + n\varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)\varphi] \, d\varphi + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m+n)\varphi] \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tilde{q} \cdot \varphi) \, d\varphi + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(q \cdot \varphi) \, d\varphi}_{\stackrel{(4.6)}{=} 0}, \end{aligned}$$

mit (4.8) und (4.6) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi) \cdot \cos(n\varphi) \, d\varphi = \begin{cases} \pi & \text{für } m = n \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(n\varphi) \, d\varphi \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}, \quad (4.10)$

mit (4.8) und (4.6) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\varphi) \cdot \sin(n\varphi) \, d\varphi = \begin{cases} \pi & \text{für } m = n \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(n\varphi) \, d\varphi \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}, \quad (4.11)$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi) \cdot \sin(n\varphi) \, d\varphi &\stackrel{(4.9)}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\varphi + n\varphi) \, d\varphi - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\varphi - n\varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(m+n)\varphi] \, d\varphi - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(m-n)\varphi] \, d\varphi \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(q \cdot \varphi) \, d\varphi}_{\stackrel{(4.6)}{=} 0} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\tilde{q} \cdot \varphi) \, d\varphi}_{\stackrel{(4.6)}{=} 0}, \end{aligned}$$

mit (4.9) und (4.6) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi) \cdot \sin(n\varphi) \, d\varphi = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$

Erweitern wir (4.2) mit $\cos(m\varphi)$ zur Berechnung des Fourier-Koeffizienten a_m für $m \in \mathbb{N}$, so resultiert

$$f(\varphi) \cdot \cos(m\varphi) = a_0 \cdot \cos(m\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\varphi) \cdot \cos(m\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \cdot \cos(m\varphi) \right], \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi &= \\ &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\varphi) d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Wegen (4.10), (4.11) und (4.12) bleibt von der Reihe (4.14) nur das Glied

$$a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi \quad \text{für } m = n$$

übrig, denn alle anderen Reihenglieder verschwinden. Durch Äquivalenzumformung erhalten wir den gesuchten Fourier-Koeffizienten wie folgt:

$$a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(n\varphi) d\varphi = a_n \cdot \pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi \Leftrightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4.15)$$

Erweitern wir (4.2) mit $\sin(m\varphi)$ zur Berechnung des Fourier-Koeffizienten b_m für $m \in \mathbb{N}$, so resultiert völlig analog zu (4.13) und (4.14) schließlich

$$b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(n\varphi) d\varphi = b_n \cdot \pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi \Leftrightarrow$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4.16)$$

Praxistipp !

$f(\varphi)$ ungerade Funktion $\Rightarrow a_n = 0$, weil Integrand in (4.15) ungerade Funktion,

$f(\varphi)$ gerade Funktion $\Rightarrow b_n = 0$, weil Integrand in (4.16) ungerade Funktion.

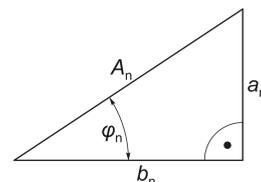
Innerhalb der Fourier-Reihe (4.2) bildet die Folge der Funktionen

$$\cos(0 \cdot \varphi), \sin(0 \cdot \varphi), \cos(1 \cdot \varphi), \sin(1 \cdot \varphi), \cos(2 \cdot \varphi), \sin(2 \cdot \varphi), \cos(3 \cdot \varphi), \sin(3 \cdot \varphi), \dots$$

bzw. $1, \cos(\varphi), \sin(\varphi), \cos(2\varphi), \sin(2\varphi), \cos(3\varphi), \sin(3\varphi), \dots$

ein **Basisfunktionensystem**. Es handelt sich hierbei um ein **Orthogonalsystem**, weil das Integral über das Produkt aus zwei verschiedenen Basisfunktionen verschwindet. Es handelt sich hierbei aber nicht um ein Orthonormalsystem, weil die Integrale über Produkte aus Basisfunktionen mit sich selbst nicht auf 1 normiert sind. (Siehe: Tilman Butz, *Fouriertransformation für Fußgänger – Studium*, 7. Auflage, Vieweg&Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011, Seite 6 und Seite 7.)

Abb. 4.1 Geometrische Veranschaulichung des mathematischen Sachverhalts, dass die jeweils zueinander gehörenden Fourier-Koeffizienten a_n und b_n orthogonal aufeinander stehen.



Mit dem Additionstheorem

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad \longrightarrow \\ \sin(\varphi_n + n\varphi) &= \sin \varphi_n \cdot \cos(n\varphi) + \cos \varphi_n \cdot \sin(n\varphi) \end{aligned}$$

lassen sich die zueinander gehörenden Glieder $a_n \cos(n\varphi)$ und $b_n \sin(n\varphi)$ der Fourier-Reihe (4.2) wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} A_n \cdot \sin(\varphi_n + n\varphi) &= A_n \cdot \left[\sin \varphi_n \cdot \cos(n\varphi) + \cos \varphi_n \cdot \sin(n\varphi) \right] \Rightarrow \\ A_n \cdot \sin(n\varphi + \varphi_n) &= \underbrace{A_n \cdot \sin \varphi_n}_{=a_n} \cdot \cos(n\varphi) + \underbrace{A_n \cdot \cos \varphi_n}_{=b_n} \cdot \sin(n\varphi) . \quad \square \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe erhält damit und mit $a_0 = A_0$ die Gestalt (4.3), nämlich

$$f(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\varphi + \varphi_n)$$

mit (siehe Abbildung 4.1)

$$\boxed{\varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}} \quad \text{wegen} \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{A_n \sin \varphi_n}{A_n \cos \varphi_n} = \tan \varphi_n = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (4.17)$$

und mit

$$\boxed{A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \text{wegen} \quad \sqrt{A_n^2 \sin^2 \varphi_n + A_n^2 \cos^2 \varphi_n} = \sqrt{A_n^2 \underbrace{(\sin^2 \varphi_n + \cos^2 \varphi_n)}_{=1}}$$

4.2 Die komplexe Form der Fourier-Reihe

Wenn wir in der allgemeinen reellen Form (4.1) der Fourier-Reihe die aus den Euler'schen Formeln hervorgehenden Beziehungen

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \right), \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i} \left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \right)$$

verwenden, erhalten wir die komplexe Form der Fourier-Reihe wie folgt:

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\varphi) + b_n \cdot \sin(n\varphi) \right], \quad n \in \mathbb{N} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{1}{2} \left(e^{in\varphi} + e^{-in\varphi} \right) + b_n \cdot \frac{1}{2i} \left(e^{in\varphi} - e^{-in\varphi} \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} e^{in\varphi} + \frac{a_n}{2} e^{-in\varphi} - \frac{ib_n}{2} e^{in\varphi} + \frac{ib_n}{2} e^{-in\varphi} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\varphi} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Für die komplexen Fourier-Koeffizienten schreiben wir im Folgenden \underline{c}_n . Aus (4.18) erhalten wir für $n = 0 \Rightarrow b_0 = 0$ das Reihenglied

$$\underline{c}_0 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{2} = a_0 \in \mathbb{R}. \quad (4.19)$$

Ziehen wir das Reihenglied \underline{c}_0 aus dem Summationsterm in (4.18) heraus, können wir für (4.18)

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\varphi} \right] + \underline{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\varphi} \right]$$

schreiben. Daraus folgt wegen

$$(4.15) \text{ mit } \cos(-n\varphi) = \cos(n\varphi) \Rightarrow a_{-n} = a_n,$$

$$(4.16) \text{ mit } \sin(-n\varphi) = -\sin(n\varphi) \Rightarrow b_{-n} = -b_n$$

bei Berücksichtigung auch negativer n

$$f(\varphi) = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\varphi} \right] + \underline{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\varphi} \right]. \quad (4.20)$$

Mit

$$\begin{aligned} \underline{c}_0 &= a_0 \quad \text{für } n = 0, \\ \underline{c}_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{für } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

können wir die rechte Seite von (4.20) zusammenfassen zur komplexen Form der Fourier-Reihe

$$f(\varphi) = \sum_{n, -\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}, \quad c_n \in \mathbb{C}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.22)$$

Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten

Bei der Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten c_n gehen wir aus von

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n).$$

Einsetzen von (4.15) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi$ und (4.16) $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi$ liefert

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi - i \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) [\cos(n\varphi) - i \sin(n\varphi)] d\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \Rightarrow \quad (4.23) \\ c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi \stackrel{(4.7)}{=} a_0. \end{aligned}$$

Vollständig ausgeschrieben ist die komplexe Form der Fourier-Reihe der 2π -periodischen Funktion $f(\varphi)$

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n, -\infty}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi \right) e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Wichtiger Hinweis!

Man gewinnt den Fourier-Koeffizienten $c_0 = a_0$ direkt aus der Formel (4.23), also aus der Formel zur Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten c_n . Dies ist bei der reellen Form der Fourier-Reihe anders. Ermittelte man dort a_0 aus der Formel (4.15), also aus der Formel zur Berechnung der a_n , würde

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) \, d\varphi = \tilde{a}_0 = 2a_0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2} \tilde{a}_0$$

resultieren. Tatsächlich wird der Faktor $\frac{1}{2}$ vor \tilde{a}_0 in der Physik aber auch in der Mathematik verwendet, um eine einheitliche Darstellung der a_n zu ermöglichen. Nach Umbenennung von \tilde{a}_0 in a_0 wird dann die reelle Form der Fourier-Reihe nicht durch (4.2) sondern durch

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \right], & n = 1, 2, 3, 4, \dots, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) \, d\varphi, & n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) \, d\varphi, & n = 1, 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

definiert.³

³Siehe auch:

Graham Woan, *The Cambridge Handbook of Physics Formulas*, 2003 Edition, Cambridge University Press, Cambridge (UK), New York, ..., Seite 52.

I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, 4. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun, 1999, Seite 415.

4.3 Gewinnung der reellen aus der komplexen Form der Fourier-Reihe

Um die Funktion $f(\varphi)$ als reelle Fourier-Reihe darzustellen, benötigen wir nur die Fourier-Koeffizienten a_0 , a_n und evtl. A_n sowie evtl. die Phasen φ_n . Diese lassen sich aus der komplexen Form der Fourier-Reihe gewinnen. Dabei gehen wir aus von (4.19) und (4.21):

$$\boxed{a_0 = \underline{c}_0},$$

$$\underline{c}_n = \frac{a_n}{2} - i \frac{b_n}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} \underline{c}_n = \frac{a_n}{2}, \quad \operatorname{Im} \underline{c}_n = -\frac{b_n}{2} \Leftrightarrow$$

$$a_n = 2 \cdot \operatorname{Re} \underline{c}_n = \underline{c}_n + \underline{c}_{-n}, \quad b_n = -2 \cdot \operatorname{Im} \underline{c}_n = i(\underline{c}_n - \underline{c}_{-n}).$$

Weiterhin gilt

$$|\underline{c}_n| = \sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b_n}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \Leftrightarrow$$

$$\boxed{A_n = 2 \cdot |\underline{c}_n|}.$$

Und mit

$$\frac{a_n}{b_n} \stackrel{(4.17)}{=} \tan \varphi_n, \quad -\cot \alpha = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

folgt aus

$$\underline{c}_n = |\underline{c}_n| \cdot e^{i\varphi_{cn}}$$

schließlich

$$\tan \varphi_{cn} = \frac{-\frac{b_n}{2}}{\frac{a_n}{2}} = -\frac{b_n}{a_n} \Rightarrow \tan \varphi_n = -\frac{1}{\tan \varphi_{cn}} = -\cot \varphi_{cn} = \tan\left(\varphi_{cn} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi_n = \varphi_{cn} + \frac{\pi}{2}},$$

$$\boxed{a_n = 2 \operatorname{Re} \underline{c}_n = 2 |\underline{c}_n| \cdot \cos \varphi_{cn}, \quad b_n = -2 \operatorname{Im} \underline{c}_n = -2 |\underline{c}_n| \cdot \sin \varphi_{cn}}.$$

4.4 Zur Periodizität

Im Fall der 2π -periodischen Funktion $f(\varphi)$ lässt sich φ als Winkel identifizieren und veranschaulichen. In der Physik sind aber oft periodische Funktionen von Bedeutung, die vom Ort x oder von der Zeit t abhängen. Die Ortsperiode ist dann die **Wellenlänge** λ und die Zeitperiode ist die **Periodendauer** oder kurz Periode T .

- $f(\varphi)$: 2π -periodisch mit Winkel φ .

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)], \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

$$f(\varphi) = \sum_{n, -\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \underline{c}_n \in \mathbb{C},$$

$$\underline{c}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

- $f(x)$: λ -periodisch mit Periodizität im Ortsraum gemäß $k \cdot \lambda = 2\pi$,

$$\frac{\lambda}{x} = \frac{2\pi}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = k \cdot x, \quad \text{Wellenzahl } k.$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nkx) + b_n \sin(nkx)], \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \sum_{n, -\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{inkx}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \underline{c}_n \in \mathbb{C},$$

$$\underline{c}_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} f(x) e^{-inkx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

- $f(t)$: T -periodisch mit Periodizität in der Zeit gemäß $\omega \cdot T = 2\pi$,

$$\frac{T}{t} = \frac{2\pi}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot t = \omega \cdot t, \quad \text{Kreisfrequenz } \omega = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \cdot \nu$$

mit der Frequenz ν .

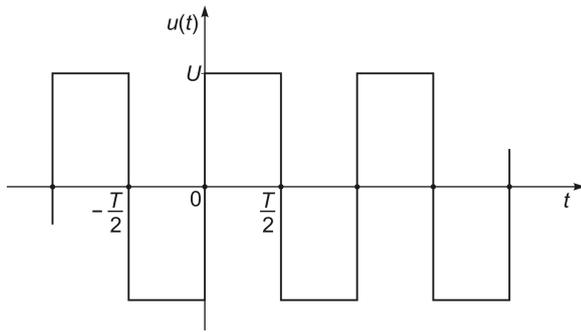
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)], \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}. \quad (4.24)$$

$$f(t) = \sum_{n, -\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{in\omega t}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \underline{c}_n \in \mathbb{C}, \quad (4.25)$$

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.26)$$

4.5 Beispiel: Fourier-Reihe der periodischen Rechteckfunktion

Abb. 4.2 T -periodische Rechteckfunktion $u(t)$ mit konstanter Amplitude U .



Zunächst stellen wir die T -periodische ungerade Rechteckfunktion

$$u(t) = \begin{cases} -U & \text{für } -\frac{T}{2} \leq t \leq 0, \\ U & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

(siehe Abbildung 4.2) durch die komplexe Fourier-Reihe dar. Ausgehend von (4.26) und unter Berücksichtigung von

$$n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad n_{\text{gerade}} = 2k, \quad n_{\text{ungerade}} = 2k + 1, \quad \omega T = 2\pi, \quad \omega \frac{T}{2} = \pi$$

erhalten wir die komplexen Fourier-Koeffizienten wie folgt:

$$\begin{aligned} \underline{c}_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-U) e^{-in\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U e^{-in\omega t} dt \\ &= \left(-\frac{U}{T} \right) \left(-\frac{1}{in\omega} \right) e^{-in\omega t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{U}{T} \left(-\frac{1}{in\omega} \right) e^{-in\omega t} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{U}{in\omega T} \left(1 - e^{in\omega \frac{T}{2}} \right) - \frac{U}{in\omega T} \left(e^{-in\omega \frac{T}{2}} - 1 \right), \\ \underline{c}_n &= \frac{U}{in2\pi} \left(2 - e^{in\pi} - e^{-in\pi} \right). \end{aligned}$$

Die Anwendung der Regel von de L'Hospital liefert

$$\begin{aligned} \underline{c}_0 &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{U}{in2\pi} \left(2 - e^{in\pi} - e^{-in\pi} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dn} \left[U \left(2 - e^{in\pi} - e^{-in\pi} \right) \right]}{\frac{d}{dn} [in2\pi]} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{U i\pi \left(-e^{in\pi} + e^{-in\pi} \right)}{i2\pi}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Gleichglied } \underline{c}_0 = 0}.$$

Für $n_{\text{gerade}} = 2k$ gilt wegen $e^{in\pi} = e^{i2k\pi} = e^{-in\pi} = e^{-i2k\pi} = 1$:

$$\boxed{n_{\text{gerade}} \Rightarrow c_n = 0} .$$

Für $n_{\text{ungerade}} = 2k + 1$ gilt wegen $e^{in\pi} = e^{i(2k+1)\pi} = e^{-in\pi} = e^{-i(2k+1)\pi} = -1$ und mit $\frac{1}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$:

$$c_n = \frac{U}{in2\pi} (2 - e^{in\pi} - e^{-in\pi}) = \frac{U}{in2\pi} (2 - (-1) - (-1)) = \frac{4U}{2n\pi} (-i) ,$$

$$\boxed{n_{\text{ungerade}} = 2k + 1 \Rightarrow c_n = \left(-\frac{2U}{n\pi}\right) i = \frac{2U}{(2k+1)\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}} .}$$

Gemäß (4.25) lässt sich damit jetzt die periodische Rechteckfunktion durch die komplexe Fourier-Reihe

$$u(t) = \sum_{n, -\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{in\omega t} = \sum_{k, -\infty}^{\infty} \frac{2U}{(2k+1)\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i(2k+1)\omega t} ,$$

$$\boxed{u(t) = \sum_{k, -\infty}^{\infty} \frac{2U}{(2k+1)\pi} e^{i(2k+1)\omega t - \frac{\pi}{2}} , \quad k \in \mathbb{Z}}$$

darstellen.

Jetzt können wir übergehen von der komplexen zu den reellen Darstellungen (4.2) und (4.3) der Fourier-Reihe unter Berücksichtigung von $\varphi = \omega t$. Dabei erinnern wir uns, dass die Fourier-Koeffizienten a_n im Fall ungerader Funktionen $f(\varphi)$ bzw. $u(t)$ verschwinden. Stellen wir also unsere periodische Rechteckfunktion zunächst in der zu (4.2) analogen Form

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

dar:

$$A_0 = a_0 = c_0 \Rightarrow a_0 = 0 ,$$

$$a_n = 2 \operatorname{Re} c_n \Rightarrow a_n = 0 ,$$

$$n_{\text{ungerade}} = 2k + 1 \Rightarrow b_n = -2 \operatorname{Im} c_n \Rightarrow b_n = -2 \left(-\frac{2U}{n\pi}\right) = \frac{4U}{(2k+1)\pi} ,$$

$$\boxed{u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4U}{(2k+1)\pi} \sin[(2k+1)\omega t] = \frac{4U}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\omega t]}{2k+1} , \quad k \in \mathbb{N}_0 .}$$

Schließlich stellen wir unsere periodische Rechteckfunktion analog zu (4.3), also in der Form

$$u(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

dar:

$$\begin{aligned} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} &\Rightarrow & A_n = b_n = \frac{4U}{(2k+1)\pi}, \\ \tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n} &\Rightarrow & \tan \varphi_n = 0 \Rightarrow \varphi_n = 0, \end{aligned}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad n_{\text{ungerade}} = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\omega t]}{2k+1} .$$

(4.27)

Wegen $a_n = 0$ sind die beiden reellen und zu (4.2) und (4.3) analogen Darstellungsformen der Fourier-Reihe identisch.

4.6 Spektrale Darstellung von Fourier-Reihen

Im Gegensatz zur Fourier-Transformation liefern Fourier-Reihen keine kontinuierlichen Spektren sondern **Linienpektren**. Es ergeben sich zwei spektrale Darstellungsmöglichkeiten von Fourier-Reihen der Form (4.3) z. B. für eine T -periodische Funktion

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \cdot \omega t + \varphi_n) .$$

1. **Fourier-Spektrum** oder **Amplitudenspektrum**: Darstellung der **Fourier-Amplituden** A_n auf der Skala der **Fourier-Frequenzen** oder kurz auf der Frequenzskala $n \cdot \omega$. Es resultiert das Frequenz-Amplituden-Diagramm. Die Fourier-Amplituden repräsentieren die Frequenzanteile, d. h. sie geben an, wie stark die einzelnen Fourier-Frequenzen in der Funktion $f(t)$ vertreten sind.
2. **Phasenspektrum**: Darstellung der **Phasen** φ_n auf der Frequenzskala $n \cdot \omega$.

Hier ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die **Grundfrequenz** oder genauer gesagt die Grundkreisfrequenz⁴ in der Frequenzskala $n \cdot \omega$ der Darstellung einer Funktion $f(t)$ als Fourier-Reihe, wobei T die Periodendauer von $f(t)$ ist. Die Fourier-Frequenzen sind folglich ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz. Beschreibt $f(t)$ einen Schwingungsvorgang, so gilt

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow A_1 \sin(1 \cdot \omega t + \varphi_1) \quad \text{erste Harmonische bzw.} \quad \text{Grundschiwingung} , \\ n = 2 &\Rightarrow A_2 \sin(2 \cdot \omega t + \varphi_2) \quad \text{zweite Harmonische bzw.} \quad \text{erste Oberschiwingung} , \\ n = 3 &\Rightarrow A_3 \sin(3 \cdot \omega t + \varphi_3) \quad \text{dritte Harmonische bzw.} \quad \text{zweite Oberschiwingung} . \end{aligned}$$

- **Fourier-Analyse**:
Ermittlung des Amplituden- und Phasenspektrums aus der Funktion $f(t)$.
- **Fourier-Synthese**:
Ermittlung der Funktion $f(t)$ aus dem Amplituden- und dem Phasenspektrum.
- A_0 heißt **Gleichanteil** und die Summe der Harmonischen heißt **Wechselgröße**.

⁴Wenn es der Kontext erfordert, wird die Grundkreisfrequenz auch mit ω_0 bezeichnet.

Beispiel aus der Physik bzw. aus der E-Technik

Als einfaches Beispiel wählen wir die spektrale Darstellung der Fourier-Reihe (4.27) der periodischen Rechteckfunktion $u(t)$ einer elektrischen Wechselspannung mit konstanter Amplitude $U = \frac{\pi}{4} \text{ V}$ und der Grundkreisfrequenz $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$. Die Gleichung (4.27) erhält damit die Gestalt

$$u(t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin(n\omega \cdot t) \text{ V} .$$

Weil $\varphi_n \equiv 0$ ist, entfällt das Phasenspektrum. Es verbleibt also lediglich das Amplitudenspektrum mit

$$A_0 = 0 \text{ V}, A_1 = 1 \text{ V}, A_2 = \frac{1}{3} \text{ V}, A_3 = \frac{1}{5} \text{ V}, A_4 = \frac{1}{7} \text{ V}, A_5 = \frac{1}{9} \text{ V}, A_6 = \frac{1}{11} \text{ V}, \dots$$

und dem zugehörigen Frequenz-Amplituden-Diagramm gemäß der Abbildung 4.3 .

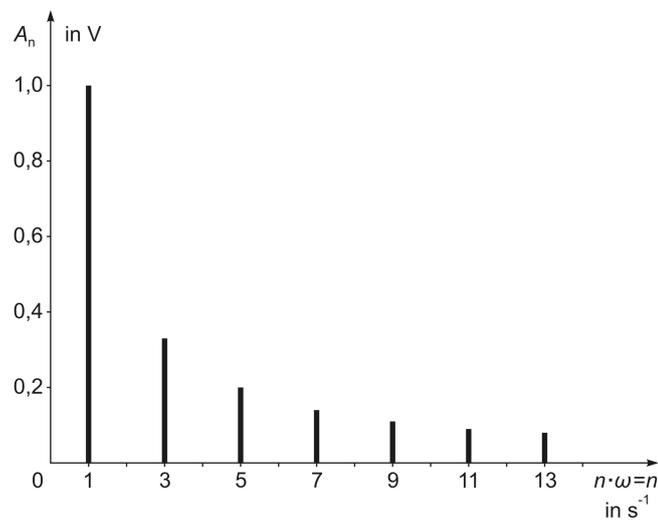


Abb. 4.3 Amplitudenspektrum der Fouriertransformation einer rechteckförmigen Wechselspannung mit konstanter Amplitude $U = 1 \text{ V}$ und der Grundkreisfrequenz $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$. Die Kreisfrequenz $\omega = 1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ entspricht der Frequenz $\nu = \frac{1}{2\pi} \text{ s}^{-1} \approx 0,16 \text{ Hz}$.

5 Was ist die Fourier-Transformation?

Die **kontinuierliche Fourier-Transformation** ist eine Integraltransformation, durch die **aperiodische Funktionen** in **kontinuierliche Spektren** „zerlegt“ werden. Im Gegensatz dazu werden periodische Funktionen in Fourier-Reihen mit daraus resultierenden Linienspektren entwickelt. Üblicherweise spricht man salopp nur von Fourier-Transformation, auch wenn die kontinuierliche Fourier-Transformation gemeint ist.

Während die Fourier-Reihenentwicklung in demselben Raum erfolgt, beispielsweise ist die Fourier-Reihe einer Zeitfunktion ebenfalls eine Funktion der Zeit, bewirkt die Fourier-Transformation den Wechsel in einen dualen Raum, beispielsweise vom Realraum in den reziproken Raum oder speziell vom Zeitbereich in den Frequenzbereich.

5.1 Herleitung der Fourier-Integraldarstellung

Wir werden in diesem Abschnitt die Grundgleichungen der kontinuierlichen Fourier-Transformation aus der komplexen Form (4.22) der Fourier-Reihen für zeitabhängige Funktionen $f(t)$ herleiten und beginnen mit einem Zitat¹:

„Es ist einleuchtend, daß man einen einmaligen Vorgang, z. B. einen Rechteckimpuls o. ä., als Grenzwert einer periodischen Funktion darstellen kann, indem man den einmaligen Vorgang als die erste Periode eines periodischen Vorganges mit unendlicher Schwingungsdauer auffaßt. Die Grundkreisfrequenz geht damit gegen Null, so daß aus dem Linienspektrum der kontinuierlichen Funktion durch Zusammenrücken der Spektrallinien ein kontinuierliches Spektrum wird. Führt man diesen Übergang durch, so wird: $T \rightarrow \infty, \dots$ “

Betrachten wir also im Folgenden den Grenzübergang von der komplexen Fourier-**Reihe** zum Fourier-**Integral**. Dabei gehen wir aus von der T -periodischen komplexen Fourier-Reihe (4.25)

$$f(t) = \sum_{n, -\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad c_n \in \mathbb{C}, \quad \text{Grundkreisfrequenz } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

mit den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Die Diskretisierung bzw. „Feinheit der Unterteilung“ in der komplexen Fourier-Reihe wird wegen

$$\omega = n \cdot \omega_0 = n \cdot \frac{2\pi}{T}$$

bestimmt durch T gemäß

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}.$$

¹Autorengemeinschaft: Paul Matussek ..., *Lehr- und Übungsbuch Mathematik*, Band V, Fachbuchverlag Leipzig – Köln, 1992, Seite 242.

Für

$$T \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega \rightarrow 0$$

geht folglich die Fourier-Reihe über in ein Kontinuum. Für die Schreibweise bedeutet das kurz zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \text{diskret} & \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\Delta\omega \rightarrow 0} \text{kontinuierlich} , \\ n \cdot \omega_0 & \longrightarrow \omega , \\ \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} & \longrightarrow \frac{d\omega}{2\pi} . \end{aligned}$$

Für die Integrationsgrenzen von $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dots dt$ gilt

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \dots dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots dt .$$

Für die Summengrenzen von $\sum_{n,-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} = \sum_{n,-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{in\omega_0 t} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$ gilt

wegen $n = n(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0} :$

$$n \rightarrow \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \omega \rightarrow \pm\infty .$$

Daraus folgt

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n,-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \dots = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{\omega,-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \dots = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \dots .$$

Damit und mit

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \xrightarrow[\frac{1}{T} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi}]{n\omega_0 \rightarrow \omega} \frac{d\omega}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{d\omega}{2\pi} \cdot F(\omega)$$

erhalten wir schließlich die Fourier-Integraldarstellung von $f(t)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n,-\infty}^{\infty} [c_n] \cdot e^{in\omega_0 t} = \sum_{n,-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] \cdot e^{in\omega_0 t} \\ &\xrightarrow[T \rightarrow \infty, \Delta\omega \rightarrow 0]{n\omega_0 \rightarrow \omega} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d\omega}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] \cdot e^{i\omega t} , \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right\} \cdot e^{i\omega t} d\omega .$$

Unsere Nomenklatur²

- $f(t)$ **Originalfunktion**,
Fourier-Rücktransformierte bzw. inverse Fourier-Transformierte von $F(\omega)$.
- $F(\omega)$ Bildfunktion, Fourier-Transformierte von $f(t)$, **Spektralfunktion**.
- **Hintransformation**, symbolisch FT, Fourier-Transformation von $f(t)$

$$\boxed{\text{FT}\{f(t)\} \Rightarrow F(\omega) := \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt}_{\text{Fourier-Integral}}} . \quad (5.1)$$

- **Rücktransformation**, symbolisch FT^{-1} , inverse Fourier-Transformation von $F(\omega)$

$$\boxed{\text{FT}^{-1}\{F(\omega)\} \Rightarrow f(t) := \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{+i\omega t} d\omega}_{\text{Fourier-Umkehrintegral}}} . \quad (5.2)$$

- Umkehroperationen: $\text{FT}\{f(t)\} = F(\omega) \iff \text{FT}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t)$.

Anmerkung zum Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$

Die Formeln für Hin- und Rücktransformation sind zueinander nicht symmetrisch:

Hintransformation: Minuszeichen im Exponenten,

Rücktransformation: Pluszeichen im Exponenten, Faktor $\frac{1}{2\pi}$ vor dem Integral.

„Diese Asymmetrie der Formeln hat manche Wissenschaftler dazu verleitet, andere Definitionen einzuführen, beispielsweise einen Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ sowohl vor die Hin- als auch vor die Rücktransformation zu schreiben. Dies ist nicht gut, da die Definition des Mittelwertes $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ davon in Mitleidenschaft gezogen werden würde. Korrekt, aber nicht weit verbreitet ist die Nomenklatur von Weaver:

$$\begin{aligned} \text{Hintransformation: } F(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt , \\ \text{Rücktransformation: } f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu , \end{aligned}$$

Weaver verwendet also nicht die Kreisfrequenz ω , sondern die Frequenz ν . Damit sind die Formeln tatsächlich symmetrisiert worden, allerdings handelt man sich viele Faktoren 2π im Exponenten ein.“³
Zwei derartige symmetrische Formen der Fourier-Transformation wären beispielsweise

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt &\iff f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \quad \text{mit Frequenz } \nu = \frac{1}{T} \Rightarrow 2\pi\nu = \omega , \\ \tilde{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx &\iff f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\xi) e^{i2\pi\xi x} d\xi \quad \text{mit Ortsfrequenz } \xi = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow 2\pi\xi = k . \end{aligned}$$

Es ist also Konvention bzw. eine Frage der Definition, ob man den Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ oder den Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$ verwendet und ob man den Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$ der Fourier-Hin- oder der Fourier-Rücktransformation zuordnet. Wir verwenden die Fourier-Transformation in der mit (5.1) und (5.2) definierten Form.

²Statt $\text{FT}\{f(t)\} \Rightarrow F(\omega) \iff \text{FT}^{-1}\{F(\omega)\} \Rightarrow f(t)$ schreibt man üblicherweise kurz

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) \iff \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](t) .$$

³Zitiert aus: Tilman Butz, *Fouriertransformation für Fußgänger – Studium*, 7. Auflage, Vieweg & Teubner Verlag, Wiesbaden, 2011, Seite 35 und Seite 36.

Forderungen an $f(t)$ für die Durchführbarkeit der Fourier-Transformation⁴

- Die Funktion $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ muss absolut integrierbar sein gemäß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty .$$

- $f(t)$ muss stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar sein.
- Existierende Sprungstellen dürfen keine Polstellen sein. Das heißt, dass für jede Sprungstelle x_n der beiderseitige Grenzwert existieren muss gemäß

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_n \\ t < t_n}} f(t) = f(t_n - 0) , \quad \lim_{\substack{t \rightarrow t_n \\ t > t_n}} f(t) = f(t_n + 0) .$$

- An den Sprungstellen $t = t_n$ einer nichtstetigen Funktion $f(t)$ liefert die zugehörige inverse Fourier-Transformation das Mittel aus dem linksseitigen und dem rechtsseitigen Funktionswert der Stelle t_n :

$$f(t_n) = \frac{f(t_n - 0) + f(t_n + 0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t_n} d\omega .$$

Analogien zwischen Fourier-Reihe und Fourier-Transformation

$$\bullet \quad f(\varphi) \mapsto \underline{c}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cdot e^{-in\varphi} d\varphi \quad \hat{=} \quad f(t) \mapsto F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Die komplexen Fourier-Koeffizienten \underline{c}_n entsprechen der Fourier-Transformierten $F(\omega)$ (**Hintransformation**).

$$\bullet \quad \underline{c}_n \mapsto f(\varphi) = \sum_{n, -\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{in\varphi} \quad \hat{=} \quad F(\omega) \mapsto f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

Die Originalfunktion $f(\varphi)$ entspricht der Fourier-Rücktransformierten (Originalfunktion) $f(t)$ (**Rücktransformation**).

⁴Wie für Fourier-Reihen gelten die Dirichlet'schen Bedingungen (siehe Abschnitt 4.1) auch für die Fourier-Transformation.

Zum Sprachgebrauch

x, \vec{r}	Ort, Ortsvektor,	t	Zeit,
λ	Wellenlänge, räumliche Periode,	T	(zeitliche) Periode,
$\xi = \frac{1}{\lambda}$	Ortsfrequenz, Raumfrequenz,	$\nu = \frac{1}{T}$	Frequenz,
$k = 2\pi\xi = \frac{2\pi}{\lambda}$	(Kreis-)Wellenzahl,	$\omega = 2\pi\nu$	Kreisfrequenz.

Der Wellenvektor \vec{k} mit $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ zeigt in die Bewegungsrichtung einer Welle. Für die Fourier-Transformation FT und die zugehörige Rücktransformation FT⁻¹ gilt:

direkter Raum	$\xleftrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}}$	dualer Raum
Ortsraum (x, \vec{r})	$\xleftrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}}$	Ortsfrequenzraum oder k -Raum (ξ, k)
Zeitbereich (t)	$\xleftrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}}$	(Kreis-)Frequenzbereich (ν, ω)
Kristallographie: Realraum (x, \vec{r})	$\xleftrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}}$	reziproker Raum oder k -Raum (k, \vec{k}) .

Graphische Darstellung der Fourier-Transformierten

Die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ einer komplexwertigen Funktion $f(t)$ ist selbst im Allgemeinen komplexwertig, sodass mit der Phase (dem Phasenwinkel oder dem Argument) $\varphi(\omega)$ folgendes gilt:

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} = \text{Re}\{F(\omega)\} + i \cdot \text{Im}\{F(\omega)\},$$

$$\text{Re}\{F(\omega)\} = |F(\omega)| \cdot \cos[\varphi(\omega)],$$

$$\text{Im}\{F(\omega)\} = |F(\omega)| \cdot \sin[\varphi(\omega)].$$

In diesem Fall ergeben sich zwei Möglichkeiten der graphischen Darstellung von $F(\omega)$:

- **Komponentendarstellung,**

d. h. Darstellung durch die Komponenten $\text{Re}\{F(\omega)\}$ und $\text{Im}\{F(\omega)\}$ in der komplexen Zahlenebene.

- **Polardarstellung,**

d. h. Darstellung durch den Betrag $|F(\omega)|$ und die Phase $\varphi(\omega)$.

In der graphischen Darstellung heißen und liefern:

$$F(\omega) = \text{Re}\{F(\omega)\} + i \text{Im}\{F(\omega)\} \quad : \quad \textbf{Frequenzspektrum (Spektrum) von } f(t),$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2\{F(\omega)\} + \text{Im}^2\{F(\omega)\}} \quad : \quad \textbf{Amplitudenspektrum von } f(t),$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}\{F(\omega)\}}{\text{Re}\{F(\omega)\}} \quad : \quad \textbf{Phasenspektrum von } f(t).$$

5.2 Satz von Plancherel (Plancherel-Identität)

Der Satz von Plancherel wird auch Rayleigh-Theorem und manchmal auch Parseval'sches Theorem genannt, obwohl sich das Parseval'sche Theorem auf Fourier-Reihen bezieht. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Plancherel ist das **Power-Theorem** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) G^*(k) dk$.

Ausgehend von

$$F(k) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx}_{\text{Hintransformation}}, \quad f(x) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk}_{\text{Rücktransformation}}$$

und mit den Betragsquadraten $|f(x)|^2 = f^*(x) \cdot f(x)$ sowie $|F(k)|^2 = F^*(k) \cdot F(k)$ leiten wir den

Satz von Plancherel $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk$

her :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^*(k) F(k) dk = \int_{k, -\infty}^{\infty} \left[\int_{x, -\infty}^{\infty} f^*(x) e^{ikx} dx \right] F(k) dk$$

Vertauschung der Reihenfolge der Integration

$$= \int_{x, -\infty}^{\infty} f^*(x) \underbrace{\left[\int_{k, -\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \right]}_{= 2\pi f(x)} dx$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) f(x) dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(k) F(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) f(x) dx \quad \square$$

In der Physik ist es bezüglich des Vorfaktors $\frac{1}{2\pi}$ üblich, die folgende Form der Fourier-Transformation zu verwenden:

$$F(k) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx}_{\text{Hintransformation}}, \quad f(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk}_{\text{Rücktransformation}}.$$

Das hat zur Folge, dass beim Satz von Plancherel der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ vor dem Integral nicht auftritt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^*(k) F(k) dk = \int_{k, -\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x, -\infty}^{\infty} f^*(x) e^{ikx} dx \right] F(k) dk$$

$$= \int_{x, -\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f^*(x) \underbrace{\left[\int_{k, -\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \right]}_{= \sqrt{2\pi} \cdot f(x)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f^*(x) \cdot \sqrt{2\pi} f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^*(k) F(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) f(x) dx \quad \square$$

5.3 Eigenschaften der Fourier-Transformation – Rechenregeln

Eine Tabelle mit den Rechenregeln für die Fourier-Transformation kann heruntergeladen werden von:

Franz Embacher, *Fouriertransformation: Einführung*, mathe online Skripten, Fakultät für Mathematik der Universität Wien, 2018, Kapitel 10 Anhang: *Tabelle der Rechenregeln*, Seite 40,
https://www.mathe-online.at/skripten/techn_fourier/techn_fouriertransformation_einfuehrung.pdf

Die Funktionen von t seien die Originalfunktionen und die Funktionen von ω seien die zugehörigen Fourier-Transformierten, wobei alle diese Funktionen auch komplexwertig sein dürfen.

1. Linearitätstheorem mit $c \in \mathbb{C}$

$\begin{array}{l} \text{Summe :} \quad f(t) + g(t) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad F(\omega) + G(\omega) , \\ \\ \text{Vielfaches :} \quad c \cdot f(t) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad c \cdot F(\omega) . \end{array}$
--

Die Linearität folgt unmittelbar aus der Linearität der Linearkombinationen in Form von Summe $f + g$ und in Form des Vielfachen $c \cdot f$ bei der Integration.

2. Shift-Theorem oder Verschiebungssatz mit $a \in \mathbb{R}$

$\begin{array}{l} f(t - a) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad e^{-ia\omega} F(\omega) , \\ \\ e^{iat} f(t) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad F(\omega - a) . \end{array}$
--

$$f(t - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-a)} F(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \underbrace{e^{-ia\omega} F(\omega)}_{F(\omega - a)} d\omega ,$$

$$F(\omega - a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-a)t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \underbrace{e^{iat} f(t)}_{f(t)} dt .$$

3. Skalierungstheorem oder Ähnlichkeitssatz mit $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

$\begin{array}{l} f(bt) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad \frac{1}{ b } F\left(\frac{1}{b}\omega\right) , \\ \\ \frac{1}{ b } f\left(\frac{1}{b}t\right) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad F(b\omega) , \\ \\ b = -1 \text{ (Spiegelung) :} \quad f(-t) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad F(-\omega) . \end{array}$

Die Spreizung von f (im direkten Raum) bewirkt eine Stauchung von F (im dualen Raum) und umgekehrt.

Mit der Substitution $t = \frac{1}{b} \tau \Rightarrow dt = \frac{1}{b} d\tau$ erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(bt) dt = \frac{1}{|b|} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{1}{b} \tau} f(\tau) d\tau}_{= F(\frac{1}{b} \omega)} = \frac{1}{|b|} F(\frac{1}{b} \omega) .$$

Mit der Substitution $\omega = \frac{1}{b} z \Rightarrow d\omega = \frac{1}{b} dz$ erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(b\omega) d\omega = \frac{1}{|b|} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz \frac{1}{b} t} F(z) dz}_{= f(\frac{1}{b} t)} = \frac{1}{|b|} f(\frac{1}{b} t) .$$

4. Fourier-Transformation von komplex konjugierten Funktionen

$\overline{f(t)} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \overline{F(-\omega)} ,$
$\overline{f(-t)} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \overline{F(\omega)} .$

$$\text{FT}\{\overline{f(t)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \overline{f(t)} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\omega t} f(t) dt} = \overline{F(-\omega)} ,$$

$$\text{FT}\{\overline{f(-t)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(-t)} \overline{f(-t)} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(-t) dt} = \overline{F(\omega)} .$$

$$f \in \mathbb{R} \Rightarrow F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i(-\omega)t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt} = \overline{F(\omega)} .$$

Wir leiten $\text{FT}\{f(bt \pm a)\}$ für die 2. und 3. Rechenregel kombiniert her. Dabei gehen wir aus von der

$$\text{Originalfunktion } f = f(bt \pm a), \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$$

sowie der zugehörigen

$$\text{Fourier-Transformation } \text{FT}\{f(bt \pm a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(bt \pm a) dt$$

und verwenden die

$$\text{Substitution } bt \pm a = \tau \Leftrightarrow t = \frac{1}{b}(\tau \mp a) \Rightarrow dt = \frac{1}{b} d\tau.$$

$$\text{Fall } b > 0 : \left. \begin{array}{l} t \rightarrow +\infty \Rightarrow \tau \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \Rightarrow \tau \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{FT}\{f(\tau)\} &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{1}{b}(\tau \mp a)} f(\tau) \cdot \frac{1}{b} d\tau && \left| e^{-i\omega \frac{1}{b}(\tau \mp a)} = e^{-i\omega \frac{1}{b}\tau} \cdot e^{\pm i\omega \frac{1}{b}a} \right. \\ &= \frac{1}{b} e^{\pm i\omega \frac{1}{b}a} \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{1}{b}\tau} f(\tau) d\tau}_{= F(\frac{\omega}{b})}. \end{aligned}$$

Wegen $\int_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{1}{b}\tau} f(\tau) d\tau = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{1}{b}t} f(t) dt$ dürfen wir an dem durch die Klammer gekennzeichneten Integral die Umbenennung $\tau \rightarrow t$ vornehmen und erhalten

$$\text{FT}\{f(bt \pm a)\} = \frac{1}{|b|} e^{\pm i\omega \frac{1}{b}a} \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{1}{b}t} f(t) dt = \frac{1}{|b|} e^{\pm i\omega \frac{1}{b}a} \cdot F\left(\frac{\omega}{b}\right).$$

$$\text{Fall } b < 0 : \left. \begin{array}{l} t \rightarrow +\infty \Rightarrow \tau \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow -\infty \Rightarrow \tau \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ analog zum Fall } b > 0$$

$$\text{FT}\{f(\tau)\} = \int_{\tau=-\infty}^{-\infty} e^{-i\omega \frac{1}{b}(\tau \mp a)} f(\tau) \cdot \frac{1}{b} d\tau = -\frac{1}{b} e^{\pm i\omega \frac{1}{b}a} \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{1}{b}\tau} f(\tau) d\tau}_{= F(\frac{\omega}{b})},$$

$$\text{FT}\{f(bt \pm a)\} = \frac{1}{|b|} e^{\pm i\omega \frac{1}{b}a} \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \frac{1}{b}t} f(t) dt = \frac{1}{|b|} e^{\pm i\omega \frac{1}{b}a} \cdot F\left(\frac{\omega}{b}\right).$$

Achtung! $f(bt + a) \Rightarrow e^{+i\omega \frac{1}{b}a}$, $f(bt - a) \Rightarrow e^{-i\omega \frac{1}{b}a}$.

Mit $b = 1$ folgt die 2. Regel: $\text{FT}\{f(t \pm a)\} = e^{\pm i a \omega} F(\omega)$. \square

Mit $a = 0$ folgt die 3. Regel: $\text{FT}\{f(bt)\} = \frac{1}{|b|} F\left(\frac{\omega}{b}\right)$. \square

5. Vertauschungssatz

Wir zeigen die Fourier-Transformation von $F(t)$ und die Fourier-Rücktransformation von $f(\omega)$ nach erfolgtem Austausch der Funktionen gemäß

$$f(t) \longrightarrow F(t) \quad \text{und} \quad F(\omega) \longrightarrow f(\omega) :$$

$F(t) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad 2\pi f(-\omega) ,$ $\frac{1}{2\pi} F(-t) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad f(\omega) .$

Wir gehen aus von der Rücktransformationsgleichung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega \quad \text{und setzen} \quad t = -\tau :$$

$$f(-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} F(\omega) d\omega \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi f(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} F(\omega) d\omega .$$

Die Umbenennungen $\omega \rightarrow t$ und $\tau \rightarrow \omega$ entsprechen dem **Austausch der Funktion** $f(t)$ durch $F(t)$ und liefern

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} F(t) dt = \text{FT}\{F(t)\} . \quad \square$$

Analog dazu finden wir die inverse Fourier-Transformation von $f(\omega)$ nach erfolgtem Austausch von $F(\omega)$ durch $f(\omega)$, wenn wir von der Fourier-Transformation von $f(t)$ ausgehen:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad \Big| \quad \omega = -a$$

$$F(-a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat} f(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi} F(-a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iat} f(t) dt ,$$

$$t \longrightarrow \omega \quad \text{und} \quad a \longrightarrow t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi} F(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(\omega) d\omega = \text{FT}^{-1}\{f(\omega)\} . \quad \square \quad (5.3)$$

Wir können beispielsweise (5.3), also die inverse Fourier-Transformation von $f(\omega)$, nach erfolgtem Austausch von $F(\omega)$ durch $f(\omega)$ auch durch **Vergleich** der Fourier-Transformation von $f(t)$ mit der inversen Fourier-Transformation von $f(\omega)$ herleiten:

$$\text{FT}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = F(\omega) \quad (5.4)$$

$$\longleftrightarrow \quad \text{FT}^{-1}\{f(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega = ?$$

Die Umbenennungen $t \rightarrow \omega$ und $\omega \rightarrow t$ in (5.4) liefern den Vergleich:

$$\text{FT}\{f(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = F(t)$$

$$\longleftrightarrow \quad \text{FT}^{-1}\{f(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} F(-t) . \quad \square$$

6. Faltungstheorem oder Faltungssatz bzw. Multiplikationstheorem

$$\boxed{\begin{array}{l} (f \star g)(t) \quad \xrightleftharpoons[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \quad F(\omega) \cdot G(\omega) , \\ f(t) \cdot g(t) \quad \xrightleftharpoons[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} \quad \frac{1}{2\pi} (F \star G)(\omega) . \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \text{FT}\{(f \star g)(t)\} &= \int_{t, -\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{t', -\infty}^{\infty} f(t') g(t - t') dt' \right] dt \\ &= \int_{t, -\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \int_{t', -\infty}^{\infty} dt' f(t') g(t - t') \\ &\quad \text{Vertauschung der Reihenfolge der Integration} \\ &= \int_{t', -\infty}^{\infty} dt' f(t') \int_{t, -\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} g(t - t') . \end{aligned}$$

Die Substitution $t = \tau + t'$ mit $t \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \tau \rightarrow \pm\infty$ und $dt = d\tau$ im zweiten Integral ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \text{FT}\{(f \star g)(t)\} &= \int_{t', -\infty}^{\infty} dt' f(t') \cdot \int_{\tau, -\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega(\tau+t')} g(\tau) \\ &= \underbrace{\int_{t', -\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{-i\omega t'}}_{F(\omega)} \cdot \underbrace{\int_{\tau, -\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} g(\tau)}_{G(\omega)} = F(\omega) \cdot G(\omega) . \end{aligned}$$

Analog dazu zeigt man $\frac{1}{2\pi} (F \star G)(\omega) \longrightarrow f(t) \cdot g(t)$ durch inverse Fourier-Transformation.

Einige algebraische Eigenschaften der Faltung

- Die Faltung einer Funktion $f(t)$ mit der δ -Funktion $\delta(t - t_0)$, also

$$f(t) \star \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot \delta[(t - t_0) - t'] dt' = f(t - t_0) , \quad (5.5)$$

verschiebt die Funktion $f(t)$ um $\begin{cases} |t_0| \text{ nach links} & \text{bei } t_0 > 0 , \\ |t_0| \text{ nach rechts} & \text{bei } t_0 < 0 . \end{cases}$

(5.5) ist der **Verschiebungssatz** oder Ausblendungssatz (vgl. Shift-Theorem der Fourier-Transformation).

- **Neutrales Element** : $f(t) \star \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta(t - t') dt' = f(t) .$

- **Kommutativität der Faltung** : $f \star g = g \star f$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 (f \star g)(t) &= \int_{t'=0}^{t'=t} f(t') g(t-t') dt' \quad \left| \begin{array}{l} \text{Substitution } t-t' = \tau \Leftrightarrow \\ t' = t-\tau \Rightarrow dt' = -d\tau \end{array} \right. \\
 &= \int_{t-\tau=0}^{t-\tau=t} f(t-\tau) g(\tau) (-1)d\tau \\
 &= - \int_{\tau=t}^{\tau=0} f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^{\tau=t} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \\
 &= \int_{\tau=0}^{\tau=t} g(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad \left| \text{Umbenennung } \tau \rightarrow t' \right. \\
 (f \star g)(t) &= \int_{t'=0}^{t'=t} g(t') f(t-t') dt' = (g \star f)(t) . \quad \square
 \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Bildung der Faltung symmetrisch.

- **Assoziativität der Faltung** : $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$.
- **Distributivität der Faltung** : $f \star (g + h) = (f \star g) + (f \star h)$.
- **Abhängigkeiten der Faltung vom Vorzeichen** der Integrationsvariablen

$$\boxed{f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t-t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t') g(t+t') dt' .}$$

Beweis: Mit der Substitution

$$-t' = \tau \Rightarrow \begin{array}{l} t' \rightarrow \infty \Rightarrow \tau \rightarrow -\infty, \\ t' \rightarrow -\infty \Rightarrow \tau \rightarrow \infty, \end{array} \quad \text{und } dt' = -d\tau \quad (5.6)$$

resultiert aus dem letzten Integral

$$\begin{aligned}
 \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) g(t-\tau) (-1)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad \left| \text{Umbenennung } \tau \rightarrow t' \right. \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t-t') dt' = f(t) \star g(t) . \quad \square
 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(-t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t') g(t-t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t+t') dt' .} \quad (5.7)$$

Beweis: Ebenfalls mit (5.6) resultiert aus dem vorletzten Integral in (5.7)

$$\begin{aligned}
 \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) g(t+\tau) (-1)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t+\tau) d\tau \quad \left| \text{Umbenennung } \tau \rightarrow t' \right. \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t+t') dt' = f(-t) \star g(t) . \quad \square
 \end{aligned}$$

Die Gleichung (5.7) liefert mit der komplex konjugierten von g , also mit g^* die

$$\text{Korrelationsfunktion } c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g^*(x+x') dx' .$$

7. Ableitungsregel

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(t) \xleftrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} i\omega F(\omega), \\ t f(t) \xleftrightarrow[\text{FT}^{-1}]{\text{FT}} i F'(\omega). \end{array}}$$

Wenn die Originalfunktion $f(t)$ differenzierbar ist und ihre Ableitung f' eine Fourier-Transformierte besitzt, dann gilt für die Fourier-Rücktransformation der Fourier-Transformierten $F(\omega)$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{i\omega t} \right) F(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \underbrace{i\omega F(\omega)}_{\text{FT}\{f'(t)\}} d\omega. \end{aligned}$$

8. Power-Theorem

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(\omega)} G(\omega) d\omega}.$$

Die Funktionen (Faktoren) $\overline{f(t)}$ und $g(t)$ sowie $\overline{F(\omega)}$ und $G(\omega)$ in den Integranden dürfen (in ihrer Reihenfolge) vertauscht werden.⁵

Beweis in Analogie zum Beweis im Abschnitt 5.2:

Wir beginnen den Beweis mit der Fourier-Rücktransformation von $G(\omega)$ für $g(t)$ und berücksichtigen zum Schluss wegen des Exponenten $i\omega t = -i \underbrace{(-\omega)} t$ die 4. Regel.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \overline{f(t)} g(t) &= \int_{t, -\infty}^{\infty} dt \overline{f(t)} \frac{1}{2\pi} \int_{\omega, -\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} G(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega, -\infty}^{\infty} d\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt \overline{f(t)} e^{-i(-\omega)t} \right] G(\omega) \quad (5.8) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega, -\infty}^{\infty} d\omega \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} dt \overline{f(t)} e^{-i\omega t} \right]}_{\overline{F(\omega)}} G(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \overline{F(\omega)} G(\omega). \quad \square \end{aligned}$$

⁵Das Produkt $\langle f, g \rangle := \overline{f} \cdot g = g \cdot \overline{f}$ heißt auch **inneres Produkt** von f und g . Folglich ist das zugehörige komplex konjugierte innere Produkt $\overline{\overline{f} \cdot g} = f \cdot \overline{g} = \overline{g} \cdot f =: \langle f, g \rangle$. Wie man sieht, ist die Reihenfolge der Faktoren des inneren Produkts in der Klammernotation nicht beliebig.

Verwenden wir $f(t)$, wird aus dem eingeklammerten Integral in (5.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i(-\omega)t} = F(-\omega).$$

Damit resultiert aus dem Power-Theorem die Beziehung

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega) G(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(-\omega) d\omega}.$$

Dass statt F auch G von $-\omega$ abhängen kann, sehen wir, wenn wir in dem oben geführten Beweis des Power-Theorems gleich zu Beginn die inverse Fourier-Transformation von $F(\omega)$ für $f(t)$ einsetzen.

9. Fourier-Transformation gerader Funktionen $f(t) \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f(t) \in \mathbb{R} \text{ gerade Funktion} \Leftrightarrow F(\omega) \in \mathbb{R} \text{ gerade Funktion}}.$$

Im folgenden Beweis verwenden wir:

die Euler-Identität $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$, die Beziehung $f(t) = f(-t)$ für gerade Funktionen f und die Tatsache, dass das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ über eine ungerade Funktion verschwindet.

Beweis:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt}_{=0}, \end{aligned}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \in \mathbb{R}. \quad \square$$

$$\begin{aligned} F(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(-\omega)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad \left| \begin{array}{l} t = -\tau, t \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \tau \rightarrow \mp\infty, dt = -d\tau \end{array} \right. \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} f(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \left| \begin{array}{l} \text{Umbenennung } \tau \rightarrow t \end{array} \right. \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-i\omega t} dt \quad \left| \begin{array}{l} f(-t) = f(t) \end{array} \right. \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = F(\omega) \text{ gerade Funktion}. \quad \square \end{aligned}$$

10. Fourier-Transformation ungerader Funktionen $f(t) \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f(t) \in \mathbb{R} \text{ ungerade Funktion} \Leftrightarrow F(\omega) \in i\mathbb{R} \text{ ungerade Funktion}} .$$

Im folgenden Beweis verwenden wir:

die Euler-Identität $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$, die Beziehung $f(t) = -f(-t)$ für ungerade Funktionen f und die Tatsache, dass das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ über eine ungerade Funktion verschwindet.

Beweis:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt}_{=0} - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt , \\ F(\omega) &= -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \in i\mathbb{R} \text{ (rein imaginär)} . \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -F(-\omega) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(-\omega)t} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad \left| \begin{array}{l} t = -\tau, t \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \tau \rightarrow \mp\infty, dt = -d\tau \end{array} \right. \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} -f(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -f(-\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \left| \begin{array}{l} \text{Umbenennung } \tau \rightarrow t \end{array} \right. \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -f(-t) e^{-i\omega t} dt \quad \left| \begin{array}{l} -f(-t) = f(t) \end{array} \right. \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = F(\omega) \text{ ungerade Funktion} . \quad \square \end{aligned}$$

11.

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t) \cdot e^{\pm iat}](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega \mp a), \quad a \in \mathbb{R}} .$$

Hier zeigt sich der Vorteil dieser alternativen Notation, die auf den ersten Blick „überfrachtet“ erscheinen mag.

$$\mathcal{F}[f(t) \cdot e^{\pm iat}](\omega) = \int_{t, -\infty}^{\infty} f(t) e^{\pm iat} e^{-i\omega t} dt = \int_{t, -\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega \mp a)t} dt = \mathcal{F}[f(t)](\omega \mp a).$$

Mit der Euler-Identität erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \cdot e^{+iat}](\omega) &= \mathcal{F}[f(t) \cdot \cos(at)](\omega) + i \mathcal{F}[f(t) \cdot \sin(at)](\omega) \\ &= \mathcal{F}[f(t)](\omega - a), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \cdot e^{-iat}](\omega) &= \mathcal{F}[f(t) \cdot \cos(at)](\omega) - i \mathcal{F}[f(t) \cdot \sin(at)](\omega) \\ &= \mathcal{F}[f(t)](\omega + a). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Der Exponentialterm bewirkt folgendes:

$$e^{+iat} \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)](\omega - a) : \text{Verschiebung von } \mathcal{F}[f(t)] \text{ um } a \text{ nach links,}$$

$$e^{-iat} \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)](\omega + a) : \text{Verschiebung von } \mathcal{F}[f(t)] \text{ um } a \text{ nach rechts.}$$

Addieren wir (5.9) und (5.10), resultiert

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t) \cdot \cos(at)](\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{F}[f(t)](\omega - a) + \mathcal{F}[f(t)](\omega + a) \right\}, \quad a \in \mathbb{R}} .$$

Subtrahieren wir (5.10) von (5.9), resultiert

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t) \cdot \sin(at)](\omega) = \frac{1}{2i} \left\{ \mathcal{F}[f(t)](\omega - a) - \mathcal{F}[f(t)](\omega + a) \right\}, \quad a \in \mathbb{R}} .$$

12. Fourier-Transformation und δ -Funktion

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta(t) \xrightarrow{\text{FT}} 1, \\ \delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{FT}} e^{-i\omega t_0}. \end{array}}$$

Die zugehörigen Herleitungen finden sich im Abschnitt 5.6 Fourier-Transformation der Dirac'schen delta-Funktion.

Weiterhin gelten die **Identitäten**

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega := \delta(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega := \delta(t - t_0), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt := \delta(\omega) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt := \delta(\omega - \omega_0). \end{array}}$$

5.4 Fourier-Transformation der Gauß'schen Normalverteilung

Die **Gauß'sche Normalverteilung** einer Größe wird beschrieben durch ihre

$$\text{Dichtefunktion } f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (x-\mu)^2}$$

mit dem Mittelwert μ , der Standardabweichung σ und der **Normierung** gemäß

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (x-\mu)^2} = 1.$$

Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir $\mu = 0$, $\frac{1}{2\sigma^2} = a$, $\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} = b$:

$$\text{Originalfunktion } f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} x^2} = b \cdot e^{-a x^2}.$$

Außerdem verwenden wir das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Fourier-Transformation von $f(x) = b e^{-a x^2}$ mit (5.1) und x für t sowie k für ω :

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-ik \cdot x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} b e^{-a x^2} \cdot e^{-ik \cdot x} dx = b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \cdot e^{-ik \cdot x} dx.$$

Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} e^{-a x^2} \cdot e^{-ik x} &= e^{-a(x^2 + \frac{ik}{a} x)} \quad \left| \text{quadratische Ergänzung im Klammerterm} \right. \\ &= e^{-a[x^2 + \frac{ik}{a} x + (\frac{ik}{2a})^2 - (\frac{ik}{2a})^2]} = e^{-a[(x + \frac{ik}{2a})^2 - (\frac{ik}{2a})^2]} \quad \left| (x + \frac{ik}{2a}) = z \right. \\ &= e^{-a[z^2 + \frac{k^2}{4a^2}]} , \\ e^{-a x^2} \cdot e^{-ik x} &= e^{-a z^2} \cdot e^{-\frac{k^2}{4a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(k) &= b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a z^2} \cdot e^{-\frac{k^2}{4a}} dx = b \cdot e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a z^2} dz \quad \left| \frac{dz}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = dz \right. \\ &= b \cdot e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a z^2} dz = b \cdot e^{-\frac{k^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \end{aligned}$$

$$F(k) = \sqrt{\frac{b^2 \pi}{a}} \cdot e^{-\frac{1}{4a} k^2} = e^{-\frac{\sigma^2}{2} k^2} \quad \text{für } \mu = 0.$$

Fourier-Rücktransformation von $F(k) = e^{-\frac{\sigma^2}{2} k^2}$ mit (5.2) zur Überprüfung :
 Aus Bequemlichkeit setzen wir $\frac{\sigma^2}{2} = c$.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \cdot e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2}{2} k^2} \cdot e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ck^2} \cdot e^{ikx} dk ,$$

Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} e^{-ck^2} \cdot e^{ikx} &= e^{-c(k^2 - \frac{ix}{c} k)} \quad \left| \text{quadratische Ergänzung im Klammerterm} \right. \\ &= e^{-c[k^2 - \frac{ix}{c} k + (\frac{ix}{2c})^2 - (\frac{ix}{2c})^2]} = e^{-c[(k - \frac{ix}{2c})^2 - (\frac{ix}{2c})^2]} \quad \left| (k - \frac{ix}{2c}) = z \right. \\ &= e^{-c[z^2 + \frac{x^2}{4c^2}]} , \\ e^{-ck^2} \cdot e^{ikx} &= e^{-cz^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4c}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cz^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4c}} dz = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{4c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cz^2} dz \quad \left| \frac{dz}{dk} = 1 \Leftrightarrow dk = dz \right. \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{4c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cz^2} dz = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{4c}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{c}} , \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{c4\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{4c} x^2} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{1}{2} x^2} \quad \text{für } \mu = 0} \quad . \quad \square$$

Diskussion

- Fourier-Hin- und Rücktransformation der Dichtefunktion der Gauß'schen Normalverteilung liefern folgenden Zusammenhang:

$$\begin{array}{l} \text{Original-} \\ \text{funktion} \end{array} \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} x^2} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{FT}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad e^{-\frac{\sigma^2}{2} k^2} = F(k) \quad \begin{array}{l} \text{Fourier-} \\ \text{Transformierte} \end{array} .$$

- Wie man sieht, resultiert bei Fourier-Transformation einer Gauß-Verteilung wieder eine Gauß-Verteilung.⁶
- Im Gegensatz zum Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ ist das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} F(k) dk \neq 1$. Während die Originalfunktion $f(x)$ normiert ist, ist ihre Fourier-Transformierte $F(k)$ nicht normiert.

Das heißt, dass allgemein die Fourier-Transformation die Normierung nicht erhält.

⁶Üblicherweise meint man, wenn man von einer **Gauß-Verteilung** spricht, nicht die Verteilungsfunktion sondern die **Dichtefunktion**.

- Die normierte oder genauer gesagt die auf eins **normierte Fourier-Transformierte** wäre

$$\tilde{F}(k) = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\sigma^2 \cdot \frac{1}{2} k^2} .$$

- Je breiter bzw. flacher die Originalfunktion $f(x)$ (mit $\frac{1}{\sigma^2}$ im Exponenten) verläuft und je kleiner ihr Maximum ist, desto schmaler bzw. steiler verläuft ihre Fourier-Transformierte $F(k)$ (mit σ^2 im Exponenten) und desto größer ist ihr Maximum – und umgekehrt. Besonders deutlich wird dieser reziproke Zusammenhang, wenn sowohl die Originalfunktion als auch ihre Fourier-Transformierte in gleicher Weise normiert sind.

5.5 Fourier-Transformation der Rechteckfunktion

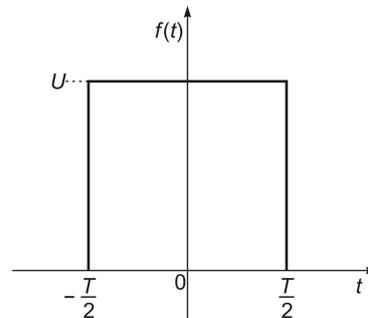


Abb. 5.1 Rechteckfunktion $\text{rect}(t) = f(t)$ mit der Breite T und der Höhe $f(t) = U$.

Wir führen die Fourier-Transformation der in Abbildung 5.1 dargestellten Rechteckfunktion

$$f(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} U & \text{für } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.11)$$

gemäß (5.1) durch:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U e^{-i\omega t} dt .$$

Mit der Substitution $-i\omega t = z \Rightarrow dt = \frac{1}{-i\omega} dz$ und mit den Integrationsgrenzen $\frac{T}{2} \rightarrow -i\omega \frac{T}{2}$ bzw. $-\frac{T}{2} \rightarrow i\omega \frac{T}{2}$ erhalten wir

$$F(\omega) = \frac{U}{-i\omega} \int_{i\omega \frac{T}{2}}^{-i\omega \frac{T}{2}} e^z dz = \frac{U}{-i\omega} e^z \Big|_{i\omega \frac{T}{2}}^{-i\omega \frac{T}{2}} = \frac{U}{i\omega} e^z \Big|_{-i\omega \frac{T}{2}}^{i\omega \frac{T}{2}} = \frac{U}{i\omega} \left(e^{i\omega \frac{T}{2}} - e^{-i\omega \frac{T}{2}} \right)$$

und mit der Euler'schen Beziehung $(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = 2i \cdot \sin \varphi$ schließlich

$$F(\omega) = \frac{2U}{\omega} \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right) . \quad (5.12)$$

Üblicherweise formt man (5.12) so um, dass eine Darstellung als sinc-Funktion resultiert:

$$F(\omega) = UT \frac{\sin(\omega \frac{T}{2})}{\omega \frac{T}{2}} = UT \cdot \text{sinc}(\omega \frac{T}{2}) . \quad (5.13)$$

Zum Sinus cardinalis

Der Sinus cardinalis oder Kardinalsinus wird auch Spaltfunktion, Samplingfunktion oder kurz sinc-Funktion genannt und ist in der allgemeinen Form wie folgt definiert:

$$g(x) = \text{sinc}(ax) = \frac{\sin(ax)}{ax}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \text{ ist die unabhängige Variable .}$$

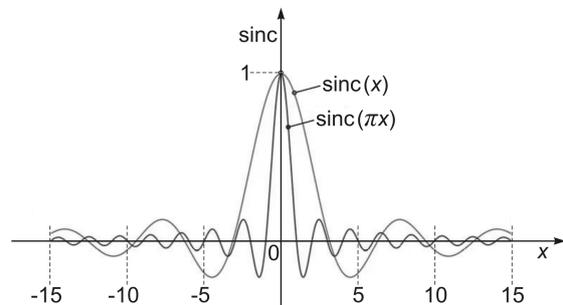
Im speziellen Fall $a = \pi$ ist die sinc-Funktion über das Integral bzw. die vom Graphen $\text{sinc}(\pi x)$ eingeschlossene Fläche (auf 1) normiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\pi x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} dx = 1$$

An der Stelle $x = 0$ besitzt die sinc-Funktion eine hebbare Definitionslücke mit $\text{sinc}(0) = 1$. Man kann dies u. a. durch Anwendung der Regel von de L'Hospital zeigen.

Abb. 5.2 Graphen des Sinus cardinalis oder kurz der sinc-Funktion:

$\text{sinc}(x)$ ist nicht normiert, $\text{sinc}(\pi x)$ ist normiert. Die ganzzahligen Vielfachen von π im Argument der Funktion $\text{sinc}(\pi x)$ liefern deren Nullstellen $x_n = n \in \mathbb{Z} \setminus 0$.



Von besonderer Bedeutung ist die sinc-Funktion beispielsweise bei der Signalverarbeitung und in der Abbildungstheorie (siehe Beugung und Interferenz am Spalt).

Anmerkung

In der deutschsprachigen Literatur wird für den *nichtnormierten* Sinus cardinalis auch $\text{si}(x)$ geschrieben.

5.6 Fourier-Transformation der Dirac'schen delta-Funktion

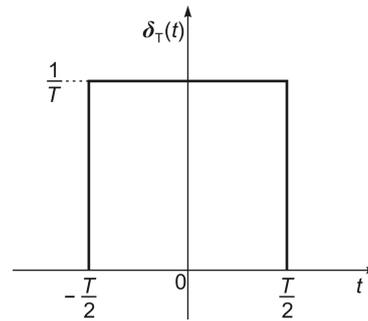


Abb. 5.3 Ein Rechteckimpuls werde beschrieben durch die Funktion $\delta_T(t)$ und besitze die Höhe $\frac{1}{T}$.

Die Dirac'sche delta-Funktion⁷, kurz δ -Funktion, erhalten wir aus dem Rechteckimpuls (siehe Abbildung 5.3) bzw. aus der Funktion

$$\delta_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{für } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mittels Grenzwertbildung gemäß

$$\delta(t) := \lim_{T \rightarrow 0} \delta_T(t).$$

Diese Beziehung wenden wir auf die Fourier-Transformation von $\delta_T(t)$ an:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \text{FT}\{\delta_T(t)\} &= \text{FT}\{\delta(t)\} = F(\omega) \Rightarrow \\ F(\omega) &= \lim_{T \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t) e^{-i\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow 0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} e^{-i\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{-i\omega T} \left(e^{-i\omega \frac{T}{2}} - e^{i\omega \frac{T}{2}} \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{i\omega T} \left(e^{i\omega \frac{T}{2}} - e^{-i\omega \frac{T}{2}} \right) \quad \left| \text{mit } \left(e^{i\omega \frac{T}{2}} - e^{-i\omega \frac{T}{2}} \right) = 2i \sin \frac{\omega T}{2} \right., \\ F(\omega) &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T}. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Regel von de L'Hospital resultiert schließlich

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{2 \frac{d}{dT} \sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{d}{dT} \omega T} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\omega}{2} \cdot \cos \frac{\omega T}{2}}{\omega} = \cos 0,$$

$$\boxed{\text{FT}\{\delta(t)\} = F(\omega) = 1} \quad (5.14)$$

⁷Siehe auch Kapitel 5 *Dirac'sche delta-Funktion* in meinem Skript *Grundlegendes zur Elektrodynamik und Quantenmechanik*.

Wir hätten auch $\delta(t)$ statt $f(t)$ in die Transformationsgleichung (5.1) einsetzen und die Exponentialfunktion $e^{-i\omega t}$ als die Funktion $g(t)$ ansehen können:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t) dt = g(0) \Rightarrow \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^0 = 1 . \quad \square \end{aligned}$$

Während man sich den Graphen der Funktion $\delta(t)$ als unendlich hohen und unendlich dünnen Peak an der Stelle $t = 0$ „veranschaulichen“ kann, ist ihre Fourier-Transformierte $F(\omega)$ konstant gleich 1 im gesamten Bereich $-\infty < \omega < \infty$.

In der Umkehrung bzw. durch die **Fourier-Rücktransformation** (5.2) von $F(\omega) = 1$ sollte eigentlich die δ -Funktion resultieren gemäß

$$\text{FT}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(\omega)}_{=1} \cdot e^{i\omega t} d\omega .$$

Weil aber die Exponentialfunktion $e^{i\omega t}$ (mit *imaginärem* Exponenten) nicht uneigentlich bzw. nicht absolut integrierbar ist, lässt sich die δ -Funktion nicht durch die inverse Fourier-Transformation aus ihrer Fourier-Transformierten zurückgewinnen. Es handelt sich hier also im eigentlichen Sinne nicht um eine Fourier-Rücktransformation. Wir definieren deshalb die Beziehung

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega := \delta(t)} \quad (5.15)$$

als **Identität**. Man kann sich dieses Ergebnis etwa folgendermaßen veranschaulichen: Für alle $t \neq 0$ verschwindet das Integral, weil sich die „Oszillationen“ des Integranden wegmitteln. Nur an der Stelle $t = 0$ ist der Integrand gleich 1 und das Integral divergiert bzw. geht gegen Unendlich, was dem Verhalten der δ -Funktion entspricht.

Für den Fall, dass der Peak der δ -Funktion nicht an der Stelle $t = 0$, sondern an einer Stelle $t \neq 0$ bzw. $t_0 \neq 0$ lokalisiert ist, gilt

$$t \neq 0 : \quad \delta(t - t') \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') dt' = 1 , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta(t - t') dt' = f(t)$$

bzw.

$$t_0 \neq 0 : \quad \delta(t - t_0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) .$$

Diese beiden Schreibweisen sind äquivalent, weil die δ -Funktion eine gerade Funktion ist gemäß

$$\begin{aligned} \delta(t - t') &= \delta[-(t - t')] = \delta(t' - t) \quad \text{bzw.} \quad \delta(t - t_0) = \delta[-(t - t_0)] = \delta(t_0 - t) , \\ \delta(t + t') &= \delta[-(t + t')] \quad \text{bzw.} \quad \delta(t + t_0) = \delta[-(t + t_0)] . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Für die **Fourier-Transformation der δ -Funktion** gilt damit⁸

$$\boxed{\delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{FT}} e^{-i\omega t_0}}, \quad (5.17)$$

$$f(t) = \delta(t - t_0) : \text{FT}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t - t_0) dt = e^{-i\omega t_0} = F(\omega),$$

$$\text{FT}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} e^{-i\omega t_0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega := \delta(t - t_0) = f(t).$$

Damit haben wir die folgende **Identität** gefunden:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)} d\omega := \delta(t - t_0)}.$$

Wir können diese Identität aber auch finden, wenn wir nicht von der δ -Funktion ausgehen, sondern nur die allgemeinen Formeln für die Fourier-Hin- und Rücktransformation verwenden:

$$\begin{aligned} \text{FT}\{f(t)\} : F(\omega') &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega' t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] e^{-i\omega' t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} e^{-i\omega' t} d\omega dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i(\omega - \omega')t} dt d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt}_{\delta(\omega - \omega')} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega = F(\omega'). \end{aligned}$$

Es gilt folglich die Identität

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt := \delta(\omega - \omega')}. \quad (5.18)$$

Führen wir jetzt analog dazu die Fourier-Rücktransformation

$$\text{FT}^{-1}\{F(\omega)\} : f(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t'} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega t'} d\omega$$

durch, finden wir die *prinzipiell* gleiche Identität

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'-t)} d\omega := \delta(t - t') =: \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega}. \quad (5.19)$$

⁸ (5.17) ist ein Beispiel für den **Verschiebungssatz** $f(t - a) \xrightarrow{\text{FT}} e^{i\omega a} F(\omega)$, falls hier gemäß (5.14) $F(\omega) = 1$ ist. Der Fall (5.14) bzw. die Funktion $\delta(t)$ entspricht nämlich $a = 0$ und somit keiner Verschiebung.

5.7 Exponentialfunktionen mit imaginärem Exponenten

Weil Exponentialfunktionen mit imaginärem Exponenten wie beispielsweise $e^{i\omega t}$ nicht uneigentlich bzw. nicht absolut integrierbar sind, ist auch deren Fourier-Transformation im eigentlichen Sinne nicht möglich. Wenn wir dennoch die entsprechenden „Fourier-Transformationen“ durchführen, resultieren dabei sog. **Identitäten**:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(t) = e^{i\omega_0 t} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{„FT“}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad 2\pi \delta(\omega - \omega_0) = F(\omega) , \\ f(t) = e^{-i\omega_0 t} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{„FT“}} \\ \xleftarrow{\text{FT}^{-1}} \end{array} \quad 2\pi \delta(\omega + \omega_0) = F(\omega) . \end{array}} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \text{FT}\{e^{i\omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt \stackrel{(5.18)}{:=} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) , \\ \text{FT}\{e^{-i\omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[-(\omega_0 + \omega)]t} dt \stackrel{(5.16)}{:=} 2\pi \delta(\omega + \omega_0) . \end{aligned}$$

Ein Vergleich von (5.20) mit (5.17) verdeutlicht die Asymmetrie zwischen Fourier-Transformation und inverser Fourier-Transformation hinsichtlich des Vorfaktors $\frac{1}{2\pi}$ und hinsichtlich des Vorzeichens im Exponenten der Exponentialfunktion.

5.8 Fourier-Transformation der Kammfunktion

Die Kammfunktion (englisch **comb-function**)

$$\text{comb}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(t - mT) \quad \text{mit } T > 0$$

wird auch Dirac-Kamm-Funktion genannt und beschreibt eine unendliche Folge von δ -Funktionen. Dabei ist T die Periode bzw. der Abstand zwischen benachbarten δ -Funktionen. Weil die Abtastung einer Testfunktion $g(t)$ im Abstand $\Delta t = T$ der Multiplikation

$$g(t) \cdot \text{comb}(t) = \sum_{m, -\infty}^{\infty} g(mT)$$

entspricht, ist $\frac{1}{T} = \nu$ die Abtastfrequenz.

Im Folgenden zeigen wir, dass die Fourier-Transformierte der Kammfunktion wieder eine Kammfunktion ist gemäß

$$\boxed{\text{comb}(t) = \sum_{m, -\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \xrightarrow{\text{FT}} \frac{2\pi}{T} \sum_{m, -\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - m \cdot \frac{2\pi}{T}\right) = \text{comb}(\omega)} \quad (5.21)$$

- Bekanntlich lässt sich eine periodische und kontinuierliche Funktion $f(t)$ mit der Periode T und der Grundkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ als (komplexe) Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{n, -\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{in\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad \underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (5.22)$$

im t -Bereich darstellen. Die entsprechende Fourier-Transformation von (5.22) in den ω -Bereich ist

$$\text{FT}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n, -\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{in\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = F(\omega) .$$

Weil die Fourier-Koeffizienten \underline{c}_n nicht von t sondern vom Laufindex n abhängen, dürfen wir $\sum_{n, -\infty}^{\infty} \underline{c}_n$ vor das Integral ziehen und erhalten mit der Identität (5.18)

$$F(\omega) = \sum_{n, -\infty}^{\infty} \underline{c}_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \sum_{n, -\infty}^{\infty} \underline{c}_n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(n\omega_0 - \omega)t} dt}_{:= 2\pi \delta(\omega - n\omega_0)} ,$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n, -\infty}^{\infty} \underline{c}_n \delta(\omega - n\omega_0) . \quad (5.23)$$

$F(\omega)$ ist hier das diskrete Fourier-Spektrum einer periodischen kontinuierlichen Funktion $f(t)$ mit den zugehörigen Fourier-Koeffizienten \underline{c}_n gemäß (5.22). „Das Fourierspektrum besteht also aus einer Folge von Impulsen mit dem Gewicht $2\pi\underline{c}_n$ bei den Frequenzen $\omega = n\omega_0$.“⁹

- Nun ist aber die Kammfunktion nicht kontinuierlich sondern diskret. Berechnen wir also die Fourier-Koeffizienten \underline{c}_n für die Kammfunktion. Dabei greifen wir als Integrationsbereich die Periode um den δ -Peak für $m = 0$ bzw. um $t = mT = 0$ heraus, sodass von der Kammfunktion nur das Folgenglied $\delta(t)$ für die Berechnung relevant ist:

$$\begin{aligned} \underline{c}_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \text{comb}(t) e^{-in\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-in\omega_0 t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} , \\ \underline{c}_n &= \frac{1}{T} \quad \forall n . \end{aligned}$$

- Setzen wir $\underline{c}_n = \frac{1}{T}$ in (5.23) ein und berücksichtigen wir $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ erhalten wir schließlich

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n, -\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right) . \quad \square$$

Weil zum Folgenglied von $\text{comb}(t)$ für $m = 0$ das Folgenglied von $\text{comb}(\omega)$ für $n = 0$ gehört gemäß

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{T} e^{-in\omega t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} = \frac{1}{T} e^0 \quad \Leftrightarrow \quad n = 0$$

und weil jedem Folgenglied von $\text{comb}(\omega)$ genau ein Folgenglied von $\text{comb}(t)$ zugeordnet ist und umgekehrt, können wir am Ende $n = m$ setzen (siehe (5.21)).

„Mit Hilfe der Fouriertransformation von Dirac-Impulsen ist es also möglich, auch für periodische Funktionen, die wegen der unendlichen Anzahl von Extremwerten die Dirichletbedingungen nicht erfüllen, die Fouriertransformation zu realisieren.

Wir bemerken:

Periodizität einer kontinuierlichen Funktion bewirkt ein diskretes Frequenzspektrum.

Im Extremfall kann die periodische (kontinuierliche) Funktion auch in Gestalt einer gewichteten Folge von Dirac-Impulsen auftreten. Damit schlägt die Verwendung des Dirac-Impulses eine Brücke zwischen kontinuierlichen und diskreten Funktionen.“⁹

⁹Zitiert aus: Gerald Sommer, *Computer Vision I*, 8. Auflage, Lehrstuhl für Kognitive Systeme, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2008, Seite 120 bis Seite 122
<https://www.informatik.uni-kiel.de/inf/Sommer/doc/Downloads/Skripte/cv1skript.pdf>

5.9 Fourier-Transformation der Funktion eines Wellenpaketes

Ein Wellenzug mit der Grundfrequenz ν_0 hat an einem festen Ort x die (begrenzte) Dauer Δt . Dieser Wellenzug entspricht zu einem bestimmten Zeitpunkt, beispielsweise $t = 0$, einem Wellenpaket der räumlichen Länge $l = c \cdot \Delta t$. Die Amplitude des Wellenpaketes kann verschiedenen Funktionen gehorchen; standardmäßig wählt man dafür die Gauß-Funktion.¹⁰

Wir werden jetzt aber den einfachsten Fall eines Wellenpaketes zum Zeitpunkt $t = 0$ betrachten, nämlich ein Wellenpaket mit konstanter Amplitude A und der räumlichen Pulslänge l symmetrisch um $x = 0$. Konstruieren wir also die Funktion $f(x)$ dieses Wellenpaketes, indem wir die Funktion einer ebenen Welle mit der im Abschnitt 5.5 diskutierten Rechteckfunktion (5.11) multiplizieren. Allerdings führen wir jetzt in der Rechteckfunktion die Umbenennungen $t \rightarrow x$, $\omega \rightarrow k$, $T \rightarrow l$ durch und setzen $U = 1$. Aus der Grundfrequenz ν_0 des Wellenzuges ergibt sich die Wellenzahl k_0 der ebenen Welle wie folgt:

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega_0}{c} = \frac{2\pi \cdot \nu_0}{c}.$$

Für die Funktion der ebenen Welle schreiben wir also $\Psi(x) = A \cdot e^{ik_0x}$ und für die Rechteckfunktion

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion unseres Wellenpaketes ist damit

$$f(x) = \Psi(x) \cdot \text{rect}(x),$$

$$\boxed{f(x) = A e^{ik_0x} \cdot \text{rect}(x)}. \quad (5.24)$$

Die Fourier-Transformation von (5.24) unter Anwendung des Multiplikationstheorems, des Linearitätstheorems sowie von (5.20), von (5.13) und von (5.5) liefert

$$\begin{aligned} \text{FT}\{f(x)\} &= \text{FT}\{A \cdot e^{ik_0x}\} \star \text{FT}\{\text{rect}(x)\} \\ &= \left[A \cdot 2\pi \delta(k - k_0) \right] \star \left[l \cdot \text{sinc}\left(k \frac{l}{2}\right) \right] = F(k), \end{aligned}$$

$$\boxed{F(k) = 2\pi A l \cdot \text{sinc}\left[\frac{1}{2} l (k - k_0)\right]}.$$

¹⁰Die Fourier-Transformation der Funktion eines Wellenpaketes mit der Gestalt der Gauß'schen Normalverteilung wird im Abschnitt 4.2 *Materiewellenpaket und Teilchenunschärfe* meines Skripts *Quantenobjekt – Schrödinger-Gleichung – Tunneleffekt* ausführlich dargestellt und diskutiert.

5.10 Fourier-Transformation der Sprungfunktion

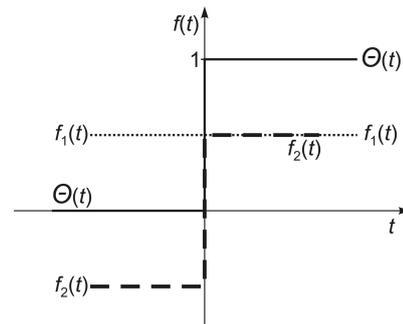


Abb. 5.4 Die Einheitssprungfunktion $\Theta(t)$ und die beiden Hilfsfunktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$.

Für die Fourier-Transformation der Einheitssprungfunktion¹¹ $\Theta(t)$ legen wir aus Bequemlichkeit den Sprung an die Stelle $t = 0$ gemäß

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Um Konvergenzproblemen aus dem Weg zu gehen, zerlegen wir $\Theta(t)$ in die Hilfsfunktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ (siehe Abbildung 5.4):

$$f_1(t) = \frac{1}{2}, \quad -\infty < t < \infty,$$

$$f_2(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} e^{at} \right), & -\infty < t < 0, \\ \frac{1}{2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(+\frac{1}{2} e^{-at} \right), & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_1(t) + f_2(t) = \Theta(t).$$

Für die Fourier-Transformation von $\Theta(t)$ gilt damit

$$\text{FT}\{\Theta(t)\} = \underbrace{\text{FT}\{f_1(t)\}}_{F_1(\omega)} + \underbrace{\text{FT}\{f_2(t)\}}_{F_2(\omega)} = F(\omega) \Rightarrow$$

Fourier-Transformation von $f_1(t)$ unter Berücksichtigung von (5.15) und (5.19):

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt}_{:= 2\pi\delta(\omega)} = \pi\delta(\omega).$$

¹¹Die Einheitssprungfunktion heißt auch Theta-Funktion, Heaviside-Funktion, Stufen- oder Treppenfunktion, Schwellenwertfunktion oder auch nur kurz Sprungfunktion. Über den Zusammenhang zwischen Θ - und δ -Funktion siehe Abschnitt 5.3 *Eigenschaften der δ -Funktion – Rechenregeln* in meinem Skript *Grundlegendes zur Elektrodynamik und Quantenmechanik*.

Fourier-Transformation von $f_2(t)$:

$$\begin{aligned}
 F_2(\omega) &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^0 \left(-\frac{1}{2} e^{at} \right) e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-at} \right) e^{-i\omega t} dt \right] \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \right] \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{(a-i\omega)} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \right]_0^{\infty} \right\} \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2(a-i\omega)} + \frac{1}{2(a+i\omega)} \right\} = \frac{1}{2i\omega} + \frac{1}{2i\omega} = \frac{1}{i\omega}, \quad \omega \neq 0.
 \end{aligned}$$

Die Fourier-Transformierte der Einheitssprungfunktion $\Theta(t)$ ist also

$$\boxed{\text{FT}\{\Theta(t)\} = F(\omega) = \begin{cases} \pi\delta(\omega), & \omega = 0, \\ \frac{1}{i\omega}, & \omega \neq 0. \end{cases}}$$

In der folgenden **alternativen Herleitung**¹² der Fourier-Transformation der Einheitssprungfunktion wird der Zusammenhang zwischen der Sprungfunktion und der Signumfunktion, also zwischen

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

benutzt, nämlich

$$\Theta(t) = \frac{1}{2} [\text{sign}(t) + 1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \text{sign}(t) = 2\Theta(t) - 1.$$

Weiterhin benötigen wir dabei $\frac{d}{dt}\Theta(t) = \delta(t)$, die Rechenregeln für die Fourier-Transformation und einige Ergebnisse aus dem Abschnitt 5.6, insbesondere (5.15):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \text{sign}(t) &= 2\delta(t) \quad \Rightarrow \\
 \text{FT} \left\{ \frac{d}{dt} \text{sign}(t) \right\} &= i\omega \cdot \text{FT}\{\text{sign}(t)\} = 2 \cdot \underbrace{\text{FT}\{\delta(t)\}}_{=1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{FT}\{\text{sign}(t)\} = \frac{2}{i\omega}, \\
 \text{FT}\{\Theta(t)\} &= \text{FT} \left\{ \frac{1}{2} \right\} + \text{FT} \left\{ \frac{1}{2} \text{sign}(t) \right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} \text{FT}\{\text{sign}(t)\},
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{FT}\{\Theta(t)\} = F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}}.$$

¹²Zur Problematik der Fourier-Transformation der Sprungfunktion siehe auch: Benjamin Seppke, Die Fourier-Transformation der Heaviside-Funktion, 2014, <https://kogs-www.informatik.uni-hamburg.de/~seppke/content/teaching/sose14/nano/fourier-of-heaviside.pdf>