Reinhard Weiß

Grundideen

zur relativistischen Punktmechanik

und zur ART

10.04.2022

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen und Begriffsbestimmungen zur SRT

Literatur, Quellen

- Horst Melcher, *Relativitätstheorie in elementarer Darstellung*, 4. Auflage, Aulis Verlag Deubner, Köln, 1978.
- Helmut Günther, *Spezielle Relativitätstheorie – Ein neuer Einstieg in Einsteins Welt*, 1. Auflage, B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2007.
- Walter Greiner, Johann Rafelski, Theoretische Physik Band 3A, *Spezielle Relativitätstheorie*, 3. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1978, Kapitel *2. Relativistische Mechanik*, inbesondere Seite 93 bis Seite 109.
- Martin Gubler, *Relativitätstheorie mit Vierervektoren*, 2021, `www.physastromath.ch/uploads/myPdfs/Relativ/SRT%20mit%20Vierervektoren.pdf`
- Peter Ryder, *Einführung in die Elektrodynamik und die spezielle Relativitätstheorie*, 1. Auflage, Shaker Verlag, Aachen, 2004.
- Wolfgang Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 4 – Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*, 7. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2010.
- Reinhard Meinel, *Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie für Bachelorstudenten*, 2. Auflage, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2019.
- Bernd Sonne und Reinhard Weiß, *Einsteins Theorien*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- Siehe auch Abschnitt *7.1 Zum Tensorkalkül in der SRT* im Skript *Koordinatentransformation – metrischer Tensor – SRT im Tensorkalkül* .

Zur Erinnerung

Zeitdifferenzen und Längen und damit auch die Gleichzeitigkeit von Ereignissen sind in der SRT relativ, d. h. abhängig vom Bezugssystem und von den Messbedingungen.[1] Die Messbedingungen bestehen in dem Sachverhalt, ob und in welchem System gleichzeitig oder gleichortig gemessen wird. Wir zeigen dies an vier häufig vorkommenden Fallbeispielen in der Standardkonfiguration (S' bewegt sich mit v längs der x-Achse).

Längenmessung :

1. Ein Beobachter in S misst die Länge Δx eines in S' ruhenden Stabes, d. h. den Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt des Stabes mit der **Ruhelänge** oder Eigenlänge $\Delta x'$ in S'. Während dabei der Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt in S gleichzeitig gemessen wird, erfolgt diese Messung in S' am Anfangspunkt zu einer anderen Zeit als am Endpunkt des Stabes, also in S' nicht gleichzeitig. Vergleiche mit 2) in Tabelle 1.1 !
   $\Rightarrow$
   In S erscheint der Stab *verkürzt* gemäß $\Delta x < \Delta x'$ (**Längenkontraktion**).

   Die Ruhelänge eines Körpers in Bewegungsrichtung ist maximal. Die Längenkontraktion erscheint nur in Bewegungsrichtung.

[1] Die Relativität der Gleichortigkeit von Ereignissen ist evident, und wird deshalb selten erwähnt. So erkennt man beispielsweise sofort, dass zwei Ereignisse, die in S' gleichortig zu verschiedenen Zeiten stattfinden, in S nicht gleichortig sind.

2. Leuchten zwei Lichtquellen in S' im Abstand $\Delta x'$ gleichzeitig auf, so leuchten diese in S nicht gleichzeitig auf. Vergleiche mit 1) in Tabelle 1.1 !
   $\Rightarrow$
   In S erscheint der Abstand der Lichtquellen *vergrößert* gemäß $\Delta x > \Delta x'$.

Zeitmessung :

3. *Eine* in S' ruhende Uhr misst die Zeitdifferenz $\Delta t'$ (zwischen Anfang und Ende) in S' gleichortig. Sie misst also in S' ihre **Eigenzeitdifferenz**. Anfang und Ende sind dann in S nicht gleichortig, sodass die zugehörige Zeitdifferenz Δt in S mit zwei synchronisierten Uhren, also mit einer Uhr am Ort für den Anfang und mit einer Uhr am Ort für das Ende gemessen wird. Vergleiche mit 5) in Tabelle 1.1 !
   $\Rightarrow$
   Die in S gemessene Zeitdifferenz ist *größer* gemäß $\Delta t > \Delta t'$ (**Zeitdilatation**).

   Die Eigenzeitdifferenz ist minimal. Die Zeitdilatation ist unabhängig von der Bewegungsrichtung.

4. In S' ruhen zwei miteinander synchronisierte Uhren an verschiedenen Orten. Sie zeigen folglich die System- bzw. Koordinatenzeit von S' an.

   In S ruhe eine Uhr an einem festen Ort. Diese zeigt ihre Eigenzeit an, (die gleich der System- oder Koordinatenzeit von S ist, weil die Uhr in S ruht).

   Wenn die beiden Uhren von S' an der Uhr in S vorbeikommen, vergleicht ein Beobachter in S die Zeiten der jeweiligen Uhren und ermittelt anschließend die Zeitdifferenzen Δt und $\Delta t'$ zwischen den Zeitpunkten, an denen die Uhren von S' an der Uhr in S vorbeikommen. Vergleiche mit 6) in Tabelle 1.1 !
   $\Rightarrow$
   Die in S gemessene Zeitdifferenz ist *kleiner* gemäß $\Delta t < \Delta t'$.

Die entsprechenden quantitativen Beziehungen für den speziellen Fall der Standardkonfiguration können der Tabelle 1.1 entnommen werden.

> „Objekte sind immer in dem System in Bewegungsrichtung kürzer, in welchem ihre Länge zwischen den Ereignissen Messung von „Anfang“ und Messung von „Ende“ des Objekts gleichzeitig gemessen wird.
>
> Zeitdifferenzen zwischen Ereignissen sind immer in dem System kürzer, in welchem sie gleichortig gemessen werden.“[2]

Salopp gesagt heißt das: „Bewegte Objekte erscheinen in Bewegungsrichtung kürzer als ruhende. Bewegte Uhren gehen langsamer als ruhende.“

[2]Zitiert aus: Bernd Sonne und Reinhard Weiß, *Einsteins Theorien*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, Seite 53.

Tabelle 1.1 Die Abhängigkeit der Längen- und Zeitmessergebnisse von den Messbedingungen in der Standardkonfiguration. Da senkrecht zur Bewegungsrichtung keine Längenkontraktion und keine Längendilatation auftreten, sind die y- und z-Koordinaten in der Tabelle nicht aufgeführt. Zitiert aus: Bernd Sonne und Reinhard Weiß, *Einsteins Theorien*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, Seite 52.

Δx	a) für $x'_1 = x'_2$: $\Delta x = \dfrac{v \cdot \Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,	1) für $t'_1 = t'_2$: $\Delta x = \dfrac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,
		2) für $t_1 = t_2$: $\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.
$\Delta x'$	b) für $x_1 = x_2$: $\Delta x' = \dfrac{-v \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,	3) für $t_1 = t_2$: $\Delta x' = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,
		4) für $t'_1 = t'_2$: $\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.
Δt	c) für $t'_1 = t'_2$: $\Delta t = \dfrac{\frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,	5) für $x'_1 = x'_2$: $\Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,
		6) für $x_1 = x_2$: $\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.
$\Delta t'$	d) für $t_1 = t_2$: $\Delta t' = \dfrac{\frac{-v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,	7) für $x_1 = x_2$: $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,
		8) für $x'_1 = x'_2$: $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

- **Körper**

  ist ein Objekt mit Masse und räumlicher Ausdehnung.

- **Teilchen**, Punktteilchen, Massepunkt oder **Punktmasse**

  ist ein idealisierter Körper mit einer Masse aber ohne räumliche Ausdehnung.

- S bzw. S' sind Inertialsysteme, die durch die raumzeitlichen Koordinatensysteme $\{ct, x, y, z\}$ bzw. $\{ct', x', y', z'\}$ beschrieben werden. S' bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bezüglich S, umgekehrt bewegt sich folglich S mit $-\vec{v}$ bezüglich S'.

  Die Beziehungen zwischen (gestrichenen) S'-Koordinaten und (ungestrichenen) S-Koordinaten lassen sich im Minkowski-Diagramm darstellen. Punkte in der Raumzeit heißen **Ereignisse**. Ein Teilchen, das sich zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort befindet, bildet ein Ereignis. So liefert die Existenz eines Teilchens eine kontinuierliche Abfolge von Ereignissen, die **Weltlinie** genannt wird.

- **Standardkonfiguration**

  Das System S' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v parallel zur x-Achse derart, dass die Koordinatenachsen x und x', y und y' sowie z und z' jeweils stets parallel zueinander verlaufen und zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ in ihrem Ursprung zusammenfallen.

- Die Konfiguration, bei der sich das System S' mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}}$ nicht längs der x-Achse von S bewegt (Boostrichtung = Richtung von $\vec{\boldsymbol{v}}$), werden wir zur Unterscheidung von der Standardkonfiguration kurz als **$\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost** bezeichnen:

  Beim $\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost bleiben $t = t' = 0$ bezüglich des Koordinatenursprungs sowie die Achsenparallelität von S zu S' erhalten. S' wird also bezüglich S nicht gedreht. Jedoch bewegt sich S' bezüglich S nicht mehr parallel zur x-Achse sondern mit der beliebigen Geschwindigkeit

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} .$$

  Insofern ist der $\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost eine Verallgemeinerung bezüglich der Standardkonfiguration.

- Zitiert aus
  Walter Greiner, Johann Rafelski, Theoretische Physik Band 3A, *Spezielle Relativitätstheorie*, 3. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1978, Seite 95:

  „...ein bewegtes System transformieren. Dazu erinnern wir uns, daß es im Prinzip zwei Möglichkeiten gibt. Wir können aktiv transformieren, d. h. wir transformieren den Vektor und behalten das System bei, oder wir transformieren passiv, d. h. wir transformieren das System und belassen den Vektor. Eine **Lorentz-Transformation** ist immer eine **passive Transformation**, d. h. wir transformieren das Bezugssystem und berechnen oder messen im neuen System dann die physikalischen Größen."

- **Lorentz-Faktor** $\quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{mit} \qquad \dfrac{v}{c} = \beta$.

- Einen Systemwechsel der Gleichungen bezüglich S und S' erreicht man durch **relativistische Vertauschung**. Dabei wechselt v das Vorzeichen bei gleichzeitiger Vertauschung der Strichindizierung der zu transformierenden Größen.

- **Mitbewegtes System**

  Ein mitbewegtes System ist das Inertialsystem S', das zu jedem Zeitpunkt bezüglich S die gleiche Geschwindigkeit besitzt wie ein Teilchen, das sich bezüglich S ggf. auch beschleunigt bewegt. Mitbewegte Systeme sind demzufolge bewegten Teilchen zugeordnete **Eigensysteme**, momentane Inertialsysteme oder momentane Ruhesysteme.

Mit dem Konzept des mitbewegten Systems lassen sich in der SRT beschleunigte Bewegungen und die daraus abgeleiteten Größen beschreiben. So *entspricht* die gekrümmte Weltlinie eines beschleunigt bewegten Teilchens einer kontinuierlichen Abfolge momentaner Inertialsysteme.

- **Lorentz-Skalare**

  sind lorentz-invariante skalare Größen wie z. B. das Eigenzeitdifferential $d\tau$, die Ruhemasse m_0, die elektrische Ladung q und das Minkowski-Produkt (aus Vierervektoren).

- **Eigengrößen**

  beziehen sich auf die Raumzeitkoordinaten des Ruhesystems, also auf das Koordinatensystem, in dem das betreffende Teilchen ruht.

  Beispiele: Von besonderer Bedeutung ist die **Eigenzeit** τ, also die Zeit, die von einer Uhr in ihrem eigenen Koordinatensystem (Ruhesystem oder Eigensystem) gemessen wird. Weitere Beispiele sind die Eigenlänge (auch Ruhelänge genannt) und die Eigenbeschleunigung $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$.

  Eigengrößen sind **Invarianten**, also unabhängig von der Wahl des Bezugssystems. Eigengrößen lassen sich ggf. mit mitgeführten bzw. mitbewegten Sensoren messen. So kann jedes bewegte Teilchen seine Eigenzeit durch eine mitgeführte Uhr direkt messen, unabhängig von irgendeinem anderen, relativ zu ihm bewegten Bezugssystem. Die von einem Beobachter gemessene Eigenzeit ist *identisch* mit der Koordinatenzeit seines *eigenen* Koordinatensystems (Ruhesystems).

- **Koordinatengrößen**

  sind die Größen in anderen Koordinatensystemen als dem Eigensystem des Beobachters. Koordinatengrößen sind systemabhängig, also **keine Invarianten**.

  Beispiel:
  Ein Beobachter misst die in seinem Eigensystem S verstrichene Eigenzeit $\Delta\tau = \Delta t$ und vergleicht diese mit zughörigen verstrichenen **Koordinatenzeiten** $\Delta t'$ in anderen, relativ zu ihm bewegten Koordinatensystemen S'. Der Beobachter stellt fest, dass die verstrichene Koordinatenzeit stets länger ist als die entsprechende verstrichene Eigenzeit.

- **Viererkalkül**, **Vierervektoren** und **Vierertensoren**

  Mit dem Viererkalkül lassen sich prinzipielle Zusammenhänge in der SRT meistens bequemer („eleganter“) darstellen. So gestalten sich dann beispielsweise die Lorentz-Transformationen einfacher, falls die entsprechenden Transformationsmatrizen bekannt sind.

  Das Vierervektor-Konzept bzw. der Viererkalkül wurde um 1905 von Henri Poincaré entwickelt. Wie Tensoren prinzipiell durch ihr Transformationsverhalten definiert sind, so sind auch Vierervektoren und Vierertensoren durch ihr Verhalten bei der Lorentz-Transformation im (4-dimensionalen) pseudoeuklidischen Raumzeitkontinuum, dem Minkowski-Raum, definiert. Vierervektoren besitzen im Grunde genommen eine zeitliche Komponente, die sich auf die Zeitkoordinate zurückführen lässt, und die drei räumlichen Komponenten, die sich auf die drei Raumkoordinaten zurückführen lassen. Die zeitliche Komponente ist der **Zeitanteil** und die drei räumlichen Komponenten bilden den **Raumanteil** eines Vierervektors.

Vierervektoren sind Vierertensoren 1. Stufe. Die beiden Vierervektor-Grundtypen sind der Viererortsvektor, auch Ereignisvektor oder **Viererort** genannt, und das Viererbogenelement, auch **Weltlinienelement** genannt. Die von ihnen abgeleiteten Vierervektoren wie beispielsweise die Vierergeschwindigkeit, der Viererimpuls, die Viererbeschleunigung und die Viererkraft gehen im Wesentlichen zurück auf Ableitungen des Vierorts nach der lorentz-invarianten Eigenzeit τ.

Vierervektoren besitzen charakteristische **Eigenschaften**:

- Ableitungen von Vierervektoren bleiben Vierervektoren, wenn die Ableitung nach einem Lorentz-Skalar wie beispielsweise der Eigenzeit erfolgt.
- Das skalare Produkt zweier Vierervektoren ist ein Pseudoskalarprodukt, **Minkowski-Produkt** genannt, liefert einen Lorentz-Skalar und ist demzufolge **lorentz-invariant** bzw. unabhängig vom Bezugssystem, in welchem es berechnet wird.
- Das Minkowski-Produkt ist nicht positiv definit sondern **indefinit**, das bedeutet, es kann nicht nur positive Werte annehmen, sondern es kann auch gleich null sein oder negative Werte annehmen. Demzufolge können Vierervektoren zeitartig, lichtartig oder raumartig sein wie beispielsweise das Weltlinienelement $\mathrm{d}s$.
- Insbesondere ist $\mathrm{d}s^2$, also das Quadrat des Weltlinienlements $\mathrm{d}s$, ein Lorentz-Skalar und somit lorentz-invariant.
- Vierervektor- und Vierertensorgleichungen sind forminvariant unter Lorentz-Transformationen.

„Es muss noch betont werden, dass die Vierergeschwindigkeit eine technische Hilfsgröße ist. Sie hat keine Entsprechung in der physikalischen Realität in dem Sinne, dass sie gemessen werden könnte. Gemessen werden weiterhin nur 3d-Geschwindigkeitsvektoren.**“**[3] Diese Aussage trifft prinzipiell auch auf den Viererimpuls, die Viererbeschleunigung und die Viererkraft zu.

- Die „**Länge**“ **eines Vierervektors**

  wird definiert durch sein Minkowski-Produkt mit sich selbst, also durch sein „Längenquadrat“, das auch negativ sein kann.

  Für das „Längenquadrat“ eines Vierervektors wie beispielsweise $\left(x^\mu\right)$ schreibt man:

$$\eta_{\mu\nu}\, x^\nu x^\mu \;=\; x_\mu x^\mu \;.$$

[3] Martin Gubler, *Relativitätstheorie mit Vierervektoren*, 2021, Abschnitt A3

- **Notation** und **Sprachgebrauch**

  Die (momentane) Geschwindigkeit eines als bewegt angenommenen Koordinatensystems bezeichnen wir allgemein mit $\vec{\boldsymbol{v}} = \big(v_x, v_y, v_z\big)$ wie beispielsweise beim $\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost. In der **Standardkonfiguration** gilt dann $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_x, 0, 0) = (v, 0, 0)$ mit dem **Lorentz-Faktor** $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}^{\,2}}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$

  Die Geschwindigkeit eines Teilchens im System S bezeichnen wir mit $\vec{\boldsymbol{u}} = \big(u_x, u_y, u_z\big)$ und die zugehörige Geschwindigkeit desselben Teilchens im System S' mit $\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \big(u'_x, u'_y, u'_z\big)$.

  Aus der Impulserhaltung folgt in der SRT die Abhängigkeit der Masse eines Teilchens von seiner Geschwindigkeit, also die **relativistische Massenveränderlichkeit** gemäß

  $$\widetilde{m} \;=\; \widetilde{m}\big(\vec{\boldsymbol{u}}\,\big) \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}} \;=\; \gamma_u\, m_0\;.$$

  $\widetilde{m}$ heißt **relativistische Masse**, bewegte träge Masse, dynamische Masse oder Impulsmasse.

  m_0 ist die **Ruhemasse** des Teilchens, also die Masse des Teilchens in dem System, in welchem es ruht.

  Ruht das Teilchen im System S', welches sich mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}}$ bezüglich S bewegt, bewegt sich auch das Teilchen der Ruhemasse m_0 mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}}$ in S und besitzt dann in S die relativistische Masse $\gamma\, m_0$. Abhängig vom Kontext wird also statt $\vec{\boldsymbol{u}}$ für die Geschwindigkeit des Körpers in S auch $\vec{\boldsymbol{v}}$ geschrieben mit dem Lorentz-Faktor γ statt γ_u .

  Den Newton'schen Impuls bezeichnen wir wie üblich mit $\vec{\boldsymbol{p}} = \big(p_x, p_y, p_z\big)$ bzw. $\vec{\boldsymbol{p}}\,' = \big(p'_x, p'_y, p'_z\big)$ und den **relativistischen Impuls** mit $\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}} = \big(p_{\mathrm{r}\,x}, p_{\mathrm{r}\,y}, p_{\mathrm{r}\,z}\big)$ bzw. $\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}{}' = \big(p'_{\mathrm{r}\,x}, p'_{\mathrm{r}\,y}, p'_{\mathrm{r}\,z}\big)$.

  Die Newton'sche Kraft bezeichnen wir wie üblich mit $\vec{\boldsymbol{F}} = \big(F_x, F_y, F_z\big)$ bzw. $\vec{\boldsymbol{F}}' = \big(F'_x, F'_y, F'_z\big)$.

  Die (relativistische) **Dreierkraft** bezeichnen wir mit $\vec{\boldsymbol{f}} = \big(f_x, f_y, f_z\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}$ bzw. $\vec{\boldsymbol{f}}\,' = \big(f'_x, f'_y, f'_z\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\,\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}{}'$.

  Der Raumanteil der **Viererkraft K** bzw. **K$'$** ist damit $\vec{K} = \gamma_u\,\vec{\boldsymbol{f}}$ bzw. $\vec{K}' = \gamma_{u'}\,\vec{\boldsymbol{f}}\,'$.

  Wir schreiben Vierervektoren als Klammerausdruck. Wenn wir also beispielsweise die skalaren Vierervektorkomponenten x^μ in runde Klammern setzen, dann ist damit der Vierervektor $\big(x^\mu\big) = \big(x^0, x^1, x^2, x^3\big)$ gemeint.

  Sprechen wir von Vierer*vektoren*, sind eigentlich die kontravarianten Vektoren (Spaltenvektoren) gemeint. Die entsprechenden Vierer*kovektoren* (Zeilenvektoren, Einsformen) sind dann kovariant.

Es ist oft hilfreich, wenn wir Vierervektoren durch **fettgedruckte aufrechte Großbuchstaben** symbolisieren. Leider ist die Symbolisierung von Vierervektoren nicht standardisiert. Außerdem unterscheiden die Vierervektorsymbole in Form fettgedruckter aufrechter Großbuchstaben nicht zwischen ko- und kontravariant, wie man am Beispiel des Minkowski-Produkts $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle$ erkennt. Und auch der Sprachgebrauch hinsichtlich der Größen Impuls und Kraft ist nicht einheitlich. Ausgehend von den Newton'schen oder klassischen Größen wäre eine praktikable Möglichkeit der Vereinheitlichung die folgende:

klassischer Impuls $\vec{\boldsymbol{p}} \quad \longrightarrow$
relativistischer (Labor-)Impulsvektor $\quad \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}$ = Dreierimpuls ,

Newton'sche Kraft $\vec{\boldsymbol{F}} \quad \longrightarrow$
relativistischer (Labor-)Kraftvektor $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{r}} = \vec{\boldsymbol{f}}$ = Dreierkraft .

Im klassischen Grenzfall oder nichtrelativistischen Limes gemäß $\vec{\boldsymbol{u}} \to \vec{\mathbf{0}}$ bzw. $c \to \infty$ gingen dann die Dreiergrößen über in die entsprechenden klassischen Größen. Insofern wären die Dreiergrößen eine relativistische Verallgemeinerung der klassischen Größen. Als bequemen Kompromiss verwenden wir die Bezeichnungen $\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}$ für den **relativistischen Impuls** und $\vec{\boldsymbol{f}}$ für die **Dreierkraft** .

- **Signatur**

Wir verwenden hier im Rahmen der SRT die sog.

„West Coast Metric“ $\{+ - - -\} \mathrel{\widehat{=}} (-2)$.

Folglich sind Vierervektoren beispielsweise $\left(x^\mu\right)$

$$\begin{array}{lll} \text{zeitartig} & \text{falls} & \eta_{\mu\nu}\, x^\mu x^\nu > 0 \,, \\ \text{lichtartig} & \text{falls} & \eta_{\mu\nu}\, x^\mu x^\nu = 0 \,, \\ \text{raumartig} & \text{falls} & \eta_{\mu\nu}\, x^\mu x^\nu < 0 \end{array}$$

und für das Quadrat des Linienelements $\mathrm{d}s$ gilt

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \,.$$

Im Ansatz von Sommerfeld und Minkowski ist die Zeitkoordinate komplexer Natur, sodass das Quadrat des Weltlinienelements $\mathrm{d}s$ die Gestalt

$$\mathrm{d}s^2 = \left(\mathrm{i}\, c\, \mathrm{d}t\right)^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = -c^2 \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

annimmt, was der „East Coast Metric“ $\{- + + +\} \mathrel{\widehat{=}} (+2)$ entspricht.

- **Viererort**

Teilchen (Punktmassen, Massenpunkte) „leben“ in der Raumzeit, genauer gesagt im 4-dimensionalen pseudoeuklidischen Raumzeitkontinuum. Bei der Darstellung der SRT im Viererkalkül benutzt man einen 4-dimensionalen reellen Vektorraum, den **Minkowski-Raum**.

Punkte im Minkowski-Raum heißen Weltpunkte oder Ereignisse und werden definiert durch Ereignisvektoren, d. h. durch die Orts-Vierervektoren oder kurz Viererorte.

Die Viererorte ergeben sich aus der Vakuumlichtgeschwindigkeit c, der Koordinatenzeit t und dem gewöhnlichen Ortsvektor $\vec{\boldsymbol{r}} = (x, y, z)$ wie folgt:

$$\text{kontravariant}: \quad x^\mu \longrightarrow \mathbf{X} = \big(x^\mu\big) = \big(x^0, x^1, x^2, x^3\big) = (ct, x, y, z) = \big(ct, \vec{\boldsymbol{r}}\big) ,$$

$$\text{kovariant}: \quad x_\mu \longrightarrow \big(x_\mu\big) = \big(x_0, x_1, x_2, x_3\big) = (ct, -x, -y, -z) = \big(ct, -\vec{\boldsymbol{r}}\big) .$$

- **Weltlinienelement**

  Teilchen bewegen sich auf Weltlinien durch die Raumzeit. Eine Weltlinie entsteht durch die kontinuierliche Abfolge von Ereignissen. Im Minkowski-Raum wird eine Weltlinie beschrieben durch die kontinuierliche Abfolge von Viererortsvektoren. Demzufolge ist der infinitesimale Abstand zwischen zwei Ereignissen auf einer Weltlinie das lorentz-invariante Weltlinienelement $\mathrm{d}s$, das definiert wird durch

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\nu\,\mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x^\mu = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^{\,2} .$$

  Weil sich Teilchen nicht mit Überlichtgeschwindigkeit und deshalb nur zeitartig bewegen können, gilt im Fall der hier verwendeten Signatur (-2) stets

$$\mathrm{d}s^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad +\sqrt{\mathrm{d}s^2} = \mathrm{d}s > 0 .$$

  Für das Quadrat des Weltlinienelements können wir auch

$$\mathrm{d}s^2 = \left[c^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}t^2 = \left[c^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2\right]\mathrm{d}t^2 = \left(c^2 - u^2\right)\mathrm{d}t^2 \tag{1.1}$$

  schreiben.

- **Eigenzeitdifferential**

  Mit $\mathrm{d}s$ und dem infinitesimalen Eigenzeitintervall oder kurz dem Eigenzeitdifferential

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{\left|\vec{\boldsymbol{u}}(t)\right|^2}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma_u} \quad \text{bezüglich } S \tag{1.2}$$

  erhalten wir aus (1.1) den

$$\text{Differentialquotienten} \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}\,dt}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t} = c \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau .$$

  Das Eigenzeitdifferential ist unabhängig vom Bezugssystem, also lorentz-invariant und folglich ein **Lorentz-Skalar**, denn wir erhalten mit

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t'\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \mathrm{d}t'\sqrt{1 - \frac{\left|\vec{\boldsymbol{u}}\,'(t')\right|^2}{c^2}} = \frac{\mathrm{d}t'}{\gamma_{u'}} \quad \text{bezüglich } S'$$

  das gleiche Ergebnis wie bezüglich S:

$$\frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\sqrt{c^2 - u'^2}\,dt'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t'} = c \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s'}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}s' = c\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s . \ \square$$

2 Zur relativistischen Punktmechanik in elementarer Darstellung

2.1 Lorentz-Transformation

2.1.1 Lorentz-Transformation in Standardkonfiguration

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{bzgl. } S} = -\underbrace{\begin{pmatrix} v_{x'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{bzgl. } S'} , \quad |\vec{\boldsymbol{v}}\,| = v \quad \text{und}$$

$$\gamma(ct - vt) \;=\; \begin{cases} \gamma(x - vt) \;=\; x' \\ \gamma\left(ct - \dfrac{v}{c}\,x\right) \;=\; c\,\gamma\left(t - \dfrac{v\,x}{c^2}\right) \;=\; ct' \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

Lorentz-Transformation:
$$x' = \gamma\big(x - vt\big) \,, \quad y' = y \,, \quad z' = z \,, \quad t' = \gamma\big(t - \tfrac{v}{c^2}\,x\big) \,, \tag{2.1}$$

inverse Lorentz-Transformation:
$$x = \gamma\big(x' + vt'\big) \,, \quad y = y' \,, \quad z = z' \,, \quad t = \gamma\big(t' + \tfrac{v}{c^2}\,x'\big) \,.$$

Die Lorentz-Transformation ergibt angewandt auf Koordinatendifferentiale

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x' &= \gamma\big(\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t\big) \,, \quad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \,, \quad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \,, \\ \mathrm{d}t' &= \gamma\big(\mathrm{d}t - \tfrac{v}{c^2}\,\mathrm{d}x\big) \;=\; \gamma\big(1 - \tfrac{v}{c^2}\,u_x\big)\mathrm{d}t \,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \gamma\big(\mathrm{d}x' + v\,\mathrm{d}t'\big) \,, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y' \,, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z' \,, \\ \mathrm{d}t &= \gamma\big(\mathrm{d}t' + \tfrac{v}{c^2}\,\mathrm{d}x'\big) \;=\; \gamma\big(1 + \tfrac{v}{c^2}\,u'_x\big)\mathrm{d}t' \,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.1.2 Lorentz-Transformation für den $\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost

Diese bezüglich
$$\vec{\boldsymbol{v}} \;=\; \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$
verallgemeinerte, vektorielle Darstellung der Lorentz-Transformation erhalten wir, wenn wir $v = |\vec{\boldsymbol{v}}\,|$ und

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{r}} &\;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel + \vec{\boldsymbol{r}}_\perp \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel \,, \\ \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel &\;=\; \left(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{v}\right)\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{v} = \left(\frac{\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}{v^2}\right)\vec{\boldsymbol{v}} \,. \end{aligned}$$

benutzen. Um die Lorentz-Transformation (2.1) in Standardkonfiguration für den $\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost anwenden zu können, muss $\vec{\boldsymbol{r}}_{\parallel} \upuparrows \vec{\boldsymbol{v}}$ sein, sodass

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{\parallel}\cdot\vec{\boldsymbol{v}} \;=\; \vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}} \;=\; \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} \;=\; vx$$

und damit

$$\vec{\boldsymbol{r}}\,'_{\parallel} = \gamma\big(\vec{\boldsymbol{r}}_{\parallel} - vt\big)\ , \quad \vec{\boldsymbol{r}}\,'_{\perp} = \vec{\boldsymbol{r}}_{\perp}\ , \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{c^2}\right)$$

gilt. Jetzt können wir in (2.1) einsetzen:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{r}}\,' \;&=\; \vec{\boldsymbol{r}}\,'_{\parallel} + \vec{\boldsymbol{r}}\,'_{\perp} = \vec{\boldsymbol{r}}\,'_{\parallel} + \vec{\boldsymbol{r}}_{\perp} = \vec{\boldsymbol{r}}\,'_{\parallel} + \big(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\parallel}\big) \\
&=\; \gamma\big(\vec{\boldsymbol{r}}_{\parallel} - vt\big) + \big(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{\parallel}\big) \\
&=\; \gamma\left[\frac{\big(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\big)}{v^2}\,\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{v}}\,t\right] + \vec{\boldsymbol{r}} - \frac{\big(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\big)}{v^2}\,\vec{\boldsymbol{v}} \\
&=\; \vec{\boldsymbol{r}} \;+\; \vec{\boldsymbol{v}}\left(\gamma\,\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{v^2} - \gamma\,t - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{v^2}\right)\ ,
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{r}}\,' \;=\; \vec{\boldsymbol{r}} \;+\; \vec{\boldsymbol{v}}\left[(\gamma-1)\,\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{v^2} - \gamma\,t\right]\ , \qquad t' \;=\; \gamma\left(t - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{c^2}\right)}\ . \tag{2.4}$$

Analog oder durch relativistische Vertauschung erhält man die für den $\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost inverse Lorentz-Transformation

$$\vec{\boldsymbol{r}} \;=\; \vec{\boldsymbol{r}}\,' \;+\; \vec{\boldsymbol{v}}\left[(\gamma-1)\,\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\,'}{v^2} + \gamma\,t'\right]\ , \qquad t \;=\; \gamma\left(t' + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\,'}{c^2}\right)\ .$$

Die Lorentz-Transformation für den $\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost ergibt angewandt auf Koordinatendifferentiale

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}\,' \;=\; \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} \;+\; \vec{\boldsymbol{v}}\left[(\gamma-1)\,\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{v^2} - \gamma\,\mathrm{d}t\right]\ , \qquad \mathrm{d}t' \;=\; \gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{c^2}\right)}\ , \tag{2.5}$$

denn

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \gamma\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}}{c^2}\right) = \gamma\left(1 - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}t' = \gamma\left(1 - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right)\mathrm{d}t\ . \tag{2.6}$$

2.2 Transformation der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
&\text{in } S \text{ gilt}: \quad \vec{\boldsymbol{u}} \;=\; \big(u_x, u_y, u_z\big) \quad\Rightarrow\quad u^2 \;=\; u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\ , \\
&\text{in } S' \text{ gilt}: \quad \vec{\boldsymbol{u}}\,' = \big(u'_x, u'_y, u'_z\big) \quad\Rightarrow\quad u'^2 = u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z\ .
\end{aligned}$$

2.2.1 Transformation der Geschwindigkeit $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ in Standardkonfiguration

Mit den Differentialen (2.2) erhalten wir die Geschwindigkeitskomponenten u'_x, u'_y, u'_z in S' für einen mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ in S bewegte Punktmasse wie folgt:

$$u'_x \;=\; \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{v\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t}{\gamma\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,u_x}\,,$$

$$u'_y \;=\; \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}{\gamma\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\,u_x\right)}\,, \quad \text{analog } u'_z\,.$$

Die Transformation der Geschwindigkeit in der Standardkonfiguration ist demzufolge

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}\,u_x}\,, \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}\,u_x}\,, \qquad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}\,u_x}\,, \tag{2.7}$$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}\,u'_x}\,, \qquad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}\,u'_x}\,, \qquad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}\,u'_x}\,. \tag{2.8}$$

2.2.2 Transformation der Geschwindigkeit für den $\vec{v}$-Boost

Für Geschwindigkeiten $\vec{v}$ beliebiger Richtung erhalten wir aus (2.4) mit den Differentialen (2.5) und (2.6)

$$\vec{u}\,' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t'} \;=\; \frac{\left\{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \vec{v}\left[(\gamma-1)\,\frac{\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}{v^2} - \gamma\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right]\right\}\mathrm{d}t}{\gamma\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} - \frac{\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}{c^2}\right)\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\vec{u} + \vec{v}\left[(\gamma-1)\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{v^2} - \gamma\right]}{\gamma\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)}\,,$$

$$\boxed{\vec{u}\,' \;=\; \frac{\vec{u} - \vec{v}\left[\gamma\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{v^2}\right) + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{v^2}\right]}{\gamma\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)}}\,. \tag{2.9}$$

Durch relativistische Vertauschung resultiert daraus

$$\vec{\boldsymbol{u}} \;=\; \frac{\vec{\boldsymbol{u}}\,' + \vec{\boldsymbol{v}}\left[\gamma\left(1+\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{v^2}\right) - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{v^2}\right]}{\gamma\left(1+\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{c^2}\right)}\;. \tag{2.10}$$

2.3 Transformation der Beschleunigung

$$\text{in } S \text{ gilt:} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{a}} = \big(a_x, a_y, a_z\big) \quad \Rightarrow \quad a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\,,$$

$$\text{in } S' \text{ gilt:} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{\mathrm{d}t'} = \vec{\boldsymbol{a}}\,' = \big(a'_x, a'_y, a'_z\big) \quad \Rightarrow \quad a'^2 = a_x'^2 + a_y'^2 + a_z'^2\,.$$

2.3.1 Transformation der Beschleunigung in Standardkonfiguration

Bei der Herleitung der Beschleunigung einer Punktmasse, die in S' die (momentane) Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \big(u'_x, u'_y, u'_z\big)$ besitzt, gehen wir aus von der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{\mathrm{d}t'} \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}$$

und damit von den Differentialen $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \big(\mathrm{d}u'_x, \mathrm{d}u'_y, u'_z\big)$ sowie gemäß (2.2) von

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\gamma\big(\mathrm{d}t - \tfrac{v}{c^2}\,\mathrm{d}x\big)\Big] = \gamma\big(1-\tfrac{v}{c^2}\,u_x\big) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}t' = \gamma\big(1-\tfrac{v}{c^2}\,u_x\big)\mathrm{d}t\,.$$

Die Anwendung der Quotientenregel[1] ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}\,u_x}\right) \;&=\; \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\big(1-\tfrac{v}{c^2}\,u_x\big) + \left(\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\tfrac{v}{c^2}\,\big(u_x - v\big)}{\big(1-\tfrac{v}{c^2}\,u_x\big)^2} \\
&=\; \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\big(1-\tfrac{v}{c^2}\,u_x + \tfrac{v}{c^2}\,u_x - \tfrac{v^2}{c^2}\big)}{\big(1-\tfrac{v}{c^2}\,u_x\big)^2} \\
&=\; \frac{\big(1-\tfrac{v^2}{c^2}\big)}{\big(1-\tfrac{v}{c^2}\,u_x\big)^2}\,\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow \qquad \mathrm{d}u'_x \;&=\; \frac{1}{\gamma^2\,\big(1-\tfrac{v}{c^2}\,u_x\big)^2}\,\mathrm{d}u_x\,.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die x'-Komponente der Beschleunigung wie folgt:

$$a'_x \;=\; \frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t'} \;=\; \frac{\dfrac{1}{\gamma^2\,\big(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\big)^2}\,\mathrm{d}u_x}{\gamma\,\big(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\big)\mathrm{d}t} \;=\; \frac{1}{\gamma^3\,\big(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\big)^3}\,a_x\,.$$

[1] In der allgemein gebräuchlichen Notation lautet die Quotientenregel $\big(\frac{a}{b}\big)' = \frac{a'b\,-\,a\,b'}{b^2}$, wobei der Strichindex die erste Ableitung bedeutet.

Auf die gleiche Weise erhalten wir die y'-Komponente der Beschleunigung und völlig analog dazu schließlich auch die z'-Komponente:

$$\frac{\mathrm{d}u'_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)}\right) = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)+\left(\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\gamma\,\frac{v}{c^2}\,u_y}{\gamma^2\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\right)}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)}+\frac{\left(\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{v}{c^2}\,u_y}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}u'_y = \frac{\mathrm{d}u_y}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)}+\frac{\frac{v}{c^2}\,u_y\cdot\mathrm{d}u_x}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)^2}\;.$$

Damit erhalten wir die y'-Komponente und die z'-Komponente der Beschleunigung wie folgt:

$$a'_y = \frac{\mathrm{d}u'_y}{\mathrm{d}t'} = \frac{\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)}\,\mathrm{d}u_y}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)\mathrm{d}t}+\frac{\frac{\frac{v}{c^2}\,u_y}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)^2}\,\mathrm{d}u_x}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)\mathrm{d}t}\;,$$

$$a'_y = \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)^2}\,a_y+\frac{\frac{v}{c^2}\,u_y}{\gamma^2\,\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)^3}\,a_x\;,\quad \text{analog } a'_z\;.$$

Zusammenfassung:

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3\cdot\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)^3}\;,$$

$$a'_y = \frac{a_y}{\gamma^2\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)^2}+\frac{\frac{v}{c^2}\,u_y\cdot a_x}{\gamma^2\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)^3}\;,\quad a'_z = \frac{a_z}{\gamma^2\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)^2}+\frac{\frac{v}{c^2}\,u_z\cdot a_x}{\gamma^2\left(1-\frac{v}{c^2}\,u_x\right)^3}\;,$$

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3\cdot\left(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\right)^3}\;, \tag{2.11}$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2\left(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\right)^2}-\frac{\frac{v}{c^2}\,u'_y\cdot a'_x}{\gamma^2\left(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\right)^3}\;,\quad a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2\left(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\right)^2}-\frac{\frac{v}{c^2}\,u'_z\cdot a'_x}{\gamma^2\left(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\right)^3}\;. \tag{2.12}$$

2.3.2 Transformation der Beschleunigung für den $\vec{v}$-Boost

Um nicht die Übersicht zu verlieren, leiten wir zunächst (2.9) mit der Quotientenregel nach t ab und bilden erst danach das Differential $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}\,'$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}\left[\gamma\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{v^2}\right)+\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{v^2}\right]}{\gamma\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right)}\right\}$$

$$= \frac{\left[\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} + \gamma\,\vec{\boldsymbol{v}}\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}\right)}{v^2} - \vec{\boldsymbol{v}}\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}\right)}{v^2}\right]\cdot\gamma\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right) + \left[\vec{\boldsymbol{u}}\,'\,\gamma\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right)\right]\cdot\gamma\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}\right)}{c^2}}{\gamma^2\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\vec{\boldsymbol{a}} + (\gamma-1)\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{v}\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{v}}{\gamma\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right)} + \frac{\frac{\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{c^2}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}}\,,$$

$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \frac{\vec{\boldsymbol{a}} + (\gamma-1)\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{v}\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{v}}{\gamma\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right)}\,\mathrm{d}t + \frac{\frac{\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{c^2}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Die Division durch (2.6) ergibt schließlich die Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}\,'$ eines Teilchens in S', wenn dieses in S die (momentane) Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}$ und die Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}$ besitzt:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}\,' = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\vec{\boldsymbol{a}} + (\gamma-1)\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{v}\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{v}}{\gamma^2\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right)^2} + \frac{\frac{\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{c^2}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{\gamma\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right)^2}}\,.$$

Falls erforderlich, kann $\vec{\boldsymbol{u}}\,'$ gemäß (2.9) substituiert werden, sodass auf der rechten Seite der Gleichung nur ungestrichene Größen (von S) auftreten. Die entsprechende inverse Transformationsgleichung dazu ist

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}\,' + (\gamma-1)\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\,'\right)}{v}\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{v}}{\gamma^2\left(1+\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{c^2}\right)^2} - \frac{\frac{\left(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\,'\right)}{c^2}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{\gamma\left(1+\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{c^2}\right)^2}\,.$$

An den Transformationsgleichungen für die Beschleunigung ist interessant, dass auf den rechten Seiten neben der Beschleunigung auch noch die Geschwindigkeit vorkommt. Die Beschleunigung eines Körpers in dem einen Bezugssystem hängt demzufolge sowohl von der Beschleunigung als auch von der Geschwindigkeit dieses Körpers im anderen Bezugssystem ab. Das bedeutet, ändert ein Körper aufgrund *konstanter* Beschleunigung seine (momentane) Geschwindigkeit in dem einen System, so ändert sich im anderen System seine Beschleunigung. In dem anderen System ist also die Beschleunigung des Körpers *nicht konstant.*

Aus den Transformationsgleichungen folgt, dass die **Beschleunigung in der SRT keine Invariante** unter Koordinatentransformation ist. Im Gegensatz dazu ist die Beschleunigung in der Newton'schen Mechanik im Fall inertialer Bezugssysteme invariant, denn sie ist dort in jedem Inertialsystem dieselbe gemäß $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[u(t)+v\big] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) = a(t)$ mit der Relativgeschwindigkeit $v = \text{const}$ zwischen den Bezugssystemen. Allerdings ist die Beschleunigung in der SRT eine **absolute Größe**, das bedeutet, ist die Beschleunigung in einem System ungleich Null (bzw. gleich Null), so ist sie auch in allen anderen Systemen ungleich Null (bzw. gleich Null).

In Viererkalkül werden wir später zeigen, dass die Viererbeschleunigung im Minkowski-Raum stets senkrecht auf der Vierergeschwindigkeit steht.

2.4 Transformation von γ_u und $\gamma_{u'}$ in Standardkonfiguration

Wir verwenden die im Abschnitt 2.2.1 hergeleiteten Transformationsgleichungen für die Komponenten der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_x, u_y, u_z)$ in Standardkonfiguration und entwickeln damit zunächst die Transformationsgleichung für das Geschwindigkeitsquadrat $\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2} = |\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}| = u^2$ unter Verwendung des Kürzels $1 + \frac{v\,u'_x}{c^2} = U'$:

$$
\begin{aligned}
u_x^2 &= \left(\frac{u'_x + v}{1 + \frac{v\,u'_x}{c^2}}\right)^2 = \frac{\big(u'_x + v\big)^2}{U'^2} = \frac{\gamma^2\big(u'^2_x + 2u'_x v + v^2\big)}{\gamma^2\,U'^2}\,, \\
u_y^2 &= \left(\frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v\,u'_x}{c^2}}\right)^2 = \left(\frac{u'_y}{\gamma\,U'}\right)^2 = \frac{u'^2_y}{\gamma^2\,U'^2}\,, \\
u_z^2 &= \left(\frac{u'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v\,u'_x}{c^2}}\right)^2 = \left(\frac{u'_z}{\gamma\,U'}\right)^2 = \frac{u'^2_z}{\gamma^2\,U'^2}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2} &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \frac{\gamma^2\big(u'^2_x + 2u'_x v + v^2\big) + u'^2_y + u'^2_z}{\gamma^2\,U'^2} \\
&= \frac{u'^2_x + 2u'_x v + v^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) u'^2_y + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) u'^2_z}{\left(1 + \frac{v\,u'_x}{c^2}\right)^2} \\
\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2} &= \frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,\prime 2} + 2u'_x v + v^2 - \frac{v^2}{c^2}u'^2_y - \frac{v^2}{c^2}u'^2_z}{\left(1 + \frac{v\,u'_x}{c^2}\right)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis setzen wir in den Wurzelausdruck $\frac{1}{\gamma_u}$ ein:

$$\frac{1}{\gamma_u} = \sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,\prime 2} + 2u'_x v + v^2 - \frac{v^2}{c^2}u'^2_y - \frac{v^2}{c^2}u'^2_z}{\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)^2}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\vec{\boldsymbol{u}}^{\,\prime 2} + 2u'_x v + v^2 - \frac{v^2}{c^2}u'^2_y - \frac{v^2}{c^2}u'^2_z\right)}{\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)^2}}$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen liefert

$$\frac{1}{\gamma_u} = \frac{\sqrt{1+2\frac{v\,u'_x}{c^2}+\frac{v^2}{c^4}u'^2_x - \frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,\prime 2}}{c^2} - 2\frac{v\,u'_x}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^4}u'^2_y + \frac{v^2}{c^4}u'^2_z}}{1+\frac{v\,u'_x}{c^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,\prime 2}}{c^2}+\frac{v^2}{c^4}\vec{\boldsymbol{u}}^{\,\prime 2}}}{1+\frac{v\,u'_x}{c^2}} = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,\prime 2}}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{v\,u'_x}{c^2}},$$

$$\frac{1}{\gamma_u} = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,\prime 2}}{c^2}\right)}}{1+\frac{v\,u'_x}{c^2}} = \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)\gamma_{u'}}.$$

Daraus resultiert schließlich unter Anwendung der relativistischen Vertauschung

$$\boxed{\gamma_{u'} = \frac{1-\frac{v\,u_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}} = \gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)\gamma_u}, \tag{2.13}$$

$$\boxed{\gamma_u = \frac{1+\frac{v\,u'_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,\prime 2}}{c^2}}} = \gamma\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)\gamma_{u'}}. \tag{2.14}$$

Für den speziellen Fall in der Standardkonfiguration, dass sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit

$$|\vec{\boldsymbol{u}}\,| = u_x = u \;\text{ in } S \quad \Rightarrow \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

bzw.

$$|\vec{\boldsymbol{u}}\,'| = u'_x = u' \;\text{ in } S' \quad \Rightarrow \quad \gamma_{u'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}$$

längs der x-Achse bzw. längs der x'-Achse bewegt, lauten die Transformationsformeln

$$\gamma_{u'} = \gamma\left(1-\frac{u\cdot v}{c^2}\right)\gamma_u \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}{1-\frac{u\cdot v}{c^2}}\,, \tag{2.15}$$

$$\gamma_u = \gamma\left(1+\frac{u'\cdot v}{c^2}\right)\gamma_{u'} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}{1+\frac{u'\cdot v}{c^2}}\,. \tag{2.16}$$

Wir verifizieren die Transformationsformel (2.15) :

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}\cdot(1-uv/c^2) = \sqrt{\left(1-uv/c^2\right)^2\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)}\,,$$

$$\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \sqrt{\left(1-uv/c^2\right)^2\left(1-\frac{1}{c^2}\,\frac{(u-v)^2}{\left(1-uv/c^2\right)^2}\right)} = \sqrt{\left(1-uv/c^2\right)^2-\frac{(u-v)^2}{c^2}}\,,$$

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}+\frac{u^2v^2}{c^4}} = \sqrt{1-\frac{2uv}{c^2}+\frac{u^2v^2}{c^4}-\frac{u^2}{c^2}+\frac{2uv}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}+\frac{u^2v^2}{c^4}}\,.\ \square$$

Verifizierung von (2.16) :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} &= \sqrt{\frac{\frac{1}{c^4}\left(c^2-u'^2\right)\left(c^2-v^2\right)}{\frac{1}{c^4}\left(c^2+u'v\right)^2}} = \sqrt{\frac{(c+u')(c-u')(c+v)(c-v)}{\left(c^2+u'v\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\Big[(c+u')(c+v)\Big]\cdot\Big[(c-u')(c-v)\Big]}{\left(c^2+u'v\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\Big[\overbrace{(c^2+u'v)}^{a}+\overbrace{(u'c+vc)}^{b}\Big]\cdot\Big[\overbrace{(c^2+u'v)}^{a}-\overbrace{(u'c+vc)}^{b}\Big]}{\underbrace{\left(c^2+u'v\right)^2}_{a^2}}} \\
&= \sqrt{\frac{[a+b]\cdot[a-b]}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \\
\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\,u^2} &= \sqrt{1-\frac{\left(u'c+vc\right)^2}{\left(c^2+u'v\right)^2}} = \sqrt{1-\frac{c^2\left(u'+v\right)^2}{c^4\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}\right)^2}\,.\ \square
\end{aligned}$$

2.5 Transformation der zeitlichen Ableitung von $\gamma_{u'}$ und γ_u in Standardkonfiguration

Wir gehen aus von der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_{u'}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\gamma_{u'}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}\gamma_{u'} = \frac{\mathrm{d}\gamma_{u'}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

und berechnen zunächst die Ableitung von $\gamma_{u'}$ (2.13) nach der Zeit t und geben danach das Differential $\mathrm{d}\gamma_{u'}$ an:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\gamma_{u'} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)\cdot\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \gamma\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{v}{c^2}\,\underbrace{\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}}_{a_x}\right) \\
&\qquad + \gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{2\,\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right)\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{\boldsymbol{a}}}\right] \\
&= \frac{\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right)^3}} - \frac{\gamma\,\frac{v\,a_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \\
\mathrm{d}\gamma_{u'} &= \left[\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}{c^2}\right)\gamma_u^3 - \gamma\,\frac{v\,a_x}{c^2}\,\gamma_u\right]\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Mit dem Differential $\mathrm{d}t' = \gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)\mathrm{d}t$ (2.2) erhalten wir daraus

$$\frac{\mathrm{d}\,\gamma_{u'}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\left[\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}{c^2}\right)\gamma_u^3 - \gamma\,\frac{v\,a_x}{c^2}\,\gamma_u\right]\mathrm{d}t}{\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)\mathrm{d}t} = \frac{\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)\left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}{c^2}\right)\gamma_u^3 - \frac{v\,a_x}{c^2}\,\gamma_u}{1-\frac{v\,u_x}{c^2}}\,.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\,\gamma_{u'}}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}{c^2}\,\gamma_u^3 - \frac{v\,a_x}{c^2 - v\,u_x}\,\gamma_u\,, \\
\frac{\mathrm{d}\,\gamma_u}{\mathrm{d}t} &= \frac{\vec{\boldsymbol{u}}\,'\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\,'}{c^2}\,\gamma_{u'}^3 + \frac{v\,a'_x}{c^2 + v\,u'_x}\,\gamma_{u'}\,.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Berücksichtigen wir abschließend noch

$$\frac{\mathrm{d}\,\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}{c^2}\,\gamma_u^3\,,$$

resultieren die Transformationsgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\,\gamma_{u'}}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\mathrm{d}\,\gamma_u}{\mathrm{d}t} - \frac{v\,a_x}{c^2 - v\,u_x}\,\gamma_u\,, \\
\frac{\mathrm{d}\,\gamma_u}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\,\gamma_{u'}}{\mathrm{d}t'} + \frac{v\,a'_x}{c^2 + v\,u'_x}\,\gamma_{u'}\,.
\end{aligned}$$

2.6 Impulssatz und Massenveränderlichkeit

Dieser Abschnitt ist fast vollständig zitiert aus: Bernd Sonne und Reinhard Weiß, *Einsteins Theorien*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, Seite 74 bis Seite 79. In diesem Abschnitt legen wir die Koordinatensysteme so, dass wir vereinfachend auf die vektorielle Darstellung des Impulses verzichten und allein mit dem Impulsbetrag arbeiten können.

Der Impulserhaltungssatz (kurz: Impulssatz) und der Satz von der Massenerhaltung sind zwei fundamentale Axiome der klassischen Mechanik. Massenerhaltung bedeutet dort, dass die Masse eine körpereigene konstante Größe ist. Der Impuls eines Körpers mit der Masse m und der Geschwindigkeit v ist dann

$$p = m \cdot v \tag{2.18}$$

und die Impulsänderung

$$\Delta p = m \cdot \Delta v\ . \tag{2.19}$$

Die Impulsänderung ist in der klassischen Mechanik entsprechend den o. g. Erhaltungssätzen in jedem Inertialsystem gleich, weil die Geschwindigkeitsänderung Δv unabhängig vom Bezugssystem ist.

In der SRT ist Δv wegen des Additionstheorems für Geschwindigkeiten jedoch abhängig vom Bezugssystem. Wie man an (2.19) erkennt, können wir dann bei einem Wechsel des Bezugssystems den Impulssatz nicht aufrechterhalten, ohne das Axiom von der Massenerhaltung in der klassischen Form aufzugeben.

Der Impulserhaltungssatz soll auch in der SRT gelten. Weil hier aber die Geschwindigkeitsänderung vom Bezugssystem abhängt, muss dann auch die Masse vom Bezugssystem abhängen und entsprechend „angepasst“ werden.

Wir zeigen jetzt an zwei Modellen, wie sich die Masse unter Beibehaltung des Impulssatzes bei einem Wechsel des Bezugssystems verhält.

Achtung! In den Herleitungen verwenden wir noch die „klassische“ Notation und erst mit den Ergebnissen führen wir die relativistische Notation ein.

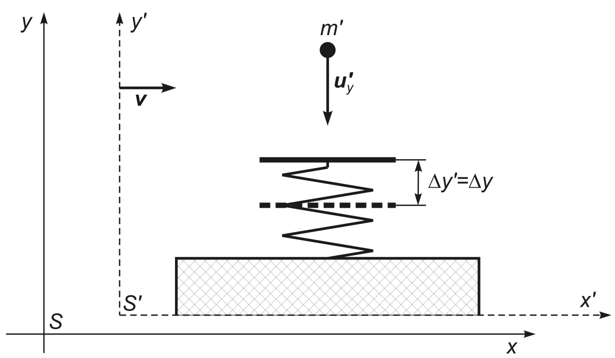

Abb. 2.1 Ein Körper überträgt seinen Impuls $m'u'_y$ in S' auf die Meßvorrichtung und lenkt dabei deren Platte um die Strecke $\Delta y' = \Delta y$ aus. (nach Melcher 1978)

Im **ersten Modell** bewege sich *S'* mit der Geschwindigkeit v längs der x-Achse von S. Die z-Achse werde unterdrückt. Im System *S'* ruhe ein Gerät zur Impulsmessung. Wie in Abb. 2.1 dargestellt, bestehe es aus einem Fundament sehr großer Masse und einer darauf in Richtung der y'-Achse montierten Spiralfeder mit einer bruchfesten Platte. Ein Körper mit einer im Vergleich zum Fundament verschwindend kleinen Masse m' pralle mit der Geschwindigkeit u'_y auf die Platte. Der Körper wird abgebremst und überträgt seinen Impuls auf Platte und Feder. Die Platte wird dabei ausgelenkt und die Feder zusammengedrückt. Im Moment der maximalen Auslenkung $\Delta y'$ hat der Körper seinen gesamten Impuls auf die Feder übertragen. Die maximale Auslenkung $\Delta y'$ entspricht folglich dem Impuls $p' = m'u'_y$ des Körpers in *S'*. Die Auslenkung hängt natürlich noch von der Federkraft ab, die wir hier aber nicht betrachten wollen.

Die Geschwindigkeit des Körpers hat in Richtung der y-Achse von S die Komponente u_y und damit in S die Masse $m(u_y)$ sowie den Impuls $p = mu_y$. Weil Längenänderungen durch die Lorentz-Kontraktion nur in Richtung von v und nicht senkrecht zu v auftreten, gilt für die Auslenkung der Platte

$$\Delta y' = \Delta y \ . \tag{2.20}$$

Wenn aber die dem Impuls entsprechende maximale Auslenkung in den Systemen gleich ist, muss auch der Impuls des Körpers in S gleich seinem Impuls in *S'* sein und wir schreiben

$$p = mu_y = m'u'_y = p' \ . \tag{2.21}$$

Jetzt ersetzen wir u_y in (2.21) entsprechend der Transformationsformel

$$u_y = u'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \tag{2.22}$$

für die Geschwindigkeitskomponente u'_y von *S'* nach S:

$$m \cdot u_y = m \cdot \frac{u'_y \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} = m' \cdot u'_y \ . \tag{2.23}$$

Da in diesem Modell $u'_x = 0$ ist (vgl. Abb. 2.1), erhalten wir aus (2.23) nach Division durch u'_y

$$m \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m' \ . \tag{2.24}$$

Die Gleichung (2.24) gilt für alle u'_y, d. h. auch für $u'_y = 0$. Da der Körper bei $u'_x = 0$ und $u'_y = 0$ in *S'* ruht, bezeichnen wir dann seine Masse m' als seine *Ruhemasse* m_0 und schreiben für (2.24)

$$m_0 = \widetilde{m} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ . \tag{2.25}$$

Schließlich lösen wir (2.25) nach $\widetilde{m}$ auf und erhalten die von der Geschwindigkeit v abhängige Beziehung für die **relativistische Masse**[2]

$$\boxed{\widetilde{m} = \widetilde{m}(v) = m_0 \cdot \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \ . \tag{2.26}$$

[2] Die relativistische Masse wird auch als bewegte träge Masse, dynamische Masse oder als Impulsmasse bezeichnet.

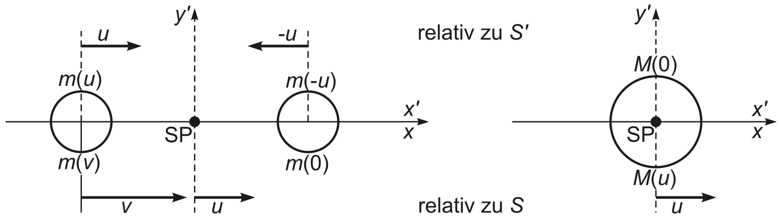

Abb. 2.2 Der unelastische Stoß von zwei *gleichen* Körpern (links vor dem Stoß, rechts nach dem Stoß). Die untere Bildhälfte zeigt die Massen und Geschwindigkeiten relativ zu S, die obere Bildhälfte relativ zum Schwerpunktsystem S'. Der Schwerpunkt ist mit SP bezeichnet.

Das **zweite Modell** ist der spezielle Fall des unelastischen Stoßes zweier *gleicher* Körper (Abb. 2.2). Dabei sollen Masse und Impuls sowohl innerhalb von S als auch in dem längs der x-Achse von S bewegten System S' erhalten bleiben. Außerdem nehmen wir an, dass die Masse der Körper von ihrer Geschwindigkeit abhängt. Der Stoßvorgang soll allein längs der x-Achse ablaufen, sodass die y- und z-Achse unterdrückt werden können.

Wir betrachten den Stoßvorgang zunächst im System S. Der rechte Körper ruhe in S und hat somit die Ruhemasse $m(0) = m_0$. Der linke Körper bewege sich mit der Geschwindigkeit v auf den rechten Körper zu, hat also die Masse $m(v)$. Beim unelastischen Stoß verbinden sich die beiden Körper zu einem Gesamtkörper, der sich mit der Geschwindigkeit u weiterbewegt. Die Masse des Gesamtkörpers ist damit $M(u)$. Für die Massenerhaltung in S schreiben wir

$$m(v) + m_0 = M(u) \tag{2.27}$$

und für den Impulssatz in S

$$m(v) \cdot v + m_0 \cdot 0 = m(v) \cdot v = M(u) \cdot u \; . \tag{2.28}$$

Einsetzen von (2.27) in (2.28) ergibt

$$m(v) = m_0 \, \frac{u}{v-u} \; . \tag{2.29}$$

Jetzt betrachten wir den Stoßvorgang im Schwerpunktsystem S' der beiden Körper bzw. des Gesamtkörpers. Wegen der Massen- und Impulserhaltung in S muss der Massenschwerpunkt in S vor und nach dem Stoß die gleiche Geschwindigkeit u haben.

Der Gesamtkörper mit der Masse $M(u)$ ruht in seinem Schwerpunktsystem S'. Folglich bewegt sich S' mit der Geschwindigkeit u relativ zu S. Daraus wiederum folgt, dass sich der in S ruhende rechte Körper mit der Geschwindigkeit $-u$ relativ zu S' bewegt. Weil sich aber im Schwerpunktsystem die zwei gleichen Körper mit betragsgleicher Geschwindigkeit aufeinander zubewegen müssen, hat der linke Körper in S' die Geschwindigkeit u. Damit schreiben wir für die Massenerhaltung in S'

$$m(u) + m(-u) = M(0) = M_0 \tag{2.30}$$

und für den Impulssatz

$$m(u) \cdot u + m(-u) \cdot (-u) = M_0 \cdot 0 = 0 \; . \tag{2.31}$$

Jetzt können wir die Geschwindigkeit v des linken Körpers in S berechnen. Er hat relativ zu S' die Geschwindigkeit u, und S' hat relativ zu S gleichfalls die Geschwindigkeit u.

Diese beiden Geschwindigkeiten addieren sich bezüglich S nach dem Additionstheorem für Geschwindigkeiten zu

$$v = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} \; . \tag{2.32}$$

Aus (2.32) erhalten wir die quadratische Gleichung

$$u^2 - \frac{2c^2}{v} u + c^2 = 0 \tag{2.33}$$

mit den Lösungen

$$u = \frac{c^2}{v} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{v}\right)^2 - c^2} = \frac{c^2}{v}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \; . \tag{2.34}$$

Für $v = 0$ darf die Lösung nicht divergieren. Deshalb bilden wir die Grenzwerte der Lösungen (2.34) für $v \to 0$ und verwenden dabei die Entwicklung $\sqrt{1-(v/c)^2} = 1 - \frac{1}{2}(v/c)^2 - \frac{1}{8}(v/c)^4 - \cdots$. Wir finden

$$\lim_{v \to 0} \frac{c^2}{v}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \lim_{v \to 0}\left(\frac{c^2}{v} + \frac{c^2}{v} - \frac{v}{2} - \frac{v^3}{8c^2} - \cdots\right) = \infty \; , \tag{2.35}$$

$$\lim_{v \to 0} \frac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = \lim_{v \to 0}\left(\frac{c^2}{v} - \frac{c^2}{v} + \frac{v}{2} + \frac{v^3}{8c^2} + \cdots\right) = 0 \; . \tag{2.36}$$

Folglich setzen wir die Lösung mit der negativen Wurzel in (2.29) ein und erhalten mit[3]

$$\frac{u}{v-u} = \frac{\frac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)}{v - \frac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.37}$$

die Beziehung für die *relativistische Masse* des in S bewegten linken Körpers als Funktion seiner Geschwindigkeit v:

$$\boxed{\widetilde{m}(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \; . \tag{2.38}$$

Dies ist die Formel für die relativistische oder bewegte träge Masse. In (2.38) ist m_0 die Ruhemasse des linken Körpers, dessen Ruhesystem sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S bewegt.

Die Beziehung (2.38) beschreibt, wie sich die Masse eines Körpers bei einem Systemwechsel verändert, während innerhalb der Systeme bei physikalischen Prozessen die Masse und der Impuls erhalten bleiben. Sowohl für den klassischen Grenzfall $c \to \infty$ als auch für $v = 0$ wird die relativistische Masse m zur Ruhemasse m_0.

[3]Wir zeigen durch entsprechende Äquivalenzumformungen, dass die Gleichung (2.37) erfüllt ist:
$\Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = v - \frac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$
$\Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{c^2}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{c^2}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + v - \frac{c^2}{v} \quad \Leftrightarrow \quad v - \frac{c^2}{v} = v - \frac{c^2}{v}$.

2.7 Zum Massebegriff

Die 5 Eigenschaften der **relativistischen Masse** zitieren wir, in Anführungszeichen gesetzt, aus dem Beitrag

Masse (Physik) – Wikipedia.

Achtung! In diesem Wikipedia-Beitrag wird nicht die traditionelle Notation m_0 für die Ruhemasse und m für die relativistische oder Impulsmasse verwendet, sondern es wird ausdrücklich die moderne Notation m für Masse im Sinne der Ruhemasse gewählt und auf den Begriff der relativistischen Masse möglichst verzichtet. Nur in speziellen Fällen wird der Begriff relativistische Masse m_{rel} verwendet.

„1. **Trägheit**:
   Aufgrund seiner Masse setzt ein System einer Kraft, die seine Geschwindigkeit in Größe und/oder Richtung ändert, einen Widerstand entgegen:
   Die Geschwindigkeitsänderung ist umgekehrt proportional zur Masse, hängt aber in Richtung und Größe auch von der Größe der Geschwindigkeit und dem Winkel zwischen der Kraft und der Geschwindigkeit ab.

2. **Gravitationsladung**:
   Zwei Systeme ziehen sich aufgrund der in ihnen enthaltenen Massen, Energien und Impulse gegenseitig an.

3. **Invariante Größe Masse**:
   Die Masse eines Systems hängt nicht von seiner Geschwindigkeit ab; sie bleibt unverändert, wenn man durch eine Lorentz-Transformation das Bezugssystem wechselt, in dem das System betrachtet wird.

4. **Additivität**:
   Die Masse eines zusammengesetzten Systems ist gleich der Summe der Massen seiner Einzelteile, abzüglich des Massenäquivalents der Bindungsenergie, die zur vollständigen Trennung der gebundenen Einzelteile zugeführt werden müsste, und zugleich des Massenäquivalents der kinetischen Energien derjenigen Einzelteile, die als freie Teilchen zum System gehören.

5. Bei allen Prozessen bleibt die Summe aller **Energien erhalten**. Die mit den Massen verknüpften Ruheenergien sind darin enthalten. Die Summe der Massen allein bleibt nicht immer erhalten.

Im Endergebnis definiert man ganz allgemein die Masse mittels der Gleichung[4] $E_0 = m \cdot c^2$ durch die Ruheenergie."

[4] In traditioneller Notation lautet diese Gleichung $E_0 = m_0 \cdot c^2$ mit der Ruhemasse m_0.

2.8 Relativistischen Masse und ihre Transformation in Standardkonfiguration

2.8.1 Die relativistischen Masse in Standardkonfiguration

Wir gehen aus von dem im Abschnitt 2.6 diskutierten Impulssatz (2.21)

$$m' u'_y \;=\; m\, u_y \qquad \Rightarrow \qquad \widetilde{m}' u'_y \;=\; \widetilde{m}\, u_y \;. \tag{2.39}$$

Dort wird im ersten Modell für die Teilchengeschwindigkeit der spezielle Fall

$$\begin{aligned} &\vec{\boldsymbol{u}}\,' = (0, u'_y, 0) \;\;\Rightarrow\;\; \vec{\boldsymbol{u}} = (u_x{=}v,\; u_y,\; 0) \\ &\longrightarrow \qquad \text{für } u'_y \overset{!}{\equiv} 0 \quad \Rightarrow \quad u_y \equiv 0 \quad \Rightarrow \\ &\vec{\boldsymbol{u}}\,' = (0,0,0) \quad \Rightarrow \;\; \vec{\boldsymbol{u}} = (u_x{=}v,\; 0,\; 0) \end{aligned}$$

angenommen. Die Formel für die geschwindigkeitsabhängige Massenveränderlichkeit wird dann folglich in der Standardkonfiguration für den Fall hergeleitet, dass sich das Teilchen nur in S und dort auch nur mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_x = v,\; 0,\; 0) \;\Rightarrow\; |\vec{\boldsymbol{u}}\,| = v$ längs der x-Achse bewegt.

Mit der Transformationsgleichung für die Geschwindigkeitskomponente

$$u'_y = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v\,u_x}{c^2}}\, u_y$$

erhalten wir also aus (2.39)

$$\widetilde{m}'\,\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v\,u_x}{c^2}}\, u_y \;=\; \widetilde{m}\, u_y \quad \forall u_y$$

und nach darauf folgender Äquivalenzumformung die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} \widetilde{m}' \;&=\; \frac{\widetilde{m}\left(1-\dfrac{v\,u_x}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;=\; \widetilde{m}\,\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right) \quad \xRightarrow[\text{Vertauschung}]{\text{relativistische}} \\ \widetilde{m} \;&=\; \frac{\widetilde{m}'\left(1+\dfrac{v\,u'_x}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;=\; \widetilde{m}'\,\gamma\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right) \;. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Und für $u'_x = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \vec{\boldsymbol{u}} \equiv \vec{\boldsymbol{v}}\,,\; |\vec{\boldsymbol{u}}\,| = u = |\vec{\boldsymbol{v}}\,| = v$ resultiert schließlich

$$\widetilde{m} \;=\; \frac{\widetilde{m}'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{m}(v) \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;=\; \gamma\, m_0$$

mit der Ruhemasse $\;m_0 = \widetilde{m}'\big(u'_x = 0\big)$ in S'. Das bedeutet:

$\widetilde{m} = \widetilde{m}(u_x)$ ist die relativistische Masse in S, also die mit u_x längs der x-Achse bewegte träge Masse.

$\widetilde{m}' = \widetilde{m}'(u'_x)$ ist die relativistische Masse in S', also die mit u'_x längs der x'-Achse bewegte träge Masse.

$\widetilde{m} = \widetilde{m}(v)$ ist die relativistische Masse in S, also die mit $u_x \equiv v$ bezüglich S (und folglich mit $|\vec{\boldsymbol{u}}\,'| \equiv 0$ bezüglich S') längs der x-Achse bewegte träge Masse.

m_0 ist die Ruhemasse eines Teilchens in dem System, in welchem dieses Teilchen ruht (in S für $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ bzw. hier in S' für $\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \vec{\boldsymbol{0}}$).

Die **relativistische Masse** eines Teilchens ist eine **skalare Größe**. Sie ist abhängig vom **Betrag** der Geschwindigkeit des Teilchens in dem System, in welchem es beobachtet wird.
Infolgedessen ist die Ableitung der relativistischen Masse $\widetilde{m} = \widetilde{m}\big(|\vec{\boldsymbol{u}}(t)|\big)$ in S bzw. $\widetilde{m}' = \widetilde{m}'\big(|\vec{\boldsymbol{u}}\,'(t')|\big)$ in S' nach dem Skalar Zeit ebenfalls eine skalare Größe.

2.8.2 Transformation der relativistischen Masse in Standardkonfiguration für beliebige Teilchengeschwindigkeiten

Es gilt also allgemein für die relativistische Masse eines Teilchens der Ruhemasse m_0 mit der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{u}} \text{ in } S \quad &\Rightarrow \quad \widetilde{m} = \widetilde{m}(\vec{\boldsymbol{u}}) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}} = m_0\,\gamma_u\,, \\
\vec{\boldsymbol{u}}\,' \text{ in } S' \quad &\Rightarrow \quad \widetilde{m}' = \widetilde{m}'(\vec{\boldsymbol{u}}\,') = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}\,'^2}{c^2}}} = m_0\,\gamma_{u'}\,.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Damit und mit den Transformationsformeln (2.13) für γ_u nach $\gamma_{u'}$ und (2.14) für $\gamma_{u'}$ nach γ_u ergeben sich sofort die Transformationsformeln für die relativistische Masse in der Standardkonfiguration:

$$\widetilde{m} = m_0\,\gamma_u \overset{(2.14)}{=} m_0 \underbrace{\left[\gamma_{u'}\cdot\gamma\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)\right]}_{=\gamma_u} = \underbrace{m_0\,\gamma_{u'}}_{=\widetilde{m}'}\cdot\gamma\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\widetilde{m} = \widetilde{m}'\cdot\gamma\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}\,'^2}{c^2}}}\cdot\frac{1+\frac{v\,u'_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}\,, \tag{2.42}$$

$$\boxed{\widetilde{m}' = \widetilde{m}\cdot\gamma\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}}\cdot\frac{1-\frac{v\,u_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}\,.$$

Dass die Transformationsgleichungen (2.40) und (2.42) in ihrer Form übereinstimmen zeigt, dass die relativistische Masse entsprechend

$$\left.\begin{aligned} v^2 = u_x^2 &= |\vec{\boldsymbol{u}}\,|^2 \\ \text{bzw.} \\ \vec{\boldsymbol{u}}^{\,2} &= |\vec{\boldsymbol{u}}\,|^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{|\vec{\boldsymbol{u}}\,|^2}{c^2}}}$$

vom Betrag der Teilchengeschwindigkeit abhängt und deshalb unabhängig von der Richtung der Teilchenbewegung ist.

2.9 Transformation der zeitlichen Ableitung der relativistischen Masse in Standardkonfiguration

Wir benutzen wieder die Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{m}}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\widetilde{m} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\,\widetilde{m}\cdot \mathrm{d}t'$$

und substituieren $\widetilde{m}$ gemäß der Transformationsgleichung (2.42):

$$\mathrm{d}\widetilde{m} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(m_0 \frac{1+\frac{v\,u'_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}'^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\mathrm{d}t' \;=\; m_0\,\gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left[\gamma_{u'}\cdot\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)\right]\mathrm{d}t'\;.$$

Die Anwendung der Produktregel ergibt

$$\mathrm{d}\widetilde{m} \;=\; m_0\,\gamma\left[\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}\gamma_{u'}}{\mathrm{d}t'} + \gamma_{u'}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)\right]\mathrm{d}t'\;.$$

Mit $\frac{\mathrm{d}\,u'_x}{\mathrm{d}t'} = a'_x$, $\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}'}{\mathrm{d}t'} = \vec{\boldsymbol{a}}'$ und

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_{u'}}{\mathrm{d}t'} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}'^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \;=\; -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}'^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{2\,\vec{\boldsymbol{u}}'}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}'}{\mathrm{d}t'} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_{u'}}{\mathrm{d}t'} \;=\; \gamma_{u'}^3\,\frac{\vec{\boldsymbol{u}}'\cdot\vec{\boldsymbol{a}}'}{c^2} \tag{2.43}$$

erhalten wir daraus

$$\mathrm{d}\widetilde{m} \;=\; m_0\,\gamma\left[\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)\gamma_{u'}^3\,\frac{\vec{\boldsymbol{u}}'\cdot\vec{\boldsymbol{a}}'}{c^2} \;+\; \gamma_{u'}\,\frac{v\,a'_x}{c^2}\right]\mathrm{d}t'\;.$$

Die Division durch das Koordinatenzeitdifferential (2.3) $\mathrm{d}t = \gamma\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)\mathrm{d}t'$ ergibt

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{m}}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{m_0\,\gamma\left[\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)\gamma_{u'}^3\,\frac{\vec{\boldsymbol{u}}'\cdot\vec{\boldsymbol{a}}'}{c^2} \;+\; \gamma_{u'}\,\frac{v\,a'_x}{c^2}\right]\mathrm{d}t'}{\gamma\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)\mathrm{d}t'}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{m}}{\mathrm{d}t} \;=\; m_0\left(\gamma_{u'}^3\,\frac{\vec{\boldsymbol{u}}'\cdot\vec{\boldsymbol{a}}'}{c^2} \;+\; \gamma_{u'}\,\frac{\frac{v\,a'_x}{c^2}}{1+\frac{v\,u'_x}{c^2}}\right). \tag{2.44}$$

Berücksichtigen wir jetzt noch (2.41) und (2.43), also

$$m_0\cdot\gamma_{u'} \;=\; \widetilde{m}' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\widetilde{m}'}{\mathrm{d}t'} \;=\; m_0\cdot\frac{\mathrm{d}\gamma_{u'}}{\mathrm{d}t'} \;=\; m_0\cdot\gamma_{u'}^3\,\frac{\vec{\boldsymbol{u}}'\cdot\vec{\boldsymbol{a}}'}{c^2}\,,$$

resultieren schließlich die Transformationsgleichungen für die zeitliche Ableitung der relativistischen Masse:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\widetilde{m}}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}\widetilde{m}'}{\mathrm{d}t'} \;+\; \widetilde{m}'\,\frac{v}{c^2}\left(1+\frac{v\,u'_x}{c^2}\right)^{-1} a'_x}\,, \tag{2.45}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\widetilde{m}'}{\mathrm{d}t'} \;=\; \frac{\mathrm{d}\widetilde{m}}{\mathrm{d}t} \;-\; \widetilde{m}\,\frac{v}{c^2}\left(1-\frac{v\,u_x}{c^2}\right)^{-1} a_x}\,.$$

2.10 Masse-Energie-Äquivalenz – Herleitung von $E = \widetilde{m} \cdot c^2$

Ein zunächst ruhendes Masseteilchen mit der Ruhemasse m_0 werde von der Geschwindigkeit $v = 0$ auf die Geschwindigkeit v beschleunigt. Es besitzt dann entsprechend der relativistischen Massenveränderlichkeit die

$$\text{relativistische Masse} \quad \widetilde{m}(v) \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

und hat während des Beschleunigungsvorgangs die kinetische Energie E_{kin} erhalten. Für die weitere Herleitung wird zur Definition der Kraft anstatt der klassischen Form

$$F(t) = \frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = m \cdot a(t)$$

mit $m = \text{const}$ die relativistische Form

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}p_\mathrm{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[\widetilde{m}(t) \cdot v(t)\big] = v(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\widetilde{m}(t)}{\mathrm{d}t} + \widetilde{m}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.46}$$

mit

$$\widetilde{m}\big(v(t)\big) \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{[v(t)]^2}{c^2}}}$$

verwendet. Aus dem Arbeitsintegral

$$E(s) \;=\; \int f(s)\,\mathrm{d}s$$

erhält man durch Substitution von $\mathrm{d}s = v \cdot \mathrm{d}t$ die Energie

$$E(t) \;=\; \int f(t) \cdot v(t) \cdot \mathrm{d}t$$

als Funktion der Zeit. Mit der Anfangsbedingung $v(t) = v(0) = 0$ und unter Verwendung der relativistischen Form der Kraft ist die kinetische Energie des o. g. Masseteilchens dann

$$E_{kin} \;=\; \int\limits_{t=0,\, v=0}^{t,\, v} f(t) \cdot v(t) \cdot \mathrm{d}t = \int\limits_{t=0,\, v=0}^{t,\, v} \left[v \cdot \frac{\mathrm{d}\widetilde{m}}{\mathrm{d}t} + \widetilde{m} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right] \cdot v(t) \cdot \mathrm{d}t\,,$$

$$E_{kin} \;=\; \int\limits_{t=0,\, v=0}^{t,\, v} v(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\widetilde{m}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot v(t) \cdot \mathrm{d}t + \int\limits_{t=0,\, v=0}^{t,\, v} \widetilde{m}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \cdot v(t) \cdot \mathrm{d}t\,,$$

$$E_{kin} = \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\widetilde{m}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \big[v(t)\big]^2 \cdot \mathrm{d}t + \int\limits_0^v \widetilde{m}(v) \cdot v \cdot \mathrm{d}v\,. \tag{2.47}$$

Lösung des Teilintegrals

$\int\limits_0^t \big[\mathrm{d}\widetilde{m}(t)/\mathrm{d}t\big] \cdot \big[v(t)\big]^2 \cdot \mathrm{d}t$ durch partielle Integration $\int\limits_0^t h'\,k\,\mathrm{d}t \;=\; h\,k\big|_0^t - \int\limits_0^t h\,k'\,\mathrm{d}t$:

$$h' = \frac{\mathrm{d}\widetilde{m}(t)}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad h = \widetilde{m}(t)$$

$$k = \big[v(t)\big]^2 \qquad\qquad k' = 2v(t) \cdot v'(t)$$

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}\widetilde{m}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \big[v(t)\big]^2 \cdot \mathrm{d}t = \widetilde{m}(t) \cdot \big[v(t)\big]^2 \Big|_0^t - \int_0^t \widetilde{m}(t) \cdot 2v(t) \cdot \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t$$

$$= \widetilde{m}(v) \cdot v^2 \Big|_0^v - 2 \int_0^v \widetilde{m}(v) \cdot v \, \mathrm{d}v \; . \tag{2.48}$$

Einsetzen von (2.48) in (2.47) ergibt

$$E_{kin} = \widetilde{m}(v) \cdot v^2 \Big|_0^v - 2 \int_0^v \widetilde{m}(v) \cdot v \, \mathrm{d}v + \int_0^v \widetilde{m}(v) \cdot v \, \mathrm{d}v$$

$$E_{kin} = \widetilde{m}(v) \cdot v^2 \Big|_0^v - \int_0^v \widetilde{m}(v) \cdot v \, \mathrm{d}v \; . \tag{2.49}$$

Mit $\widetilde{m}(v) = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ erhält man aus (2.49)

$$E_{kin} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v^2 \Bigg|_0^v - \int_0^v \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v \, \mathrm{d}v \; .$$

Ausklammern von $1/c^2$ aus $1 - v^2/c^2$ des letzten Integranden liefert

$$E_{kin} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Bigg|_0^v - m_0 c \int_0^v \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \, \mathrm{d}v \; . \tag{2.50}$$

Lösung des Integrals $\int \big(v/\sqrt{c^2 - v^2}\,\big) \, \mathrm{d}v$ durch Anwendung des Substitutionsverfahrens:

$$c^2 - v^2 = q \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}v} = -2v \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}v = -\frac{1}{2v}\mathrm{d}q$$

$$\int \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \, \mathrm{d}v = \int \frac{v}{q^{1/2}} \left(-\frac{1}{2v}\right) \mathrm{d}q = -\frac{1}{2} \int q^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}q = -q^{1/2} + C \; ,$$

$$q = c^2 - v^2 \quad \text{(Rücksubstitution)} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \, \mathrm{d}v = -\sqrt{c^2 - v^2} + C \; . \tag{2.51}$$

Einsetzen von (2.51) in (2.50) ergibt die Formel für die kinetische Energie des Masseteilchens:

$$\begin{aligned}
E_{kin} &= \left.\frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right|_0^v - m_0 c\left(-\sqrt{c^2-v^2}\right)\Big|_0^v \\
&= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c\sqrt{c^2-v^2} - m_0 c\sqrt{c^2} \\
&= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2 \\
&= \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \\
&= \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 - m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \\
&= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2 - m_0 c^2 \\
E_{kin} &= \widetilde{m} c^2 - m_0 c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{m} c^2 = m_0 c^2 + E_{kin}\,. \qquad (2.52)
\end{aligned}$$

$m_0 \cdot c^2 = E_0$ ist der Energieinhalt der Ruhemasse m_0, d. h. die Ruheenergie bei $v = 0$. $\widetilde{m} \cdot c^2 = E$ ist der Energieinhalt der relativistischen Masse $\widetilde{m}$, d. h. die relativistische Energie einschließlich der kinetischen Energie E_{kin} durch die Geschwindigkeit v. Damit resultiert aus (2.46) Einsteins berühmte Formel für die **Masse-Energie-Äquivalenz**

$$\boxed{E = \widetilde{m} \cdot c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2}\,.$$

2.11 Der relativistische Energie-Impuls-Satz

Dieser Abschnitt ist fast vollständig zitiert aus: Bernd Sonne und Reinhard Weiß, *Einsteins Theorien*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, Seite 79 bis Seite 81.

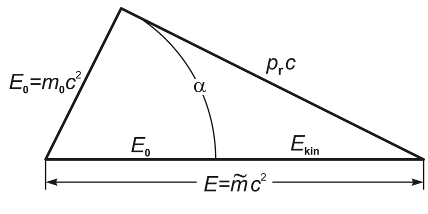

Abb. 2.3 Veranschaulichung des Energie-Impuls-Satzes durch ein rechtwinkliges Dreieck entsprechend dem Satz des Pythagoras $E_0^2 + (p_r\, c)^2 = E^2$. (nach Melcher 1978)

Der relativistische Energie-Impuls-Satz, vereinfacht auch Energie-Impuls-Satz genannt, lässt sich formal aus der Formel für die relativistische Masse

$$\widetilde{m} \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.53}$$

herleiten, indem wir diese mit $c^2\sqrt{1-v^2/c^2}$ multiplizieren, dann quadrieren und anschließend noch einmal umformen:

$$\left((\widetilde{m}\cdot c^2\sqrt{1-v^2/c^2}\,\right)^2 \;=\; \left(m_0\cdot c^2\right)^2 \;, \tag{2.54}$$

$$\left(\widetilde{m}\cdot c^2\right)^2 - \widetilde{m}^2 c^4\,\frac{v^2}{c^2} \;=\; \left(m_0\cdot c^2\right)^2 \;, \tag{2.55}$$

$$\left(\widetilde{m}\cdot c^2\right)^2 \;=\; \left(m_0\cdot c^2\right)^2 + \widetilde{m}^2 v^2 c^2 \;. \tag{2.56}$$

Mit der relativistischen (Gesamt-)Energie $\widetilde{m}c^2 = E$, der Ruheenergie $m_0c^2 = E_0$ und dem relativistischen Impuls $\widetilde{m}v = p_\mathrm{r}$ resultiert der **relativistische Energie-Impuls-Satz**

$$\boxed{E^2 \;=\; E_0^2 + p_\mathrm{r}^2\,c^2 \;=\; m_0^2\,c^4 + p_\mathrm{r}^2\,c^2} \;. \tag{2.57}$$

Die relativistische Gesamtenergie ist aber auch $E = E_0 + E_{kin}$ mit der kinetischen Energie

$$E_{kin} \;=\; E - E_0 \;=\; \gamma\, m_0c^2 - m_0c^2 \;=\; m_0c^2\,(\gamma-1)\,. \tag{2.58}$$

Durch Abbildung 2.3 wird die Gleichung (2.57) entsprechend dem Satz des Pythagoras durch ein rechtwinkliges Dreieck veranschaulicht. Es gilt demzufolge für Licht mit

$$v = c \quad\Rightarrow\quad m_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad E_0 = 0\,:$$

$$E = \widetilde{m}c^2 = p_\mathrm{r}c\;. \tag{2.59}$$

Licht besitzt also die relativistische Masse $\widetilde{m}$ und den relativistischen Impuls p_r. Mit dem Planck'schen Wirkungsquantum h, der Lichtfrequenz ν und der fundamentalen quantenmechanischen Beziehung

$$\varepsilon = h\cdot\nu \tag{2.60}$$

für die Energie ε eines Photons (Lichtteilchens) erhält man aus (2.59)

$$\varepsilon = \widetilde{m}c^2 = p_\mathrm{r}c = h\nu \quad\Leftrightarrow\quad \widetilde{m} = \frac{p_\mathrm{r}}{c} = \frac{h\nu}{c^2}\;. \tag{2.61}$$

Wie man sieht, besitzen Photonen zwar keine Ruhemasse, aber eine relativistische Masse und einen relativistischen Impuls, die zu ihrer Energie und ihrer Frequenz proportional sind.

Weiterhin geht aus der Abbildung 2.3

$$\sin\alpha = \frac{p\cdot c}{E} = \frac{\widetilde{m}\,v\cdot c}{\widetilde{m}\,c^2} = \frac{v}{c} \tag{2.62}$$

hervor. Wird ein Masseteilchen mit einer Geschwindigkeit v nahe c durch Energiezufuhr weiter beschleunigt, so kann v kaum noch anwachsen, obwohl der Teilchenimpuls $p_\mathrm{r} = \widetilde{m}v$ weiter zunimmt. Die Impuls- bzw. Energiezunahme erfolgt deshalb bei Masseteilchen mit Geschwindigkeiten nahe c im Wesentlichen durch Zunahme ihrer relativistischen Masse. Dabei werden das Verhältnis $E/E_0 = \widetilde{m}/m_0$ und der Winkel α immer größer, sodass bei $v \approx c$ bzw. $\sin\alpha = v/c \approx 1$ schließlich alle Masseteilchen gleicher Energie E trotz unterschiedlicher Ruhemasse nahezu die gleiche relativistische Masse besitzen. Oder anders gesagt: Wenn v/c sehr nahe bei 1 ist, dann kann man die Ruhemasse gegenüber der relativistischen Masse vernachlässigen.

2.12 Transformation und Invarianz von Impuls und Energie

Zur Vereinfachung und o. B. d. A. verwenden wir in diesem Abschnitt die **Standardkonfiguration**. Betrachten wir also ein Teilchen der Ruhemasse m_0, das sich in S mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}$ bewegt. Es hat dann den

relativistischen Impuls $\quad \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}} = m_0\,\gamma_u \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$

und die

relativistische Energie $\quad E = m_0\,\gamma_u \cdot c^2 = \widetilde{m} \cdot c^2 \;.$

Der **relativistische Energie-Impuls-Satz** lautet damit

$$E^2 = p_{\mathrm{r}}^2 \cdot c^2 + m_0^4 \cdot c^4 \quad \Leftrightarrow \quad p_{\mathrm{r}}^2 = \frac{E^2}{c^2} - m_0^4\,c^2 \;. \tag{2.63}$$

Wie man sieht, ist der relativistische Energie-Impuls-Satz lorentz-invariant, denn in ihm erscheinen Impuls und Energie unabhängig von irgendwelchen Koordinaten. Bei der Transformation der Komponenten des relativistischen Impulses von S nach S' benutzen wir die Transformationsformeln

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}\,, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}\,, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

für die Geschwindigkeit und

$$\gamma_{u'} = \gamma_u\,\gamma\left(1 - \frac{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}{c^2}\right) = \gamma_u\,\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

für den Faktor $\gamma_{u'}$. Die x-Komponente des relativistischen Impulses in S' erhalten wir damit wie folgt:

$$\begin{aligned}
p'_{\mathrm{r}x} &= m_0 \cdot \gamma_{u'} \cdot u'_x \\
&= m_0 \cdot \gamma_u\,\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) \cdot \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \gamma \cdot \underbrace{m_0\,\gamma_u}_{=\widetilde{m}} \cdot (u_x - v) \\
p'_{\mathrm{r}x} &= \gamma\big(\widetilde{m}\,u_x - \widetilde{m}\,v\big)\;.
\end{aligned}$$

Mit $\widetilde{m}\,u_x = p_{\mathrm{r}x}$ und $E = \widetilde{m} \cdot c^2 \;\Leftrightarrow\; \widetilde{m} = \frac{E}{c^2}$ folgt daraus

$$\boxed{p'_{\mathrm{r}x} = \gamma\left(p_{\mathrm{r}x} - \frac{v}{c^2}\,E\right)\,, \qquad p_{\mathrm{r}x} = \gamma\left(p'_{\mathrm{r}x} + \frac{v}{c^2}\,E'\right)} \tag{2.64}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
m_0\,\gamma_{u'} \cdot u'_x &= m_0\,\gamma_u \cdot \gamma\big(u_x - v\big)\,, &\qquad m_0\,\gamma_u \cdot u_x &= m_0\,\gamma_{u'} \cdot \gamma\big(u'_x + v\big)\,, \\
\widetilde{m}' \cdot u'_x &= \widetilde{m} \cdot \gamma\big(u_x - v\big)\,, & \widetilde{m} \cdot u_x &= \widetilde{m}' \cdot \gamma\big(u'_x + v\big)\;.
\end{aligned}$$

Die y-Komponente des relativistischen Impulses in S' und dazu völlig analog auch die z-Komponente lassen sich in der gleichen Weise berechnen:

$$\begin{aligned} p'_{\mathrm{r}y} &= m_0 \cdot \gamma_{u'} \cdot u'_y \\ &= m_0 \cdot \gamma_u \, \gamma \left(1 - \frac{u_x \, v}{c^2}\right) \cdot \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x \, v}{c^2}\right)} = \underbrace{m_0 \, \gamma_u}_{=\widetilde{m}} \cdot u_y \ , \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p'_{\mathrm{r}y} &= p_{\mathrm{r}y} \ , \\ p'_{\mathrm{r}z} &= p_{\mathrm{r}z} \end{aligned}} \ . \tag{2.65}$$

Schließlich berechnen wir die Transformationsformel für die relativistische Energie eines Teilchens:

$$\begin{aligned} \frac{E'}{c^2} &= \widetilde{m} = m_0 \cdot \gamma_{u'} = m_0 \cdot \gamma_u \, \gamma \left(1 - \frac{u_x \, v}{c^2}\right) \\ &= \gamma \left(\frac{\gamma_u \, m_0 \cdot c^2}{c^2} - \frac{\gamma_u \, m_0 \, u_x \cdot v}{c^2}\right) = \gamma \left(\frac{E}{c^2} - \frac{p_{\mathrm{r}x} \cdot v}{c^2}\right) \ , \end{aligned}$$

$$\boxed{E' = \gamma\Big(E - v \, p_{\mathrm{r}x}\Big) \ , \qquad E = \gamma\Big(E' + v \, p'_{\mathrm{r}x}\Big)} \ . \tag{2.66}$$

Die Gleichungen (2.64), (2.65) und (2.66) lassen „sich auf eine beliebige Anzahl von Teilchen sowie auf Impuls- und Energieunterschiede (Δp, ΔE) verallgemeinern. Aus der Aussage der Impulserhaltung $\Delta p = 0$ oder der Energieerhaltung $\Delta E = 0$ für einen Beobachter im S-System folgt unmittelbar für einen Beobachter im S'-System:

$$\Delta p' = 0 \ , \qquad \Delta E' = 0 \ .$$

Das bedeutet aber: Wenn Impuls- und Energieerhaltung für das System S gelten, dann gilt diese Tatsache auch für das System S'. Schließlich folgt aus der Invarianz offensichtlich: Es ist unmöglich, daß es eine Impulserhaltung ohne Energieerhaltung (und umgekehrt) gibt. Energie und Impuls bilden gemäß der relativistischen Definition eine geschlossene Einheit.“[5]

[5] In Anführungszeichen gesetzt und zitiert aus: Horst Melcher, *Relativitätstheorie in elementarer Darstellung*, 2. Auflage, Aulis Verlag Deubner, Köln, 1978, Seite 76. Der relativistische Impuls wird hier allerdings mit p bezeichnet.

2.13 Die drei Axiome der relativistischen Mechanik

In Analogie zu den drei Newton'schen Axiomen (der klassischen Mechanik) lauten die entsprechenden drei **Axiome der relativistischen Mechanik**:[6]

$$\textbf{1. Axiom}: \qquad \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{r}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}}\,\vec{\boldsymbol{u}} = \textbf{const} \text{ für } \vec{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{0}}\,,$$

$$\textbf{2. Axiom}: \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\right) = \vec{\boldsymbol{f}}\,.$$

Wirken allein innere Kräfte auf bzw. zwischen N Teilchen, dann gilt das

$$\textbf{3. Axiom}: \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=1}^{N}\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{r}n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\widetilde{m}_n\cdot\vec{\boldsymbol{u}}_n\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\boldsymbol{P}}_{\mathrm{r}} = \vec{\boldsymbol{0}}\,.$$

Diese drei relativistischen Axiome sollen in jedem Inertialsystem gelten, wobei zu berücksichtigen ist, dass die relativistische Masse $\widetilde{m}$ eines Teilchens vom Betrag seiner Geschwindigkeit abhängt. Für das 2. Axiom schreiben wir deshalb mit

$\widetilde{m} = \widetilde{m}\big(|\vec{\boldsymbol{u}}\,|\big) = \widetilde{m}(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}} = m_0\left(\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ in S:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\widetilde{m}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\widetilde{m}\cdot\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}p_{\mathrm{r}x}\\p_{\mathrm{r}y}\\p_{\mathrm{r}z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_x\\f_y\\f_z\end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{f}} \quad\Rightarrow$$

$$= \widetilde{m}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} + \vec{\boldsymbol{u}}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\widetilde{m}}{\mathrm{d}t} = m_0\left[\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} + \vec{\boldsymbol{u}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$= m_0\left[\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{u}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}(-2)\,\frac{(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}})}{c^2}\right].$$

Wir erhalten also für das 2. Axiom der relativistischen Mechanik in

$$S:\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{r}} = \vec{\boldsymbol{f}} = m_0\left[\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right) + \vec{\boldsymbol{u}}\,\frac{(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}})}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}^{\,3}}\right] \tag{2.67}$$

und völlig analog in

$$S':\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\,\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{r}}{}' = \vec{\boldsymbol{f}}\,' = m_0\left[\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\,'\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}\,'^2}{c^2}\right) + \vec{\boldsymbol{u}}\,'\frac{(\vec{\boldsymbol{u}}\,'\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\,')}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}\,'^2}{c^2}}^{\,3}}\right]. \tag{2.68}$$

Im folgenden Abschnitt 2.14 werden wir die Gleichung (2.67) für die weitere Diskussion in einer etwas anderen Form schreiben.

[6] Siehe Helmut Günther, *Spezielle Relativitätstheorie – Ein neuer Einstieg in Einsteins Welt*, 1. Auflage, B. G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2007, Abschnitt *17.2 Die relativistischen Grundgleichungen der Mechanik*, Seite 76 bis Seite 78.

2.14 Beziehungen zwischen Dreierkraft, Teilchenbeschleunigung und Teilchengeschwindigkeit

In diesem Abschnitt 2.14 beobachten wir ein Teilchen, das sich mit der *momentanen* Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}$ in S bewegt, wobei wir selbst in S ruhen. Das Teilchen repräsentiert also gleichsam ein System S', welches sich mit der *momentanen* Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}} \equiv \vec{\boldsymbol{u}}$ bezüglich S bewegt. Anders gesagt, das Teilchen ruht stets in S' entsprechend $\vec{\boldsymbol{u}}\,' \equiv \vec{\boldsymbol{0}}$.

- Die im Abschnitt 2.6 hergeleitete relativistische Masse $\widetilde{m}$ ist hier

$$\widetilde{m} \;=\; \widetilde{m}(u) \;=\; m_0 \cdot \gamma_u \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

  mit dem Betrag u der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}$ eines Teilchens der Ruhemasse m_0 und mit dem entsprechenden Lorentz-Faktor $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^{\,2}}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$.

- Die relativistische Masse liefert in den Gleichungen für den relativistischen Impuls $\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}$ und für die relativistische Energie E in Analogie zur Newton'schen Mechanik die „richtigen" Ergebnisse

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}} = \widetilde{m}(u) \cdot \vec{\boldsymbol{u}}\,, \qquad E = \widetilde{m}(u) \cdot c^2\,.$$

  In den Gleichungen, die auf der zeitlichen Ableitung des Impulses beruhen wie beispielsweise dem 2. Newton'schen Gesetz $\vec{\boldsymbol{F}} = m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$, geht die Analogie zur Newton'schen Mechanik verloren, sodass wegen $\widetilde{m} = \widetilde{m}(u)$ relativistisch für die Kraft gilt:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{f}} \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\widetilde{m}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}\right) \;=\; \widetilde{m}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} + \vec{\boldsymbol{u}}\cdot\frac{\mathrm{d}\widetilde{m}}{\mathrm{d}t}\\ &=\; \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^{\,2}}{c^2}}}\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{\boldsymbol{a}}} + \vec{\boldsymbol{u}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^{\,2}}{c^2}}}\right)\,.\end{aligned}$$

  Mit

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^{\,2}}{c^2}}}\right) \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &=\; \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{2\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right)\boldsymbol{\cdot}\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{\boldsymbol{a}}} \;=\; \frac{\frac{\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}}{c^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\vec{u}^{\,2}}{c^2}\right)^3}}\end{aligned}$$

  erhalten wir daraus

$$\vec{\boldsymbol{f}} \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^{\,2}}{c^2}}}\,\vec{\boldsymbol{a}} \;+\; \vec{\boldsymbol{u}}\,\frac{m_0}{\left(\sqrt{1-\frac{\vec{u}^{\,2}}{c^2}}\right)^3}\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{c^2} \tag{2.69}$$

  und mit $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^{\,2}}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma_u$ schließlich

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{f}} \;=\; m_0\,\gamma_u\,\vec{\boldsymbol{a}} \;+\; m_0\,\gamma_u^3\,\frac{(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}}\;. \tag{2.70}$$

- **Beziehungen zwischen $\vec{\boldsymbol{f}}$, $\vec{\boldsymbol{a}}$ und $\vec{\boldsymbol{u}}$**

  Um die Richtungsbeziehungen zwischen den Größen bequemer beurteilen zu können, lösen wir (2.70) nach der Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$ auf:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{f}} &= m_0\,\gamma_u\,\vec{\boldsymbol{a}} + m_0\,\gamma_u^3\,\frac{(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}} \quad \Rightarrow \\
\vec{\boldsymbol{f}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} &= m_0\,\gamma_u\,(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) \;+\; m_0\,\gamma_u^3\,(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})\,\frac{u^2}{c^2} \\
&= m_0\,\gamma_u\,(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})\underbrace{\left(1+\gamma_u^2\,\frac{u^2}{c^2}\right)}_{=\gamma_u^2}\,, \\
\vec{\boldsymbol{f}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} &= m_0\,\gamma_u^3\,(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) \qquad \Rightarrow \\
\vec{\boldsymbol{f}} - (\vec{\boldsymbol{f}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})\,\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2} &= m_0\,\gamma_u\,\vec{\boldsymbol{a}} + m_0\,\gamma_u^3\,(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})\,\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2} \;-\; m_0\,\gamma_u^3\,(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})\,\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2} \\
&= m_0\,\gamma_u\,\vec{\boldsymbol{a}} \qquad \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{m_0}\left[\vec{\boldsymbol{f}} - \frac{(\vec{\boldsymbol{f}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}\right]}\;. \tag{2.71}$$

Aus (2.71) erhalten wir mit

$$\left|\vec{\boldsymbol{f}}\right| = f\,, \quad |\vec{\boldsymbol{a}}| = a\,, \quad |\vec{\boldsymbol{u}}| = u\,,$$

$$\vec{\boldsymbol{f}} \upuparrows \vec{\boldsymbol{u}} \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{f}} = f\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{u}\,, \qquad \vec{\boldsymbol{f}} \downarrow\uparrow \vec{\boldsymbol{u}} \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{f}} = f\cdot\left(-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{u}\right) = -f\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{u}\,,$$

$$\vec{\boldsymbol{f}} \upuparrows \vec{\boldsymbol{u}} \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{a}} \upuparrows \vec{\boldsymbol{u}} \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{a}} = a\,\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{u} \quad \text{und}$$

$$f - \frac{f\cdot u}{c^2}\,u \;=\; f\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) \;=\; f\,\frac{1}{\gamma_u^2}$$

die folgenden richtungsabhängigen Beziehungen:

$$\begin{aligned}
&\vec{\boldsymbol{f}} \perp \vec{\boldsymbol{u}} \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{m_0\,\gamma_u}\,\vec{\boldsymbol{f}}\,, \\
&\vec{\boldsymbol{f}} \upuparrows \vec{\boldsymbol{u}} \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{m_0\,\gamma_u}\left[+f - \frac{f\cdot u}{c^2}\,u\right]\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{u} \;=\; \frac{+f}{m_0\,\gamma_u^3}\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{u} \;=\; +a\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{u}\,, \\
&\vec{\boldsymbol{f}} \downarrow\uparrow \vec{\boldsymbol{u}} \;\Rightarrow\; \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{m_0\,\gamma_u}\left[-f + \frac{f\cdot u}{c^2}\,u\right]\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{u} \;=\; \frac{-f}{m_0\,\gamma_u^3}\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{u} \;=\; -a\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{u}\,.
\end{aligned} \tag{2.72}$$

- Bei der Herleitung der Kraft (2.70) sind wir gänzlich ohne Koordinatensystem bzw. ohne Vektorbasis ausgekommen. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{\boldsymbol{u}}$ ist gleichsam als „Basis“ ausreichend, um die Beziehungen zwischen Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft vektoriell auszudrücken. Daraus ergibt sich eine weitere Möglichkeit der basisfreien Darstellung von $\vec{\boldsymbol{f}}$, nämlich die Aufteilung in $\vec{\boldsymbol{f}}_\perp$, die Vektorkomponente der Dreierkraft senkrecht zu $\vec{\boldsymbol{u}}$, und in $\vec{\boldsymbol{f}}_\parallel$, die Vektorkomponente der Dreierkraft parallel zu $\vec{\boldsymbol{u}}$:

$$\vec{\boldsymbol{f}} \;=\; \vec{\boldsymbol{f}}_\perp + \vec{\boldsymbol{f}}_\parallel \;.$$

Weil das Skalarprodukt $\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}_\parallel$ in (2.70) für $\vec{\boldsymbol{f}}_\perp$ gemäß $\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}_\perp = 0$ verschwindet, gilt

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{f}}_\perp &= m_0\,\gamma_u\,\vec{\boldsymbol{a}}_\perp\;, \\
\vec{\boldsymbol{f}}_\parallel &= m_0\,\gamma_u\,\vec{\boldsymbol{a}}_\parallel + m_0\,\gamma_u^3\,\frac{1}{c^2}\,\overbrace{\left(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}_\parallel\right)}^{=\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}\,\vec{\boldsymbol{u}} \qquad \Rightarrow \\
\vec{\boldsymbol{f}}_\perp + \vec{\boldsymbol{f}}_\parallel &= m_0\,\gamma_u\,\vec{\boldsymbol{a}}_\perp + \left[m_0\,\gamma_u\,\vec{\boldsymbol{a}}_\parallel + m_0\,\gamma_u^3\,\frac{(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}\right]\;, \\
&= m_0\,\gamma_u\,\underbrace{\left(\vec{\boldsymbol{a}}_\perp + \vec{\boldsymbol{a}}_\parallel\right)}_{=\vec{\boldsymbol{a}}} + m_0\gamma_u^3\,\frac{(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\,)}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}} \;=\; \vec{\boldsymbol{f}}\;.
\end{aligned}$$

Diskussion von (2.70), (2.71) und (2.72):

1. Während in der Newton'schen Mechanik und speziell im 2. Newton'schen Gesetz $\vec{\boldsymbol{F}} = m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$ die Ruhemasse m_0 der Proportionalitätsfaktor zwischen Kraft und Beschleunigung ist, gibt es relativistisch keinen derart trivialen Proportionalitätsfaktor zwischen Kraft und Beschleunigung.

2. Allerdings gilt sowohl in der Newton'schen Mechanik als auch in der SRT

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{0}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{0}} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{0}} \,.$$

3. Im klassischen Grenzfall geht (2.71) über in das 2. Newton'sche Gesetz:

$$c \to \infty \;\; \text{bzw.} \;\; |\vec{\boldsymbol{u}}\,| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}}\big(\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{0}}\big) = \vec{\boldsymbol{F}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m_0} \;\Leftrightarrow\; \vec{\boldsymbol{F}} = m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \,.$$

4. An (2.70) erkennt man sofort, dass im Gegensatz zur Newton'schen Mechanik die Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$ in der relativistischen Mechanik nicht die gleiche Richtung wie die Kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$ haben muss.

   Im Allgemeinen verlaufen die Dreierkraft $\vec{\boldsymbol{f}}$ und die zugehörige Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$ in der SRT nicht parallel zueinander.

   Und wie man an (2.71) sieht, hängt die Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$ eines Teilchens „vektoriell-additiv" von dessen Geschwindigkeitsvektor $\vec{\boldsymbol{u}}$ ab. Deshalb besitzt die Beschleunigung *allgemein* eine Komponente in Richtung der Geschwindigkeit.

   Gemäß (2.71) ist die Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$ nur dann parallel und dann außerdem auch noch stets **gleichsinnig parallel** zur Kraft $\vec{\boldsymbol{f}}$ gerichtet, wenn die Kraft senkrecht oder parallel zur Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}$ des Teilchens wirkt:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\boldsymbol{f}} \perp \vec{\boldsymbol{u}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{u}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{u}} \\[2ex] \vec{\boldsymbol{f}} \parallel \vec{\boldsymbol{u}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{u}} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}} \parallel \vec{\boldsymbol{u}} \end{array}\right\} \Rightarrow \; \vec{\boldsymbol{a}} \upuparrows \vec{\boldsymbol{f}} \,.$$

5. Die Fallunterscheidung unter (2.72) zeigt folgendes:

   Wenn die Kraft $\vec{\boldsymbol{f}}$ parallel zur Teilchengeschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}$ wirkt, dann besitzt die resultierende Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$ die gleiche Richtung und die gleiche Orientierung wie $\vec{\boldsymbol{f}}$. Dies gilt *gleichermaßen* für eine auftretende zu $\vec{\boldsymbol{u}}$ parallele Komponente von $\vec{\boldsymbol{f}}$, falls $\vec{\boldsymbol{f}}$ nicht ausschließlich parallel zu $\vec{\boldsymbol{u}}$ wirkt.

   Nur im Fall $\vec{\boldsymbol{f}} \perp \vec{\boldsymbol{u}}$ besitzt $\vec{\boldsymbol{a}}$ keine Komponente parallel zu $\vec{\boldsymbol{u}}$.

6. Die Fallunterscheidung unter (2.72) zeigt weiterhin:

   Bei konstanter Kraft $\vec{\boldsymbol{f}}$ und daraus resultierender zunehmender Teilchengeschwindigkeit $|\vec{\boldsymbol{u}}\,|$ gilt:

   ∗ Die Beschleunigungskomponente $\vec{\boldsymbol{a}}_\perp$ (senkrecht zu $\vec{\boldsymbol{u}}$) nimmt um den Faktor $\frac{1}{\gamma_u} = \big(1 - \frac{u^2}{c^2}\big)^{\frac{1}{2}}$ ab.

   ∗ Die Beschleunigungskomponente $\vec{\boldsymbol{a}}_\parallel$ (parallel zu $\vec{\boldsymbol{u}}$) nimmt um den Faktor $\frac{1}{\gamma_u^3} = \big(1 - \frac{u^2}{c^2}\big)^{\frac{3}{2}}$ ab.

Die Komponente $\vec{\boldsymbol{a}}_\parallel$ nimmt demzufolge um den Faktor $\frac{1}{\gamma_u^2} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$ stärker ab als die Komponente $\vec{\boldsymbol{a}}_\perp$. Allgemein, also insbesondere *auch* wenn $\vec{\boldsymbol{f}}$ und $\vec{\boldsymbol{a}}$ weder parallel noch senkrecht zu $\vec{\boldsymbol{u}}$ gerichtet sind, gilt

$$|\vec{\boldsymbol{u}}\,| \to c \quad \Rightarrow \quad |\vec{\boldsymbol{a}}\,| \to 0 \, .$$

Das bedeutet: Je schneller das Teilchen ist, desto kleiner wird bei gleicher Kraft die Beschleunigung. Dadurch wird in der SRT gewährleistet, dass ein Teilchen niemals die Lichtgeschwindigkeit erreichen kann. Der Grund dafür ist die Tatsache, dass mit der Teilchengeschwindigkeit die Trägheit bzw. relativistische Masse und folglich auch die relativistische Energie des Teilchens zunehmen gemäß

$$|\vec{\boldsymbol{u}}\,| \to c \quad \Rightarrow \quad \widetilde{m} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \to \infty \quad \Rightarrow \quad E = \widetilde{m}\, c^2 \to \infty \, .$$

Wir berechnen jetzt die Komponenten von $\vec{\boldsymbol{f}}$ für den speziellen Fall, dass sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}} = \big(u_x, 0, 0\big)$ längs der x-Achse von S bewegt. Mit

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} u_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{\boldsymbol{u}}\,| = u_x = u \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{u}}^{\,2} = u_x^2 = u^2$$

erhalten wir aus (2.70)

$$\begin{aligned} f_x &= m_0\, \gamma_u\, a_x + m_0\, \gamma_u^3 \frac{u \cdot a_x}{c^2}\, u \\ &= m_0\, \gamma_u\, a_x \left(1 + \gamma_u^2 \frac{u^2}{c^2}\right) = m_0\, \gamma_u\, a_x \left(1 + \frac{\frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right) = m_0\, \gamma_u\, a_x \underbrace{\left(\frac{1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)}_{=\gamma_u^2} \, . \end{aligned}$$

Und weil der rechte Summand in (2.70) für die Komponenten f_y und f_z wegen $u_y = u_z = 0$ verschwindet, resultiert schließlich

$$\boxed{|\vec{\boldsymbol{u}}\,| = u_x = u \quad \Rightarrow \quad f_x = m_0\, \gamma_u^3\, a_x \, , \quad f_y = m_0\, \gamma_u\, a_y \, , \quad f_z = m_0\, \gamma_u\, a_z} \, .$$

Wie man sieht, ist die Trägheit eines relativistischen Teilchens in Bewegungsrichtung (hier längs der x-Achse) größer als senkrecht zur Bewegungsrichtung, weshalb man früher im Rahmen der **Newton'schen Mechanik** von **longitudinaler Masse** $\big(m_0\, \gamma_u^3\big)$ und von **transversaler Masse** $\big(m_0\, \gamma_u\big)$ sprach. Dieser Sachverhalt wurde bereits in der Fallunterscheidung (2.72) sichtbar, denn wir hatten dort festgestellt, dass der Betrag der Beschleunigung im Fall $\vec{\boldsymbol{f}} \parallel \vec{\boldsymbol{u}}$ um den Faktor $\frac{1}{\gamma_u^2}$ kleiner ist als im Fall $\vec{\boldsymbol{f}} \perp \vec{\boldsymbol{u}}$.

Jetzt zeigen wir, dass *im Allgemeinen* eine **Kraftkomponente senkrecht zur Beschleunigung** eines relativistischen Teilchens existiert. Zur Vereinfachung und o.B.d.A. unterdrücken wir die z-Achse und betrachten nur den zweidimensionalen Fall in der (x, y)-Ebene. Die Beschleunigung soll in Richtung der y-Achse erfolgen gemäß

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \big(0,\, a_y\big) \qquad \Rightarrow \qquad a_x \equiv 0\;, \quad a_y \neq 0\;,$$

während sich das Teilchens mit irgendeiner Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}} = \big(u_x, u_y\big)$ bewegt. Demzufolge erhält man die Komponenten der Kraft $\vec{\boldsymbol{f}} = \big(f_x, f_y\big)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
f_x &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^2}{c^2}}}\, m_0\, a_x}_{=\,0} + \frac{u_x a_x + u_y a_y}{c^2\left(\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^2}{c^2}}\right)^3}\, m_0\, u_x\;, \\
f_x &= a_y\, \frac{m_0}{c^2\left(\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^2}{c^2}}\right)^3}\, u_x\, u_y
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^2}{c^2}}}\, m_0\, a_y + \frac{u_x a_x + u_y a_y}{c^2\left(\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^2}{c^2}}\right)^3}\, m_0\, u_y \\
&= \frac{a_y\, m_0}{\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^2}{c^2}}} + \frac{a_y\, m_0\, u_y^2}{c^2\left(\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^2}{c^2}}\right)^3} \\
&= \frac{a_y\, m_0}{c^2\left(\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^2}{c^2}}\right)^3}\, \underbrace{\left[c^2\left(1-\frac{u_x^2+u_y^2}{c^2}\right)+u_y^2\right]}_{=\,\left[c^2-u_x^2-u_y^2+u_y^2\right]}\;, \\
f_y &= a_y\, \frac{m_0}{c^2\left(\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^2}{c^2}}\right)^3}\, \big(c^2-u_x^2\big)\;.
\end{aligned}$$

Ausgedrückt in Vielfachen von f_y ist die Kraftkomponente senkrecht zur Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}} = \big(0,\, a_y\,\big)$, d. h. die Kraftkomponente f_x folglich[7]

$$f_x = \frac{u_x\, u_y}{c^2-u_x^2}\, f_y\;.$$

Nur wenn $\vec{\boldsymbol{f}}$ parallel oder senkrecht zur Teilchengeschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}$ wirkt, existiert keine Kraftkomponente senkrecht zur Beschleunigung, weil dann $\vec{\boldsymbol{a}} \upuparrows \vec{\boldsymbol{f}}$ gilt. Dieser Sachverhalt wurde oben bereits ausführlich diskutiert.

[7] Im dreidimensionalen Fall mit $\vec{\boldsymbol{a}} = \big(0,\, a_y,\, 0\big)$ und $\vec{\boldsymbol{u}} = \big(u_x, u_y, u_z\big)$ hätten wir zusätzlich die Kraftkomponente in z-Richtung $\quad f_z = a_y\, \frac{m_0}{c^2\left(\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^2}{c^2}}\right)^3}\, u_y\, u_z$ erhalten. Die Kraftkomponente senkrecht zur Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$ hätte dann den Betrag $\sqrt{f_x^2+f_y^2}$.

2.15 Transformation der Dreierkraft in Standardkonfiguration

Ein Beobachter ruhe im System S, das sich gemäß der Standardkonfiguration mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_x,\, 0,\, 0) = (v,\, 0,\, 0)$ längs der x-Achse von S bewegt. Das beobachtete Teilchen bewegt sich mit der momentanen Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}} = \big(u_x, u_y, u_z\big)$ in S bzw. $\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \big(u'_x, u'_y, u'_z\big)$ in S'. Die auf das Teilchen wirkende Kraft gilt

$$
\begin{aligned}
\text{in } S: \qquad \vec{\boldsymbol{f}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}\,, \\
\text{in } S': \qquad \vec{\boldsymbol{f}}\,' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\, \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}\,' \,.
\end{aligned}
$$

Mit (2.64) und unter Anwendung der Kettenregel mit

$$
\frac{\mathrm{d}t'(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\, u_x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma\big(1 - \frac{v}{c^2}\, u_x\big)} \tag{2.73}
$$

berechnen wir jetzt die Gleichung für die Transformation von der Kraftkomponente f_x nach f'_x. Die entsprechende Gleichung für die Transformation von f'_x nach f_x ergibt sich dann durch relativistische Vertauschung:

$$
\begin{aligned}
f'_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\, p'_{\mathrm{r}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left[\gamma\left(p_{\mathrm{r}x} - \frac{v}{c^2}\, E\right)\right] = \gamma \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_{\mathrm{r}x} - \frac{v}{c^2}\, E\right) \\
&= \frac{\gamma}{\gamma\big(1 - \frac{v}{c^2}\, u_x\big)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_{\mathrm{r}x} - \frac{v}{c^2}\, E\right)\,,
\end{aligned}
$$

$$
f'_x = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p_{\mathrm{r}x} - \frac{v}{c^2}\, \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)}{1 - \frac{v}{c^2}\, u_x}\,. \tag{2.74}
$$

Nun ist aber $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p_{\mathrm{r}x} = f_x \quad$ die x-Komponente der Dreierkraft in S und

$$
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{f}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = f_x\, u_x + f_y\, u_y + f_z\, u_z
$$

ist die (momentane) Leistung der Kraft $\vec{\boldsymbol{f}}$ in S. Dies setzen wir in (2.74) ein:

$$
\begin{aligned}
f'_x &= \frac{f_x - \frac{v}{c^2}\big(f_x\, u_x + f_y\, u_y + f_z\, u_z\big)}{1 - \frac{v}{c^2}\, u_x} \\
&= \frac{f_x - \frac{v}{c^2}\, f_x\, u_x}{1 - \frac{v}{c^2}\, u_x} - \frac{\frac{v}{c^2}\big(f_y\, u_y + f_z\, u_z\big)}{1 - \frac{v}{c^2}\, u_x} = \frac{f_x\big(1 - \frac{v}{c^2}\, u_x\big)}{1 - \frac{v}{c^2}\, u_x} - \frac{\frac{1}{c^2}\, v\,\big(f_y\, u_y + f_z\, u_z\big)}{\frac{1}{c^2}\big(c^2 - v\, u_x\big)}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{f'_x = f_x - v \cdot \frac{f_y\, u_y + f_z\, u_z}{c^2 - v\, u_x}\,, \qquad f_x = f'_x + v \cdot \frac{f'_y\, u'_y + f'_z\, u'_z}{c^2 + v\, u'_x}}\,.
$$

Schließlich berechnen wir mit (2.65) und (2.73) die Transformationsgleichungen von f_y nach f'_y bzw. von f'_y nach f_y:

$$f'_y \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\, p'_{\mathrm{r}y} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\, p_{\mathrm{r}y} \;=\; \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, p_{\mathrm{r}y}}_{=f_y} \,,$$

$$\boxed{f'_y \;=\; \frac{f_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\, u_x\right)} \,, \qquad f_y \;=\; \frac{f'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\, u'_x\right)}} \,.$$

Die Transformationsgleichungen für die z-Komponenten der Kraft ergeben sich völlig analog:

$$\boxed{f'_z \;=\; \frac{f_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\, u_x\right)} \,, \qquad f_z \;=\; \frac{f'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\, u'_x\right)}} \,.$$

2.15.1 Transformation der Dreierkraft bei linearer Beschleunigung in Standardkonfiguration

Untersuchen wir den speziellen Fall der lineare Beschleunigung eines Teilchens längs der x'-Achse und damit in der Standardkonfiguration auch längs der x-Achse. Das Teilchen soll sich also mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}\,' = (u'_x, 0, 0)$ in S' und folglich mit Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_x, 0, 0)$ in S bewegen. Ausgehend von (2.68) gelten dann mit

$$|\vec{\boldsymbol{u}}\,'| = u'_x \quad \Rightarrow \quad \gamma_{u'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_x}{c^2}}}$$

die folgenden Transformationen $\qquad S' \longrightarrow S$:

$$\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right) \;\Rightarrow\; \left(u'_x, 0, 0\right) \quad\longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{u}} = \left(u_x, 0, 0\right) \;\Rightarrow\; u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}\, u'_x} \,,$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}\,' = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}\,'}{\mathrm{d}t'} \;\Rightarrow\; \left(a'_x, 0, 0\right) \quad\longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{a}} = \left(a_x, 0, 0\right) \;\Rightarrow\; a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3\left(1 + \frac{v}{c^2}\, u'_x\right)^3} \,,$$

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}\,' = m_0\, \gamma_{u'}\, \vec{\boldsymbol{u}}\,' \;\Rightarrow\; p'_{\mathrm{r}x} = m_0\, \gamma_{u'} \cdot u'_x \quad\longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}} = \left(p_{\mathrm{r}x}, 0, 0\right) \;\Rightarrow\; p_{\mathrm{r}x} = m_0\, \gamma_{u'} \cdot \gamma\left(u'_x + v\right),$$

$$\vec{\boldsymbol{f}}\,' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\, \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}\,' = m_0\, \gamma^3_{u'} \left[\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\,'}{\gamma^2_{u'}} + \frac{\left(\vec{\boldsymbol{u}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\,'\right)}{c^2}\, \vec{\boldsymbol{u}}\,'\right]$$

$$\Rightarrow\; f'_x = m_0\, \gamma^3_{u'} \cdot a'_x \quad\longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{f}} = \left(f_x, 0, 0\right) \;\Rightarrow\; f_x = f'_x = m_0\, \gamma^3_{u'} \cdot a'_x \,.$$

Dabei haben wir verwendet:

$$\left[\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\,'}{\gamma^2_{u'}} + \frac{\left(\vec{\boldsymbol{u}}\,' \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\,'\right)}{c^2}\, \vec{\boldsymbol{u}}\,'\right] \;\Rightarrow\; \left[a'_x \left(1 - \frac{u'^2_x}{c^2}\right) + \frac{u'_x\, a'_x}{c^2}\, u'_x\right] \;=\; a'_x \left(1 - \frac{u'^2_x}{c^2} + \frac{u'^2_x}{c^2}\right) \;=\; a'_x \,.$$

Mit den Transformationsgleichungen

$$a'_x \;=\; \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)^3} \qquad \text{und} \qquad \gamma_{u'} \;=\; \gamma\,\gamma_u \left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)$$

stellen wir für die Transformation der Kraft für den Fall der linearen Teilchenbeschleunigung längs der x'-Achse in der Standardkonfiguration die folgende Beziehung fest:

$$f'_x \;=\; m_0\,\gamma^3_{u'} \cdot a'_x \;=\; m_0\,\gamma^3\,\gamma^3_u \left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)^3 \cdot \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)^3} \;=\; m_0\,\gamma^3_u \cdot a_x \;=\; f_x \;,$$

$$\boxed{f'_x \;=\; m_0\,\gamma^3_{u'} \cdot a'_x \;\;=\;\; m_0\,\gamma^3_u \cdot a_x \;=\; f_x} \;.$$

Ist S' das momentane **Ruhesystem** des Teilchens mit

$$\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \vec{\boldsymbol{0}} \;\Rightarrow\; \gamma_{u'} = 1 \;,$$

dann ist die Kraft, die in S' auf das Teilchen wirkt, gleich der Newton'schen Kraft

$$\vec{\boldsymbol{f}}\,' \;=\; m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\,' \;=\; \vec{\boldsymbol{F}}\,' \;.$$

Und im Fall, dass zusätzlich auch noch

$$|\vec{\boldsymbol{u}}\,| = u_x = v \;\Rightarrow\; \gamma_u = \gamma \quad \text{und} \quad \vec{\boldsymbol{a}}\,' = \left(a'_x, 0, 0\right)$$

gilt, erhalten wir die Transformationsgleichung

$$f'_x \;=\; m_0 \cdot a'_x \;=\; F'_x \;=\; f_x \;. \tag{2.75}$$

Substituieren wir nämlich in (2.75)

$$a'_x \;=\; \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)^3} \;\stackrel{u_x = v}{=}\; \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \;=\; \gamma^3\,a_x \;,$$

resultiert

$$f'_x \;=\; F'_x \;=\; m_0 \cdot a'_x \;\;=\;\; m_0\,\gamma^3 \cdot a_x \;=\; f_x \;.$$

2.15.2 Transformation der Dreierkraft bei Zentripetalbeschleunigung in Standardkonfiguration

Jetzt untersuchen wir den speziellen Fall der Zentripetalbeschleunigung in S' in Standardkonfiguration. Die **Lorentz-Kraft** auf eine bewegte Ladung ist ein Beispiel für eine zentripetal beschleunigende Kraft. Bequemerweise soll sich das Teilchen mit der momentanen Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \big(u'_x, 0, 0\big)$ längs der x'-Achse bewegen, sodass dessen Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}\,' = \big(0, a'_y, 0\big)$ längs der y'-Achse und damit senkrecht zu $\vec{\boldsymbol{u}}\,'$ erfolgt. Infolgedessen verschwindet der letzte Summand auf der rechten Seite von (2.68) :

$$\vec{\boldsymbol{f}}\,' \;=\; m_0\,\gamma_{u'}^3 \left[\frac{\vec{\boldsymbol{a}}\,'}{\gamma_{u'}^2} + \frac{\big(\vec{\boldsymbol{u}}\,'\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\,'\big)}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}\,'\right] \quad \overset{\vec{a}\,'\perp\vec{u}\,'}{\Longrightarrow} \quad \vec{\boldsymbol{f}}\,' \;=\; m_0\,\gamma_{u'}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\,' \,.$$

Mit $\;\vec{\boldsymbol{a}}\,' = \big(0, a'_y, 0\big)\;$ und $\;\gamma_{u'} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2_x}{c^2}}}$ resultieren daraus

$$f'_y \;=\; m_0\,\gamma_{u'}\cdot a'_y$$

sowie die Transformationsgleichung

$$\vec{\boldsymbol{f}} \;=\; \big(0, f_y, 0\big) \quad\Rightarrow\quad f_y \;=\; \frac{f'_y}{\gamma\,\big(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\big)} \;=\; \frac{m_0\,\gamma_{u'}\cdot a'_y}{\gamma\,\big(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\big)} \,.$$

Die Substitution von a'_y gemäß

$$a_y \;=\; \frac{a'_y}{\gamma^2\,\big(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\big)^2} - \underbrace{\frac{\frac{v}{c^2}\,u'_y\cdot a'_x}{\gamma^2\,\big(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\big)^3}}_{=\,0} \quad\Leftrightarrow\quad a'_y \;=\; \gamma^2\left(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\right)^2 a_y$$

ergibt

$$f_y \;=\; m_0\,\gamma_{u'}\,\frac{\gamma^2\,\big(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\big)^2\,a_y}{\gamma\,\big(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\big)} \;=\; m_0\,\underbrace{\gamma_{u'}\,\gamma\left(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\right)}_{=\,\gamma_u}a_y \,,$$

$$\boxed{f'_y \;=\; m_0\,\gamma_{u'}\cdot a'_y \;\xrightarrow{\neq}\; m_0\,\gamma_u\cdot a_y \;=\; \frac{f'_y}{\gamma\,\big(1+\frac{v}{c^2}\,u'_x\big)} \;=\; f_y} \,, \tag{2.76}$$

wobei gilt: $\quad \big(\vec{\boldsymbol{a}} \text{ und } \vec{\boldsymbol{a}}\,'\big) \perp \big(\vec{\boldsymbol{u}} \text{ und } \vec{\boldsymbol{u}}\,'\big)\,, \quad \big(\vec{\boldsymbol{f}} \text{ und } \vec{\boldsymbol{f}}\,'\big) \parallel \big(\vec{\boldsymbol{a}} \text{ und } \vec{\boldsymbol{a}}\,'\big)\,.$

Ist S' das momentane **Ruhesystem** des Teilchens mit $\;\gamma_{u'} = 1\;$ und mit $\;u_y = v \;\Rightarrow\; \gamma_u = \gamma\;$, vereinfacht sich (2.76) zu

$$f'_y \;=\; F' \;=\; m_0\,a'_y \;\xrightarrow{\neq}\; m_0\,\gamma\cdot a_y \;=\; \frac{1}{\gamma}\,f'_y \;=\; f_y \,,$$

wobei gilt: $\quad \vec{\boldsymbol{u}}\,' = \vec{\boldsymbol{0}}\,, \quad \big(\vec{\boldsymbol{a}} \text{ und } \vec{\boldsymbol{a}}\,'\big) \perp \vec{\boldsymbol{u}}\,, \quad \big(\vec{\boldsymbol{f}} \text{ und } \vec{\boldsymbol{f}}\,'\big) \parallel \big(\vec{\boldsymbol{a}} \text{ und } \vec{\boldsymbol{a}}\,'\big)\,.$

3 Zur relativistischen Punktmechanik im Viererkalkül

Wir betrachten in diesem Kapitel ein Teilchen, dass sich in S mit der momentanen Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}(t)$ bzw. in S' mit der momentanen Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}\,'(t')$ bewegt, wobei es in S die Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}(t)$ bzw. in S' die Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}\,'(t')$ erfährt. Für den Betrag der Geschwindigkeit schreiben wir $|\vec{\boldsymbol{u}}\,(t)| = u$ bzw. $|\vec{\boldsymbol{u}}\,'(t')| = u'$ und für das Quadrat der Geschwindigkeit schreiben wir $\big(\vec{\boldsymbol{u}}(t)\big)^2 = u^2$ bzw. $\big(\vec{\boldsymbol{u}}\,'(t')\big)^2 = u'^2$.

S' soll sich bezüglich S allgemein mit der (momentanen) Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_x, v_y, v_z)$ und im speziellen Fall der Standardkonfiguration mit der (momentanen) Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_x, 0, 0) = (v, 0, 0)$ bewegen, sodass wir dann für den Lorentz-Faktor in jedem Fall einfach $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ schreiben können.

Wenn wir S' als das (mitbewegte) momentane Ruhesystem des Teilchens betrachten, gilt $\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \vec{\boldsymbol{0}} \;\;\Rightarrow\;\; \vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}}$ und $\gamma_u = \gamma$.

Wir leiten die Vierervektoren im Folgenden für das System S her. Für S' erhält man die entsprechenden Vierervektoren völlig analog, nur dass dann die systemabhängigen Größen mit einem Strichindex zu versehen sind.

3.1 Vierergeschwindigkeit

Durch Äquivalenzumformung von (1.2) erhalten wir die Ableitung der Koordinatenzeit t nach der Eigenzeit τ:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \;=\; \gamma_u} \,. \tag{3.1}$$

Die Verallgemeinerung des gewöhnlichen Geschwindigkeitsvektors bzw. der

$$\textbf{Dreiergeschwindigkeit} \quad \vec{\boldsymbol{u}} = \big(u_x, u_y, u_z\big) = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}$$

zur Vierergeschwindigkeit $\big(u^\mu\big)$ erfolgt *nicht* durch die Ableitung des Viererortsvektors nach der Koordinatenzeit t, weil das Koordinatenzeitdifferential kein Lorentz-Skalar ist. Jedoch durch die Ableitung des Viererortsvektors nach der Eigenzeit τ, d. h. durch die Bildung des Differentialquotienten aus dem Differential des Viererortsvektors und dem Lorentz-Skalar $\mathrm{d}\tau$, resultiert wieder ein Vierervektor, die **Vierergeschwindigkeit**

$$\mathbf{U} = \big(u^\mu\big) = \left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right) \;=\; \gamma_u\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}\right) \;,$$

$$\boxed{\mathbf{U} \;=\; \big(u^\mu\big) \;=\; \frac{\big(c,\, u_x, u_y, u_z\big)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \;=\; \gamma_u\big(c,\, \vec{\boldsymbol{u}}\big) \;=\; \Big(\gamma_u\, c\,,\; \big(u^i\big)\Big)} \;.$$

$\gamma_u\, c = \; u^0$ ist der **Zeitanteil** bzw. die zeitliche Komponente und
$\gamma_u\, \vec{\boldsymbol{u}} = \big(u^i\big)$ mit $i = 1, 2, 3$ ist der **Raumanteil** der Vierergeschwindigkeit mit dem

gewöhnlichen Geschwindigkeitsvektor $\vec{\boldsymbol{u}}$ (Teilchengeschwindigkeit in S). Das Minkowski-Produkt der Vierergeschwindigkeit mit sich selbst ist

$$\langle\mathbf{U},\mathbf{U}\rangle = \eta_{\mu\nu}\, u^\nu u^\mu = \frac{\big(c,\, u_x, u_y, u_z\big)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{\big(c,\, -u_x, -u_y, -u_z\big)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{c^2-u^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} = c^2 > 0 \;.$$

Wie man sieht, ist die Vierergeschwindigkeit ein **zeitartiger Vierervektor**.

3.2 Vierebeschleunigung und Eigenbeschleunigung

Weil $\left(\mathrm{d}u^\mu\right)$ wie $\left(u^\mu\right)$ ein Vierervektor ist, muss auch der Differentialquotient $\left(\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right)$ ein Vierervektor sein, nämlich die Viererbeschleunigung

$$\mathbf{A} \;=\; \left(a^\mu\right) \;=\; \left(\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right).$$

Zur Berechnung der Viererbeschleunigung benutzen wir die Kettenregel:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \;=\; \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}t}\right) \overset{(3.1)}{=} \gamma_u \left(\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}t}\right) \;=\; \gamma_u \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma_u\, c\right)\,,\;\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma_u\, \vec{\boldsymbol{u}}\right)\right).$$

Mit der gewöhnlichen Beschleunigung $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{a}}$ in S und

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\gamma_u \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&=\; \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} (-2)\,\frac{\vec{\boldsymbol{u}}}{c^2}\boldsymbol{\cdot}\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\left(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{c^2\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)^3} \;=\; \gamma_u^3\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{c^2}
\end{aligned}$$

resultiert schließlich die **Viererbeschleunigung**

$$\left(a^\mu\right) \;=\; \left(\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \;=\; \gamma_u\left(c\,\gamma_u^3\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{c^2}\;,\;\; \gamma_u\,\vec{\boldsymbol{a}}+\gamma_u^3\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}\right)\,,$$

$$\boxed{\mathbf{A} \;=\; \left(a^\mu\right) \;=\; \left(\frac{\gamma_u^4}{c}\left(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\right)\,,\;\; \gamma_u^2\,\vec{\boldsymbol{a}}+\frac{\gamma_u^4}{c^2}\left(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\right)\vec{\boldsymbol{u}}\right)}\,. \tag{3.2}$$

Für einige Betrachtungen ist es hilfreich, wenn wir (3.2) als Summe zweier Vierervektoren schreiben:

$$\mathbf{A} \;=\; \gamma_u^4\,\frac{\left(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\right)}{c^2}\left(c\,,\;\vec{\boldsymbol{u}}\right) \;+\; \gamma_u^2\left(0\,,\;\vec{\boldsymbol{a}}\right)\,.$$

Im nichtrelativistischen Limes, also wenn beispielsweise S das Ruhesystem des Teilchens mit $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ ist, verschwindet der Zeitanteil der Viererbeschleunigung und der Raumanteil geht über in die gewöhnliche Beschleunigung. Und das Minkowski-Produkt der Viererbeschleunigung mit sich selbst ist dann

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{A},\mathbf{A}\rangle \;=\; \eta_{\mu\nu}\,a^\nu a^\mu \;&=\; \left(0,\,\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t},\,\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t},\,\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{\cdot}\left(0,\,\frac{\mathrm{d}(-u_x)}{\mathrm{d}t},\,\frac{\mathrm{d}(-u_y)}{\mathrm{d}t},\,\frac{\mathrm{d}(-u_z)}{\mathrm{d}t}\right) \\
&=\; \vec{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\cdot}\left(-\,\vec{\boldsymbol{a}}\right) \;=\; -\vec{\boldsymbol{a}}^{\,2} \;<\; 0\,.
\end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Viererbeschleunigung ein **raumartiger Vierervektor**. Schließlich untersuchen wir noch das Richtungsverhalten von $\vec{\boldsymbol{u}}$ und $\vec{\boldsymbol{a}}$ zueinander, indem wir das Minkowski-Produkt der Vierergeschwindigkeit mit der Viererbeschleunigung bilden:

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}\, u^\nu a^\mu \;&=\; u_\mu a^\mu \;=\; \gamma_u\big(c,\, -\vec{\boldsymbol{u}}\big)\boldsymbol{\cdot}\left(\frac{\gamma_u^4}{c}\,\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)\,,\;\; \gamma_u^2\,\vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\gamma_u^4}{c^2}\,\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)\,\vec{\boldsymbol{u}}\right)\\
&=\; \gamma_u\, c\,\frac{\gamma_u^4}{c}\,\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big) - \gamma_u\,\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\left(\gamma_u^2\,\vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\gamma_u^4}{c^2}\,\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)\,\vec{\boldsymbol{u}}\right)\\
&=\; \gamma_u^5\,\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big) - \gamma_u^5\,\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)\,\frac{u^2}{c^2} - \gamma_u^3\,\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big) \;=\; \gamma_u^5\,\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)\,\underbrace{\left(1 - \frac{u^2}{c^2} - \frac{1}{\gamma_u^2}\right)}_{=\,0}\,,\\
\eta_{\mu\nu}\, u^\nu a^\mu \;&=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Formal steht demzufolge die Viererbeschleunigung senkrecht auf der Vierergeschwindigkeit gemäß $\mathbf{A} \perp \mathbf{U}$.

Eigenbeschleunigung

Zur Definition der Eigenbeschleunigung bilden wir zunächst das Minkowski-Produkt aus $\mathbf{A}$ mit sich selbst. Die Komponenten von $\mathbf{A}$ gemäß (3.2) sind

$$\begin{aligned}
A^0 \;&=\; \gamma_u^4\cdot c^{-2}\cdot\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)\cdot c\,,\\
A^1 \;&=\; \gamma_u^4\cdot c^{-2}\cdot\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)\cdot u_x \,+\, \gamma_u^2\cdot a_x\,,\\
A^2 \;&=\; \gamma_u^4\cdot c^{-2}\cdot\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)\cdot u_y \,+\, \gamma_u^2\cdot a_y\,,\\
A^3 \;&=\; \gamma_u^4\cdot c^{-2}\cdot\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)\cdot u_z \,+\, \gamma_u^2\cdot a_z\,.
\end{aligned}$$

Damit gilt *allgemein* und lorentz-invariant bzw. systemunabhängig

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{A},\mathbf{A}\rangle \;&=\; \big(A^0\big)^2 - \big(A^1\big)^2 - \big(A^2\big)^2 - \big(A^3\big)^2\\
&=\; \gamma_u^8\cdot c^{-4}\cdot\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)^2\cdot\big(c^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2\big)\\
&\qquad -\; 2\cdot\gamma_u^6\cdot c^{-2}\cdot\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)\cdot\big(u_x\cdot a_x + u_y\cdot a_y + u_z\cdot a_z\big)\\
&\qquad -\; \gamma_u^4\cdot\big(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\big)\\
&=\; \gamma_u^8\cdot c^{-2}\cdot\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)^2\cdot\underbrace{\frac{c^2 - \vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}}_{=\,\gamma_u^{-2}} - 2\cdot\gamma_u^6\cdot c^{-2}\cdot\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)^2 \;-\; \gamma_u^4\cdot\vec{\boldsymbol{a}}^{\,2}\,,
\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle\mathbf{A},\mathbf{A}\rangle \;=\; -\gamma_u^6\cdot c^{-2}\cdot\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)^2 \;-\; \gamma_u^4\cdot\vec{\boldsymbol{a}}^{\,2}}\,. \tag{3.3}$$

Ist S' jetzt das **Eigensystem** (momentane Ruhesystem) des beschleunigten Teilchens, gilt dort mit $\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \vec{\mathbf{0}} \;\Rightarrow\; \gamma_{u'} = 1$ das zu (3.3) gehörende und wegen der Lorentz-Invarianz gleichwertige Minkowski-Produkt

$$\langle\mathbf{A}',\mathbf{A}'\rangle \;=\; -\vec{\boldsymbol{a}}\,'^2 \;\equiv\; -\vec{\boldsymbol{\alpha}}^2 \quad\Rightarrow\quad \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\boldsymbol{a}}\,' \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}' = \big(0\,,\;\vec{\boldsymbol{a}}\,'\big) = \big(0\,,\;\vec{\boldsymbol{\alpha}}\big)\,.$$

Damit haben wir die Eigenbeschleunigung $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ definiert und es gilt

$$\boxed{\text{Eigensystem } S' :\; \langle\mathbf{A}',\mathbf{A}'\rangle = -\vec{\boldsymbol{a}}\,'^2 = -\vec{\boldsymbol{\alpha}}^2 = \langle\mathbf{A},\mathbf{A}\rangle = -\gamma_u^6\cdot c^{-2}\cdot\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)^2 - \gamma_u^4\cdot\vec{\boldsymbol{a}}^{\,2}}\,.$$

Da S nicht das Eigensystem des Teilchens ist, gilt dort mit $\vec{\boldsymbol{a}}^{\,2} = a^2$ und $\vec{\boldsymbol{\alpha}}^2 = \alpha^2$ für seine Eigenbeschleunigung

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^2 = \alpha^2 \;=\; \gamma_u^6 \cdot c^{-2} \cdot \big(\vec{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{a}}\big)^2 + \gamma_u^4 \cdot \vec{\boldsymbol{a}}^{\,2}\,. \tag{3.4}$$

Zur Veranschaulichung der Eigenbeschleunigung eines in S beschleunigt bewegten Teilchens diskutieren wir zwei spezielle Fälle:

- $\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{u}} \quad \Rightarrow$ Zentripetalbeschleunigung wie zum Beispiel bei der Lorentz-Kraft:

  $$\vec{\boldsymbol{\alpha}}^2 \;=\; \gamma_u^2 \cdot \vec{\boldsymbol{a}}^{\,2} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}} \;=\; \gamma_u^2 \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\,.$$

  Ist r der Radius der momentanen Kreisbahn des mit der Bahngeschwindigkeit u bewegten Teilchens, dann ist die Zentripetalbeschleunigung $a_{\text{zp}} = \frac{u^2}{r}$ und die

  $$\textbf{Zentripetal-Eigenbeschleunigung}\;\; \alpha \;=\; \gamma_u^2 \cdot a_{\text{zp}} \;=\; \gamma_u^2 \cdot \frac{u^2}{r}\,.$$

  Und die Dreierkraft $\vec{\boldsymbol{f}}$ (siehe Abschnitt 3.4), ausgedrückt durch die Eigenbeschleunigung, ist dann

  $$\vec{\boldsymbol{f}} \;=\; \gamma_u \cdot m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \frac{1}{\gamma_u} \cdot m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{\alpha}}\,.$$

- $\vec{\boldsymbol{a}} \parallel \vec{\boldsymbol{u}} \quad \Rightarrow$ lineare Beschleunigung:

  Mit (3.4) gilt dann

  $$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\alpha}}^2 = \alpha^2 \;&=\; \gamma_u^6 \cdot c^{-2} \cdot u^2 \cdot a^2 + \gamma_u^4 \cdot a^2 \\ &=\; \gamma_u^4 \cdot a^2 \cdot \left(\gamma_u^2 \cdot \frac{u^2}{c^2} + 1\right) \;=\; \gamma_u^4 \cdot a^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{u^2 + c^2 - u^2}{c^2 - u^2}\right)}_{=\gamma_u^2}\,, \end{aligned}$$

  $$\alpha^2 \;=\; \gamma_u^6 \cdot a^2 \quad \Rightarrow \quad \textbf{lineare Eigenbeschleunigung}\;\; \vec{\boldsymbol{\alpha}} \;=\; \gamma_u^3 \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\,.$$

  Damit ist bei der linearen Beschleunigung die Dreierkraft

  $$\vec{\boldsymbol{f}} \;=\; \gamma_u^3 \cdot m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \;=\; m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{\alpha}}\,.$$

Ist die **Eigenbeschleunigung** $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ eines Teilchens **konstant**, hat sie in *jedem* mitbewegten System den gleichen Wert, sodass wir dann in der SRT von einer **gleichförmigen Beschleunigung** des Teilchens sprechen.

3.3 Viererimpuls und Energie-Impuls-Vektor

Die Multiplikation der Vierergeschwindigkeit mit dem Lorentz-Skalar Ruhemasse m_0 ergibt den **Viererimpuls**

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \;=\; \left(p^\mu\right) \;&=\; m_0 \left(u^\mu\right) \\ &=\; \left(\gamma_u\, m_0\, c\,,\; \gamma_u\, m_0\, \vec{\boldsymbol{u}}\right) \;=\; \left(\widetilde{m}\, c\,,\; \widetilde{m}\, \vec{\boldsymbol{u}}\right) \;=\; \left(\widetilde{m}\, c\,,\; \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}\right) \\ &=\; \Big(\gamma_u\, m_0\, c\,,\; \gamma_u\, \vec{\boldsymbol{p}}\Big) \quad\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{P} \;=\; \left(p^\mu\right) \;=\; \left(\widetilde{m}\, c\,,\; \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}\right) \;=\; \left(\frac{m_0\, c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,,\; \frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)} \tag{3.5}$$

Wir unterscheiden hier zwischen dem (klassischen)

$$\textbf{Newton'schen Impuls} \quad \vec{\boldsymbol{p}} \;=\; m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$$

und dem

$$\textbf{relativistischen Impuls} \quad \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}} \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\, \vec{\boldsymbol{u}} \;=\; \gamma_u\, m_0\, \vec{\boldsymbol{u}} \;=\; \gamma_u\, \vec{\boldsymbol{p}}\,.$$

Achtung ! Der relativistische Impuls wird auch (relativistischer) **Dreierimpuls** genannt und ist gleich dem Raumanteil des Viererimpulses.

Mit der **relativistischen Teilchenenergie** $E = m\, c^2 \;\Leftrightarrow\; m\, c = E/c$
und mit $\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}^{\,2} = p_{\mathrm{r}}^2$ resultiert aus (3.5) schließlich der **Energie-Impuls-Vektor**

$$\boxed{\mathbf{P} \;=\; \left(p^\mu\right) \;=\; \left(\frac{E}{c}\,,\; \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}\right)} \tag{3.6}$$

und der **relativistische Energie-Impuls-Satz**

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle \;&=\; \eta_{\mu\nu}\, p^\nu p^\mu \;=\; \frac{E^2}{c^2} - p_{\mathrm{r}}^2 \;=\; \frac{m^2 c^4}{c^2} - p_{\mathrm{r}}^2 \\ &=\; \eta_{\mu\nu}\, m_0 u^\nu m_0 u^\mu \;=\; m_0^2\, \eta_{\mu\nu}\, u^\nu u^\mu \;=\; m_0^2\, c^2 \;=\; \frac{E_0^2}{c^2} \qquad \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{E^2 \;=\; E_0^2 + p_{\mathrm{r}}^2 \cdot c^2}\;.$$

Der Masse-Energie-Äquivalenz entsprechend sind auch Viererimpuls und Energie-Impuls-Vektor äquivalent.

3.4 Viererkraft und relativistische Bewegungsgleichung

Wir definieren und diskutieren die

$$\textbf{Viererkraft} \quad \mathbf{K} \;=\; \big(K^\mu\big) \;=\; \big(K^0,\, K^1,\, K^2,\, K^3\big) \;=\; \big(K^0,\; \vec{K}\;\big)$$

im System S. Die Viererkraft wird auch Minkowski-Kraft genannt. Völlig analog gelten dann die Ergebnisse in S', wenn die systemabhängigen Größen mit einem Strichindex versehen werden.

Zunächst listen wir alle Größen auf, die bei der Herleitung der Viererkraft eine Rolle spielen:

$$\widetilde{m} \;=\; \gamma_u\, m_0 \qquad \text{relativistische Masse ,}$$

$$\vec{\boldsymbol{u}} \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{Teilchengeschwindigkeit in } S \text{ ,}$$

$$\mathrm{d}\tau \;=\; \mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{\vec{\boldsymbol{u}}^{\,2}}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{Eigenzeitdifferential } \mathrm{d}\tau \text{ ,}$$

$$\mathbf{U} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathbf{X} = \Big(\gamma_u\, c\,,\; \gamma_u\,\vec{\boldsymbol{u}}\Big) \qquad \text{Vierergeschwindigkeit ,}$$

$$\vec{\boldsymbol{p}} \;=\; m_0\,\vec{\boldsymbol{u}} \qquad \text{klassischer Impuls ,}$$

$$\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}} \;=\; \gamma_u\, m_0\,\vec{\boldsymbol{u}} \qquad \text{relativistischer Impuls ,}$$

$$\mathbf{P} \;=\; m_0\,\mathbf{U} = \Big(\gamma_u\, m_0\, c\,,\; \gamma_u\, m_0\,\vec{\boldsymbol{u}}\Big) = \left(\frac{E}{c}\,,\; \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}\right) \qquad \text{Viererimpuls ,}$$

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} \;=\; \gamma_u^3\,\frac{\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)}{c^2} \qquad \text{zeitliche Ableitung von } \gamma_u \text{ ,}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \frac{\mathrm{d}^2\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{Teilchenbeschleunigung in } S \text{ ,}$$

$$\mathbf{A} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{U} = \left(\gamma_u^4\,\frac{\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)}{c}\,,\; \gamma_u^4\,\frac{\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}} + \gamma_u^2\,\vec{\boldsymbol{a}}\right) \qquad \text{Viererbeschleunigung ,}$$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{f}} \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}} = m_0\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\gamma_u(t)\cdot\vec{\boldsymbol{u}}(t)\big) \qquad \text{(relativistische) Dreierkraft in } S\\ &= m_0\left[\gamma_u^3\,\frac{\big(\vec{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{a}}\big)}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}} + \gamma_u\,\vec{\boldsymbol{a}}\right] .\end{aligned}$$

Die (relativistische) **Dreierkraft** $\vec{\boldsymbol{f}}$ ist die Änderung des relativistischen Impulses pro Zeiteinheit in S und demzufolge die Kraft, die in S auf ein Teilchen (beschleunigend) wirkt bzw. vom beschleunigten Teilchen ausgeübt wird. Wie man sieht, geht $\vec{\boldsymbol{f}}$ im nichtrelativistischen Limes gegen die Newton'sche Kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$:

$$\lim_{\vec{\boldsymbol{u}}\to\vec{\mathbf{0}}}\vec{\boldsymbol{f}} \;=\; \vec{\boldsymbol{F}} = m_0\,\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}\ .$$

In Analogie zur klassischen Mechanik ist die (relativistische) Viererkraft $\mathbf{K}$ definiert durch

$$\boxed{\mathbf{K} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathbf{P} \;=\; m_0\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathbf{U} \;=\; m_0 \cdot \mathbf{A}} \;.$$

Mit

$$\mathrm{d}E = \vec{\boldsymbol{f}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{f}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{f}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$$

gilt dann einerseits

$$\mathbf{K} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathbf{P} \;=\; \gamma_u \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{P} \;=\; \gamma_u \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E}{c}\,,\; \vec{\boldsymbol{p}}_{\mathbf{r}}\right) \;=\; \left(\gamma_u\,\frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\,,\; \gamma_u\,\vec{\boldsymbol{f}}\right) \;,$$

$$\mathbf{K} \;=\; \left(\gamma_u\,\frac{\vec{\boldsymbol{f}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}}{c}\,,\; \gamma_u\,\vec{\boldsymbol{f}}\right) \;. \tag{3.7}$$

$$\left[\quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \;=\; \left(\frac{\vec{K} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}}{c}\,,\; \vec{K}\right) \quad\right]$$

Andererseits gilt aber auch

$$\mathbf{K} \;=\; m_0 \cdot \mathbf{A} \;=\; m_0 \cdot \left(\gamma_u^4\,\frac{(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}})}{c}\,,\; \gamma_u^4\,\frac{(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}})}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}} + \gamma_u^2\,\vec{\boldsymbol{a}}\right) \;. \tag{3.8}$$

$$\left[\; m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{F}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \;=\; \left(\gamma_u^4\,\frac{(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}})}{c}\,,\; \gamma_u^4\,\frac{(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}})}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}} + \gamma_u^2\,\vec{\boldsymbol{F}}\right) \;\right]$$

Vergleichen wir (3.7) und (3.8), so finden wir folgende Richtungsabhängigkeiten:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}} \parallel \vec{\boldsymbol{u}} \quad &\Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}} \parallel \vec{\boldsymbol{a}}\,,\;\; \vec{\boldsymbol{f}} \parallel \vec{\boldsymbol{u}} \\
&\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{f}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = m_0 \cdot \gamma_u^3 \cdot \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \\
&\Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}}_{\parallel} \;=\; \gamma_u^3\,m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\;.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{u}} \quad &\Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}} \parallel \vec{\boldsymbol{a}}\,,\;\; \vec{\boldsymbol{f}} \perp \vec{\boldsymbol{u}} \\
&\Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}}_{\perp} \;=\; \gamma_u\,m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\;.
\end{aligned}$$

Den Term $\gamma_u^3\,m_0$ bezeichnete man früher als *longitudinale Masse* und den Term $\gamma_u\,m_0$ als *transversale Masse*. Ein besonders wichtiges Resultat unserer Betrachtungen ist die folgende Feststellung:

> Falls $\vec{\boldsymbol{a}}$ weder parallel zu $\vec{\boldsymbol{u}}$ ist noch senkrecht auf $\vec{\boldsymbol{u}}$ steht, sind die die Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$ und die das Teilchen beschleunigende Kraft $\vec{\boldsymbol{f}}$ nicht mehr parallel.

- Bedeutung von $K^0 = \dfrac{\gamma_u}{c} \cdot \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad K^0 \propto \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$:

  K^0 ist proportional zur **Leistung** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,E$ und beschreibt demzufolge – vom ruhenden Inertialsystem S aus beobachtet – die vom beschleunigten Teilchen pro Zeiteinheit aufgenommene oder abgegebene Energie.

- Bedeutung von $\vec{K} = \left(K^1, K^2, K^3\right) = \gamma_u \cdot \vec{\boldsymbol{f}} \quad \Rightarrow \quad \vec{K} \propto \vec{\boldsymbol{f}}$:

  $\vec{K}$ ist proportional zur Dreierkraft $\vec{\boldsymbol{f}}$. Ein Beispiel für die Dreierkraft $\vec{\boldsymbol{f}}_\perp$ ist **Lorentz-Kraft** infolge der Zentripetalbeschleunigung, die eine bewegte elektrischen Ladung im Magnetfeld erfährt.

  Man erhält die Dreierkraft aus der Viererkraft gemäß

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{f}} \;=\; \frac{1}{\gamma_u}\,\vec{K}}\;.$$

- Weil die Ruhemasse m_0 ein Lorentz-Skalar ist und weil formal die Viererbeschleunigung senkrecht auf der Vierergeschwindigkeit steht, muss formal auch die Viererkraft senkrecht auf der Vierergeschwindigkeit stehen:

$$\mathbf{A} \perp \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \perp \mathbf{U}\,.$$

- Im nichtrelativistischen Limes, d. h. wenn S das **Ruhesystem** des Teilchens mit $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ und $\gamma_u = 1$ ist, verschwindet der Zeitanteil K^0 der Viererkraft und der Raumanteil $\vec{K}$ geht über in die klassische (Newton'sche) Kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$ gemäß

$$\mathbf{K} \;=\; \left(0\,,\; m_0\,\vec{\boldsymbol{a}}\right) \;=\; \left(0\,,\; m_0\,\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}\right) \;=\; \left(0\,,\; \vec{\boldsymbol{F}}\,\right)\,.$$

Relativistische Bewegungsgleichung

In Analogie zur klassischen Bewegungsgleichung bzw. zum 2. Newton'schen Axiom (der klassischen Mechanik)

$$\vec{\boldsymbol{F}} \;=\; m_0 \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\boldsymbol{p}} \;=\; m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\boldsymbol{u}} \tag{3.9}$$

können wir jetzt die **relativistische Bewegungsgleichung** bzw. das 2. Axiom der relativistischen Mechanik wie folgt im Viererkalkül formulieren:

$$\mathbf{K} \;=\; m_0 \cdot \mathbf{A} \;=\; \gamma_u \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{P} \;=\; \widetilde{m} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{U} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{K} \;=\; m_0 \cdot \mathbf{A} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathbf{P} \;=\; m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathbf{U}}\;.$$

3.5 Transformation der Viererkraft in Standardkonfiguration

Wie transformiert sich die Viererkraft und wie verhält sich dabei die Dreierkraft?

Weil sich die Form der Vierervektoren bei Transformation nicht ändert, gilt **allgemein** für die Viererkraft, d. h. für beliebige Lorentz-Transformationen wie beispielsweise auch den $\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{f}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{c} \\ \gamma_u \cdot \vec{\boldsymbol{f}} \end{pmatrix} \;\leftarrow \text{Transformation} \rightarrow\; \mathbf{K'} = \begin{pmatrix} K'^0 \\ \vec{K}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{u'} \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{f}}'\cdot\vec{\boldsymbol{u}}'}{c} \\ \gamma_{u'} \cdot \vec{\boldsymbol{f}}' \end{pmatrix}\,.$$

Aus der Viererkraft erhält man die Dreierkraft wie folgt:

$$\text{in } S: \quad \frac{1}{\gamma_u}\,\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{f}\cdot\vec{u}}{c} \\ \vec{f} \end{pmatrix}, \qquad \text{in } S': \quad \frac{1}{\gamma_{u'}}\,\mathbf{K'} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{f}\,'\cdot\vec{u}\,'}{c} \\ \vec{f}\,' \end{pmatrix}.$$

Wir demonstrieren jetzt die (inverse) Lorentz-Transformation

$$\mathbf{K'}(S') \quad \xrightarrow{L^{-1}} \quad \mathbf{K}(S)$$

der Viererkraft in **Standardkonfiguration** für den Fall, dass sich das Teilchen in S' mit der Geschwindigkeit $\vec{u}\,' = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right)$ bewegt. Dabei gehen wir aus von der Viererkraft-Formel (3.7), schreiben diese aber für das System S' um:

$$\mathbf{K'} \;=\; \left(\gamma_{u'}\,\frac{\vec{f}\,'\cdot\vec{u}\,'}{c}\;,\;\gamma_{u'}\,\vec{f}\,'\right).$$

Die Transformationsgleichung lautet damit

$$\mathbf{K} \;=\; L^{-1}\cdot\mathbf{K'} \;=\; \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} K'^0 \\ K'^1 \\ K'^2 \\ K'^3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \gamma\,K'^0 + \frac{v}{c}\,\gamma\,K'^1 \\ \frac{v}{c}\,\gamma\,K'^0 + \;\gamma\,K'^1 \\ K'^2 \\ K'^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \gamma_{u'}\,\frac{1}{c}\left(\vec{f}\,'\cdot\vec{u}\,'\right) \\ \gamma_{u'}\,f'_x \\ \gamma_{u'}\,f'_y \\ \gamma_{u'}\,f'_z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \gamma\,\gamma_{u'}\,\frac{1}{c}\left(\vec{f}\,'\cdot\vec{u}\,'\right) + \frac{v}{c}\,\gamma\,\gamma_{u'}\,f'_x \\ \frac{v}{c}\,\gamma\,\gamma_{u'}\,\frac{1}{c}\left(\vec{f}\,'\cdot\vec{u}\,'\right) + \gamma\,\gamma_{u'}\,f'_x \\ \gamma_{u'}\,f'_y \\ \gamma_{u'}\,f'_z \end{pmatrix}$$

$$= \gamma_{u'}\cdot\begin{pmatrix} \gamma\,\frac{1}{c}\left(\vec{f}\,'\cdot\vec{u}\,'\right) + \gamma\,\frac{v}{c}\,f'_x \\ \gamma\,\frac{v}{c^2}\left(\vec{f}\,'\cdot\vec{u}\,'\right) + \gamma\,f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \;=\; \gamma_u\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\left(\vec{f}\cdot\vec{u}\right) \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} K^0 \\ K^1 \\ K^2 \\ K^3 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Aus den Transformationsgleichungen für die Komponenten der Dreierkraft $\vec{f}\,'$ in (3.10) lassen sich jetzt die Komponenten f_x, f_y, f_z der Dreierkraft in S berechnen. Dabei benutzen wir (2.14)

$$\gamma_u \;=\; \gamma\left(1 + \frac{v\,u'_x}{c^2}\right)\gamma_{u'}$$

und zum Schluss die relativistische Vertauschung:

$$
\begin{aligned}
\gamma_u\, f_x &= \gamma_{u'}\, \gamma\, \frac{v}{c^2} \big(\vec{\boldsymbol{f}}\,'\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{u}}\,'\big) + \gamma_{u'}\, \gamma\, f'_x \quad \Leftrightarrow \\
f_x &= \frac{\gamma\, \gamma_{u'} \left[f'_x + \frac{v}{c^2} \big(\vec{\boldsymbol{f}}\,'\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{u}}\,'\big)\right]}{\gamma_u} \;=\; \frac{\gamma\, \gamma_{u'} \left[f'_x + \frac{v}{c^2} \big(\vec{\boldsymbol{f}}\,'\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{u}}\,'\big)\right]}{\gamma \left(1 + \frac{v\, u'_x}{c^2}\right) \gamma_{u'}} \\
&= \frac{f'_x + \frac{v}{c^2}\, f'_x\, u'_x + \frac{v}{c^2} \big(f'_y\, u'_y + f'_z\, u'_z\big)}{1 + \frac{v\, u'_x}{c^2}}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\; f_x \;=\; f'_x + \frac{\frac{v}{c^2} \big(f'_y\, u'_y + f'_z\, u'_z\big)}{1 + \frac{v}{c^2}\, u'_x}\,, \qquad f'_x \;=\; f_x - \frac{\frac{v}{c^2} \big(f_y\, u_y + f_z\, u_z\big)}{1 - \frac{v}{c^2}\, u_x} \;}\,. \tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_u\, f_y &= \gamma_{u'}\, f'_y \quad \Leftrightarrow \\
f_y &= \frac{\gamma_{u'}\, f'_y}{\gamma_u} \;=\; \frac{\gamma_{u'}\, f'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v\, u'_x}{c^2}\right) \gamma_{u'}}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\; f_y \;=\; \frac{f'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2}\, u'_x\right)}\,, \qquad f'_y \;=\; \frac{f_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2}\, u_x\right)} \;}\,. \tag{3.12}
$$

Analog ergeben sich die Transformationsgleichungen für die z-Komponente der Dreierkraft:

$$
\boxed{\; f_z \;=\; \frac{f'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2}\, u'_x\right)}\,, \qquad f'_z \;=\; \frac{f_z}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2}\, u_x\right)} \;}\,. \tag{3.13}
$$

Wie erwartet erhalten wir mit dem Viererkalkül die gleichen Transformationsgleichungen für die Dreierkraft wie mit der elementaren Darstellung im Abschnitt 2.15.

S' sei das (momentane) **Ruhesystem** des beschleunigten Teilchens mit

$$
\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \vec{\boldsymbol{0}} \quad \Rightarrow \quad |\vec{\boldsymbol{u}}\,| = u_x = v \quad \Rightarrow \quad \gamma_u = \gamma\,.
$$

Unter dieser Bedingung betrachten wir zwei spezielle Fälle:

- **lineare Beschleunigung** des Teilchens:

$$
\vec{\boldsymbol{a}}\,' = \big(a'_x, 0, 0\big) \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}}\,' = \big(f'_x, 0, 0\big) \overset{\vec{\boldsymbol{u}}\,'=0}{=} \big(F'_x, 0, 0\big) \qquad \longrightarrow \qquad f_x \;=\; F'_x\,,
$$

- **Zentripetalbeschleunigung** des Teilchens:

$$
\vec{\boldsymbol{a}}\,' = \big(0, a'_y, 0\big) \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}}\,' = \big(0, f'_y, 0\big) \overset{\vec{\boldsymbol{u}}\,'=0}{=} \big(0, F'_y, 0\big) \qquad \longrightarrow \qquad f_y \;=\; \tfrac{1}{\gamma}\, F'_y\,.
$$

3.6 Lorentz-Transformation der Lorentz-Kraft in Standardkonfiguration

Wie sich $\vec{\boldsymbol{E}}$- und $\vec{\boldsymbol{B}}$-Feld transformieren, d. h. sich beim Wechsel des Koordinatensystems verhalten, soll hier nicht erörtert werden, denn das ist Gegenstand der kovarianten Darstellung der Elektrodynamik.

Die **Lorentz-Kraft** $\vec{\boldsymbol{f}} = q\big(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\big) = q\left[\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_y B_z - u_z B_y \\ u_z B_x - u_x B_z \\ u_x B_y - u_y B_x \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$

ist die (relativistische) **Dreierkraft**, die (momentan) auf eine elektrische Punktladung q wirkt, wenn diese sich im Laborsystem S mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}$ durch ein dort existentes $\vec{\boldsymbol{E}}$-Feld und ein dort existentes $\vec{\boldsymbol{B}}$-Feld bewegt. Dabei gilt für die Wirkungsrichtung der Kraftanteile:

$$q\vec{\boldsymbol{E}} \upuparrows \vec{\boldsymbol{E}} \,, \qquad q\big(\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\big) \perp \vec{\boldsymbol{u}} \perp \vec{\boldsymbol{B}} \ \ \text{(Rechtssystem)} \,.$$

Wenn die auf ein Teilchen wirkende Kraft stets senkrecht zur Teilchengeschwindigkeit gerichtet ist und einen konstanten Betrag besitzt, bewegt sich dieses Teilchen auf einer Kreisbahn. Aber auch wenn der Betrag dieser Kraft nicht konstant ist, kann man zu jedem Zeitpunkt der Teilchenbewegung eine Kreisbahn konstruieren, deren Krümmungsradius gleich dem lokalen Krümmungsradius der tatsächlichen Teilchenbahn ist. Deshalb sprechen wir bei orthogonal zur Teilchengeschwindigkeit wirkenden Kräften auch von zentripetal beschleunigenden Kräften.

Ohne auf die Felder einzugehen, können wir mit (3.11), (3.12) und (3.13) sofort angeben, wie sich die Komponenten der Lorentz-Kraft von S nach S' in der **Standardkonfiguration** transformieren, also wenn sich S' mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_x, 0, 0) = (v, 0, 0)$ längs der x-Achse bewegt:

$$f'_x = f_x - \frac{\frac{v}{c^2}\big(f_y u_y + f_z u_z\big)}{1 - \frac{v\,u_x}{c^2}} \,, \quad f'_y = \frac{f_y}{\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)} \,, \quad f'_z = \frac{f_z}{\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)} \,.$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass es o.B.d.A. stets möglich ist, die Koordinatensysteme S und S' so zu drehen, dass sich das betrachtete Teilchen momentan längs der x-Achse bewegt und dass schließlich die Standardkonfiguration vorliegt.

Um zu veranschaulichen, wie sich diese Transformation auf die Lorentz-Kraft $\vec{\boldsymbol{f}}'$ in S' auswirkt, diskutieren wir vier spezielle Fälle:

1. $\vec{\boldsymbol{E}} = (E_x, E_y, E_z)\,, \quad \vec{\boldsymbol{u}} = (u_x, 0, 0)\,, \quad \vec{\boldsymbol{B}} = (B_x, B_y, B_z) \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}} = (f_x, f_y, f_z):$

$$f'_x = f_x \,, \quad f'_y = \frac{f_y}{\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)} \,, \quad f'_z = \frac{f_z}{\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)} \quad \Rightarrow \quad f'_y \neq f_y \,, \ \ f'_z \neq f_z \,.$$

Die Kraftkomponente f_x (in Bewegungsrichtung $\vec{\boldsymbol{v}}$ des Koordinatensystems S' *und* in Richtung der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{u}}$ der Punktladung) bleibt bei Transformation in diesem Fall erhalten, nicht jedoch die Kraftkomponenten senkrecht zu $\vec{\boldsymbol{v}}$. Dadurch verändert sich hier bei der Transformation die Richtung der Lorentz-Kraft.

Im Allgemeinen ändert sich nämlich die Richtung von $\vec{\boldsymbol{f}}$ bei Transformation.

2. $\vec{\boldsymbol{E}} = (0,0,E_z)$, $\quad \vec{\boldsymbol{u}} = (u_x,0,0)$, $\quad \vec{\boldsymbol{B}} = (0,B_y,0) \qquad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}} = (0,0,f_z)$:

$$f'_x = 0 \ , \quad f'_y = 0 \ , \quad f'_z = \frac{f_z}{\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)} \quad \Rightarrow \quad f'_z \neq f_z \ .$$

Wegen $qE_z\vec{\boldsymbol{e}}_z \upuparrows E_z\vec{\boldsymbol{e}}_z$ resultieren in diesem Fall allein die **zentripetal** wirkenden Kräfte f_z und f'_z, wobei sich der Betrag von $\vec{\boldsymbol{f}} = (0,0,f_z)$ bei der Transformation verändert, nicht jedoch die Richtung.

Zum gleichen Ergebnis kommen wir hier auch für $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{0}}$.

3. $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{0}}$, $\vec{\boldsymbol{u}} = (u_x,0,0) = \vec{\boldsymbol{v}} = (v,0,0)$, $\vec{\boldsymbol{B}} = (B_x,B_y,B_z) \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}} = (0,f_y,f_z)$ mit $f_y = -qu_xB_z$, $f_z = qu_xB_y$:

$$f'_x = 0 \ , \quad f'_y = \frac{f_y}{\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)} \ , \quad f'_z = \frac{f_z}{\gamma\left(1 - \frac{v\,u_x}{c^2}\right)} \quad \Rightarrow \quad f'_y \neq f_y \ , \ f'_z \neq f_z \ .$$

S' ist in diesem Fall das Ruhesystem der Punktladung gemäß $\vec{\boldsymbol{u}}\,' = \vec{\boldsymbol{0}}$. Die zur Bewegungsrichtung der Punktladung parallele $\vec{\boldsymbol{B}}$-Feldkomponente B_x liefert in S und auch in S' keinen Betrag zur Lorentz-Kraft, sodass nur die gemeinsam zentripetal beschleunigenden Kraftkomponenten f_y und f_z sowie f'_y und f'_z verbleiben. Wegen des Fehlens der Kraftkomponenten f_x bzw. f'_x (in Bewegungsrichtung $\vec{\boldsymbol{v}}$ von S') besitzen $\vec{\boldsymbol{f}}$ und $\vec{\boldsymbol{f}}'$ die gleiche Richtung.

4. $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{0}}$, $\quad \vec{\boldsymbol{u}} = (u_x,0,0) = \vec{\boldsymbol{v}} = (v,0,0)$, $\quad \vec{\boldsymbol{B}} = (0,B_y,0) \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{f}} = (0,0,f_z)$ bei $\vec{\boldsymbol{f}} = q\,\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$, $\quad f_z = qu_xB_y = qvB_y \quad$ und $\quad \vec{\boldsymbol{u}}\,' = \vec{\boldsymbol{0}}$:

$$f'_x = 0 \ , \quad f'_y = 0 \ , \quad f'_z = \frac{f_z}{\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad \Rightarrow \quad f'_z \neq f_z \ ,$$

$$\boxed{f'_z \ = \ \gamma\, f_z \ = \ \gamma \cdot qvB_y \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{v\to c\\ \gamma\to\infty}} f'_z = \infty} \ . \qquad (3.14)$$

In diesem einfachsten Fall, dem **Standardfall**, ist S' das Ruhesystem der Punktladung, die sich folglich im Laborsystem S mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}} = (v,0,0)$ (längs der x-Achse) bewegt. Das $\vec{\boldsymbol{B}}$-Feld ist gleichsinnig parallel zur y-Achse und steht folglich senkrecht auf der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}}$ der Punktladung. Die Lorentz-Kraft ist dabei in S' um den Faktor γ größer als im Laborsystem S. Weiterhin haben $\vec{\boldsymbol{f}} = (0,0,f_z)$ und $\vec{\boldsymbol{f}}' = (0,0,f'_z)$ bei gleicher Orientierung die Richtung der z- bzw. z'-Achse.

Die Lorentz-Kraft in S' ist in diesem Fall

$$\vec{\boldsymbol{f}}' \ = \ q\big(\vec{\boldsymbol{E}}' \ + \ \vec{\boldsymbol{u}}\,' \times \vec{\boldsymbol{B}}'\big) \quad \overset{\vec{\boldsymbol{u}}\,'=\vec{\boldsymbol{0}}}{\Longrightarrow} \quad \vec{\boldsymbol{f}}' \ = \ q\vec{\boldsymbol{E}}' \ .$$

Das bedeutet, dass die magnetische Kraft $\vec{\boldsymbol{f}} = q\,\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$, die das $\vec{\boldsymbol{B}}$-Feld in S auf q ausübt, von einem Beobachter in S', d. h. von einem mit q bewegten Beobachter, als die elektrische Kraft $\vec{\boldsymbol{f}}' = q\vec{\boldsymbol{E}}'$ interpretiert wird. Demzufolge erhält (3.14) die Form

$$f'_z \ = \ q \cdot E'_z \ = \ q \cdot \gamma v B_y \quad \Rightarrow \quad \gamma v B_y = E'_z \ .$$

4 Grundideen zur ART

Für spezielle Relativitätstheorie schreiben wir SRT und für allgemeine Relativitätstheorie ART.

Quellen und Literaturtips:

- Michael Ruhrländer, Aufstieg zu den Einsteingleichungen – Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, Pro Business, Berlin, 2014.
- Ray d'Inverno, Einführung in die Relativitätstheorie, 2. Auflage, Wiley-VCH, Weinheim, 2009.
- Georg Heinrichs, Einstein und die Schwarzen Löcher, Praxis-Schriftenreihe – Abteilung Phsik, Band 46, Aulis Verlag Deubner, 2. Auflage, Köln, 1993.
- Rainer Göhring, Kosmologie der Allgemeinen Relativitätstheorie, Frankfurt am Main, 2015, `https://www.physikalischer-verein.de/daten/seminare/ART/ART_Skript.pdf`
- Suchbegriff: "Epstein erklärt Einstein" online lesen – Relativity, `https://www.relativity.li/de/epstein/lesen`
- Suchbegriff: Actio und Reactio – Wikipedia.
- Suchbegriff: Trägheitskraft – Wikipedia, `https://de.wikipedia.org/wiki/Trägheitskraft`
- Suchbegriff: Allgemeine Relativitätstheorie – Wikipedia.
- Suchbegriff: Äquivalenzprinzip (Physik) – Wikipedia.
- Suchbegriff: Formelsammlung Physik: Relativitätstheorie – Wikibooks `https://de.wikibooks.org/wiki/Formelsammlung_Physik:_Relativitätstheorie`

Die Herleitungen und Darstellungen in diesem Abschnitt basieren nur auf Argumenten der klassischen Physik, der SRT und auf dem Äquivalenzprinzip. Demzufolge sind die Ergebnisse im wesentlichen Näherungen für kleine Geschwindigkeiten und schwache Gravitationsfelder. Wer es genau wissen und die ART wirklich verstehen will, der muss sich mit der ART auf der Grundlage der Differentialgeometrie bzw. dem Tensorkalkül befleißigen. Einen anschaulichen Einstieg ermöglicht diesbezüglich das Buch von Michael Ruhrländer (siehe *Quellen und Literaturtips*).

Hinweis: Wenn nicht explizit darauf hingewiesen wird, betreffen unsere Überlegungen nur im Gravitationsfeld *ruhende* Körper.

Wir beginnen die Ausführungen mit einem Zitat aus den Vorlesungen von Richard Feynman.[1] Er sagt dort zusammenfassend:
Die Einstein'sche Gravitationstheorie (ART) beschreibt

(1) „Wie sich die Geometrie der Raum-Zeit bei Anwesenheit von Materie ändert –
nämlich, daß die durch den Exzeßradius ausgedrückte Krümmung proportional der Masse innerhalb einer Kugel ist, … ."

(2) „Wie sich Gegenstände unter dem Einfluß von reinen Gravitationskräften bewegen –
nämlich, daß sich Gegenstände so bewegen, daß ihre Eigenzeit zwischen dem Anfangs- und Endpunkt maximal ist."

[1] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton und Matthew Sands, Feynman Vorlesungen über Physik, Band II: Elektromagnetismus und Struktur der Materie, 3. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, 2001, Abschnitt *42–9 Einsteins Gravitationstheorie*, Seite 843.

Der **Exzessradius** r_e ist die Differenz aus dem tatsächlich gemessenen Radius r_g und dem vorherbestimmten Radius r :

$$r_\mathrm{e} \ = \ r_\mathrm{g} - r \ .$$

Der Exzessradius ist ein Maß für die mittlere Krümmung einer Fläche oder eines Raums.

- Bei einem Kreis mit dem gemessenen Umfang C auf einer gekrümmten Fläche ergibt sich der vorherbestimmte Radius aus dem Kreisumfang $C = 2\pi r$ bezüglich einer ebenen Fläche mit $r = \frac{C}{2\pi}$ und daraus schließlich der Exzessradius mit

  $$r_\mathrm{e} \ = \ r_\mathrm{g} - \frac{C}{2\pi} \ .$$

  Ist die Fläche, auf der man einen Kreisumfang C und den zugehörigen Radius r_g misst, positiv gekrümmt wie beispielsweise auf einer Kugel, so ist $r_\mathrm{g} > r$.

- Ist eine Kugel mit der gemessenen Oberfläche A eingebettet in einem gekrümmten (3-dimensionalen) Raum, ergibt sich der vorherbestimmte Radius aus der Oberfläche $A = 4\pi r^2$ einer Kugel im Euklidischen Raum mit

  $$r \ = \ \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

  und daraus schließlich der Exzessradius mit

  $$r_\mathrm{e} \ = \ r_\mathrm{g} - \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \ .$$

In der Veranschaulichung des Einstein'schen Gravitationsgesetzes durch Richard Feynman ist der Exzessradius einer Kugel mit dem Volumen V außerdem proportional zur Kugelmasse M bei vorausgesetzter konstanter Massendichte

$$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\,\pi r^3} \quad \Leftrightarrow \quad M = \varrho \cdot V = \varrho \cdot \frac{4}{3}\,\pi r^3 \ .$$

Insofern ist der Exzessradius das **Maß für die Raumkrümmung** gemäß

$$r_\mathrm{e} \ = \ r_\mathrm{g} - \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \ = \ \frac{G}{3c^2} \cdot M$$

mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{G}{3c^2}$ und der Gravitationskonstante G.

4.1 Vorbemerkungen

Zum Massebegriff

Abhängig vom physikalischen Zusammenhang, in dem es um einen Körper bzw. ein Teilchen der Masse m geht, unterscheiden wir drei Massebegriffe:

- **aktive schwere Masse**: (felderzeugende Masse, Gravitationszentrum)
  Maß für die Quellstärke bei der Erzeugung des Gravitationsfeldes,
- **passive schwere Masse**: (Testteilchen im Gravitationsfeld)
  Maß für die Reaktion auf ein Gravitationsfeld,
- **träge Masse**: (in SRT: relativistische Masse, bewegte träge Masse, Impulsmasse)
  Maß für den Widerstand eines Körpers gegenüber Bewegungsänderungen.

Klassifizierung von Kräften

In den **Ingenieurswissenschaften** werden praxisnah und anschaulich drei Arten von Kräften unterschieden:[2]

1. **„Eingeprägte Kräfte**

   …sind die von außen auf einen Körper einwirkenden Kräfte. Die eingeprägte Kraft ist physikalisch vorgegeben, wie z. B. die Gewichtskraft, die Luftwiderstandskraft oder die Federkraft.**“**

2. **„Zwangskräfte**

   …sind diejenigen Kräfte, die bewirken, dass ein Körper sich aus einem durch Zwangsbedingungen vorgeschriebenen Bereich nicht herausbewegen kann. Diese Zwangskräfte sind Normal (senkrecht) zur Bahn eines Massenpunktes. Beispiele für Zwangskräfte sind Kontaktkräfte, Lagerkräfte, Haftung.**“** „Technisch“ bedingte Zwangskräfte resultieren allgemein aus einer starren Führung der Bewegung eines Körpers. Zwangskräfte sind also von außen auf einen Körper einwirkende Kräfte, die aber im Fall stationärer Zwangsbedingungen keine Arbeit verrichten, weil sie senkrecht zur Bewegungsrichtung wirken.

3. **„Trägheitskräfte**

   …sind Scheinkräfte, die aufgrund der Trägheit des Körpers auftreten. …Die Trägheit eines Körpers wirkt immer so, dass er versucht, seinen Bewegungszustand beizubehalten. …Diese Trägheitskraft wird auch als **d'Alembertsche Trägheiskraft** bezeichnet. Sie kann als eine Kraft angesehen werden, welche entgegen der äußeren Kraft auf einen beschleunigten Körper wirkt und dort – formal gesehen – zu einem dynamischen Kräftegleichgewicht führt.**“**

In der **klassischen Mechanik** unterscheidet man zwischen „echten“ Kräften und Scheinkräften. Weil auch die Scheinkräfte real, d. h. messbar sind, sprechen wir besser nicht von Scheinkräften sondern von Trägheitskräften.

[2] Zitiert aus `www.ingenieurskurse.de`, Suchbegriff: Klassifizierung von Kräften – Physik – Online-Kurse.

- „**Echte**“ **Kräfte**, beispielsweise die elektrostatische Kraft zwischen zwei Ladungsträgern oder die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern:

  „Echte“ Kräfte besitzen Quellen und sind definiert durch die drei Newton'schen Axiome. Dem 3. Newton'schen Axiom *actio gegengleich reactio* gehorchend sind sie folglich Wechselwirkungskräfte zwischen mindestens zwei Körpern oder Teilchen. „Echte“ Kräfte sind nicht abhängig vom Bezugssystem, d. h., sie verschwinden nicht im Inertialsystem.

  Entsprechend der Klassifizierung der Kräfte in den Ingenieurswissenschaften sind **eingeprägte Kräfte** und **Zwangskräfte** „echte“ Kräfte.

- **Trägheitskräfte**, beispielsweise die auf einen Körper wirkende Kraft bei translatorischer Beschleunigung, die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft:

  Trägheitskräfte werden auch Inertialkräfte, fiktive Kräfte, Scheinkräfte, Pseudokräfte oder Massenkräfte genannt.

  Trägheitskräfte gehorchen nicht dem 3. Newton'schen Axiom *actio gegengleich reactio* und sind folglich keine Wechselwirkungskräfte zwischen unterschiedlichen Körpern. Sie resultieren immer nur aus der Trägheit des einzelnen Körpers selbst. Trägheitskräfte sind abhängig vom Bezugssystem und lassen sich wegtransformieren, sodass sie im Inertialsystem verschwinden.

  Die Trägheitskraft eines beschleunigt bewegten Teilchens der Masse m ist die Kraft, die das Teilchen der beschleunigenden Kraft entgegensetzt. Die Masse m tritt bei Trägheitskräften als Proportionalitätskonstante auf.

Beispiel Zentrifuge

Ein Körper bewege sich auf einer Kreisbahn mit $|\vec{\boldsymbol{v}}| = v = \text{const}$, wobei $\vec{\boldsymbol{v}}$ der Bahngeschwindigkeitsvektor sein soll. Der Körper sei über eine starre Verbindung mit der Rotationsachse verbunden. $\vec{\boldsymbol{v}}$ steht stets senkrecht auf der zum Rotationszentrum gerichteten Radialbeschleunigung des Körpers, $\vec{\boldsymbol{v}}$ wechselt also ständig seine Richtung. Bei dieser Richtungsänderung macht sich die Trägheit des Körpers als **Zentrifugalkraft** bemerkbar. Die Zentrifugalkraft $F_{\mathrm{zf}} = m \cdot \frac{v^2}{r}$ ist eine Trägheitskraft, weil sie aus der Trägheit des Körpers selbst stammt bzw. weil ein zweiter Körper fehlt, von dem eine Zugkraft nach außen ausgeht. Der Körper „spürt“ die Zentrifugalkraft, also sind Trägheitskräfte messbar.

Der Körper hat aufgrund seiner Trägheit das Bestreben, sich tangential zur Kreisbahn geradlinig und gleichförmig mit $v = \text{const}$ weiterzubewegen. Das kann er aber nicht, weil er durch die starre Verbindung gezwungen wird, auf der Kreisbahn zu bleiben. Die starre Verbindung übt also eine Zwangskraft auf den Körper aus, die **Zentripetalkraft**. Die Zentripetalkraft ist eine „echte“ Kraft, weil sie dem 3. Newton'schen Axiom gehorcht, d. h., die Zentrifugalkraft aus dem Körper und die durch die starre Verbindung auf den Körper wirkende Zentripetalkraft sind entgegengesetzt gleich.

Zentrifugen dienen der Stofftrennung. Beispielsweise lassen sich die Bestandteile von Suspensionen und Emulsionen in Abhängigkeit von der Massendichte der einzelnen Teilchen schichtweise voneinander trennen. In Analogie zum Auftrieb von Körpern in Flüssigkeiten „fliehen“ beim Zentrifugieren die Teilchen mit größerer Massendichte stärker nach außen in Richtung der Zentrifugalkraft als Teilchen mit kleinerer Massendichte.

Ein Flüssigkeitstropfen wird beim Zentrifugieren gleichsam „zwischen“ Zentrifugalkraft und Zentripetalkraft, d. h. „zwischen“ Trägheitskraft und Zwangskraft plattgedrückt.

4.2 Freier Fall

In der klassischen Mechanik wird der freie Fall eines Testteilchens der Masse m in einem Gravitationsfeld einer Masse M durch das Newton'sche Gravitationsgesetz

$$\vec{\boldsymbol{F}}_m = -\,G\,\frac{M \cdot m}{r^2}\,\vec{\boldsymbol{e}}_r = -\vec{\boldsymbol{F}}_M \tag{4.1}$$

beschrieben. Dabei haben wir zur Vereinfachung die Punktmasse M bzw. das „Gravitationszentrum“ in den Koordinatenursprung gelegt, sodass r der Abstand zwischen den beiden Punktmassen M und m ist. $\vec{\boldsymbol{F}}_m$ ist die Kraft, mit der m von M angezogen wird, und $\vec{\boldsymbol{F}}_M$ ist die Kraft, mit der M von m angezogen wird. Wie man sieht ist die Gravitationskraft eine Wechselwirkungskraft, also eine „echte“ Kraft zwischen zwei Körpern, die wegen

$$\vec{\boldsymbol{F}}_m = -\vec{\boldsymbol{F}}_M \quad \Rightarrow \quad \text{actio gegengleich reactio}$$

dem 3. Newton'schen Axiom gehorcht. Weiterhin gehorcht die Gravitationskraft dem 2. Newton'schen Axiom, d. h. der Newton'schen Bewegungsgleichung

$$\vec{\boldsymbol{F}} = M \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{M}\ .$$

Aus (4.1) folgt damit und mit der Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{g}}$ der Testteilchenmasse m sowie der Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$ der Masse M

$$\vec{\boldsymbol{F}}_m \ \Rightarrow \ \vec{\boldsymbol{g}} = -\,G\,\frac{M}{r^2}\,\vec{\boldsymbol{e}}_r\ , \qquad \vec{\boldsymbol{F}}_M \ \Rightarrow \ \vec{\boldsymbol{a}} = G\,\frac{m}{r^2}\,\vec{\boldsymbol{e}}_r\ .$$

Das Testteilchen mit der Masse $m \ll M$ wird demzufolge im Gravitationsfeld von M mit $|\vec{\boldsymbol{g}}| \gg |\vec{\boldsymbol{a}}|$ beschleunigt und es gilt

$$|\vec{\boldsymbol{g}}| \propto M\ , \qquad |\vec{\boldsymbol{a}}| \propto m\ .$$

Wie man sieht, wird auch M im Gravitationsfeld von m beschleunigt – nämlich mit der Beschleunigung $\vec{\boldsymbol{a}}$, sodass sich M und m mit einer Gesamtbeschleunigung von $|\vec{\boldsymbol{g}}| + |\vec{\boldsymbol{a}}|$ aufeinander zubewegen. Eine wichtige Erkenntnis hierbei ist, dass die Beschleunigung des Testteilchens nicht von der eigenen Masse m, sondern nur von der „felderzeugenden“ Masse M abhängt, woraus folgt:

Alle Körper fallen (im Vakuum) **gleich schnell**.

Weil das Gravitationspotential Φ konventionsgemäß stets negativ ist mit $\Phi(r \to \infty) \to 0$, muss auch die potentielle Energie eines Körpers der Masse m im Gravitationsfeld stets negativ sein:

$$E_{\text{pot}} \ = \ m \cdot \Phi \ < \ 0\ , \quad E_{\text{pot}}(r \to \infty) \to 0\ .$$

Wegen der Energieerhaltung ist deshalb die Gesamtenergie eines aus dem Unendlichen kommenden im Gravitationsfeld frei fallenden Körpers bei verschwindender Anfangsgeschwindigkeit stets

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \;\equiv\; 0 \;=\; \text{const} \;.$$

Beispiel

Als Testteilchen bzw. Testkörper wählen wir ein mit Astronauten besetztes Raumschiff, das sich geradlinig gleichförmig, also als Inertialsystem auf ein Gravitationszentrum wie beispielsweise den Mond zubewegt. Der Mond bietet sich als Beispiel für eine „felderzeugende“ Masse M an, weil er keine Atmosphäre besitzt. Gerät das Raumschiff schließlich in das Gravitationsfeld des Mondes, wirkt dessen Anziehungskraft auf alle Bestandteile des Raumschiffs gleichermaßen und alle seine Teile fallen mit der gleichen Beschleunigung (gleich schnell) frei in Richtung Mond. Frei bedeutet hier,

- dass keine äußeren Kräfte, insbesondere keine Zwangskräfte auf das Raumschiff wirken und
- dass sich die Trägheitskräfte, welche durch die Fallbeschleunigung hervorgerufen werden, und die Gravitationskräfte gegenseitig exakt aufheben.

Folglich „spüren“ das Raumschiff und seine Besatzung keinerlei Kräfte.[3] Das Raumschiff fällt also beschleunigt und dennoch selbst **kräftefrei**[4] auf den Mond.
Ein im Idealfall kugelförmiger Flüssigkeitstropfen behält im freien Fall unverändert seine Kugelform (vergleiche mit dem Flüssigkeitstropfen in der Zentrifuge).

Anschluss an die ART

Weil das Raumschiff selbst **kräftefrei** ist, kann man es als **lokales Inertialsystem** betrachten, obwohl es sich relativ zum Mond beschleunigt bewegt.
„ Diese Beobachtung lässt sich umdeuten, indem man das frei fallende Bezugssystem als das hier allein gültige Inertialsystem definiert. Dann ist das vorherige Bezugssystem[5], in dem Gravitation herrscht, kein Inertialsystem mehr, denn von dem neuen Inertialsystem aus gesehen bewegt es sich entgegengesetzt zum freien Fall, also beschleunigt. In diesem System treten dann Trägheitskräfte auf, die exakt mit den vorher dort festgestellten Gravitationskräften übereinstimmen und sie daher vollständig „erklären“ können. Unter einem Inertialsystem versteht man dann nur ein solches, in dem keine Gravitation herrscht. Gravitationskraft als ein eigenständiges Phänomen existiert in dieser Beschreibung nicht. Sie wird zu einer Trägheitskraft, die nur in Bezugssystemen auftritt, die keine solchen Inertialsysteme sind. Diese Feststellung ist gleichbedeutend mit dem Äquivalenzprinzip, der Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.**“**[6] Bezeichnen wir die Raumschiffbesatzung als Beobachter, so können wir folgendes feststellen:

[3]Die Gezeitenkräfte aufgrund der Inhomogenität des Gravitationsfeldes des Mondes können wir hier vernachlässigen.

[4]Dieser Zustand der Kräftefreiheit wird auch als Schwerelosigkeit bezeichnet, weil das Raumschiff bzw. die Astronauten dabei die Schwerkraft nicht spüren. Dessenungeachtet bewirkt aber gerade die Anziehungskraft (Schwerkraft, Gravitationskraft) des Mondes die Beschleunigung des Raumschiffs.

[5]Mit dem *vorherigen Bezugssystem* ist hier das Gravitationsfeld gemeint, in dem ein Körper bzw. bezüglich dessen das lokale Inertialsystem frei fällt.

[6]Zitiert aus `https://de.wikipedia.org/wiki/Trägheitskraft`

Ein Beobachter hat keine experimentelle Möglichkeit, den freien Fall im Gravitationsfeld vom Aufenthalt in einem lokalen Inertialsystem zu unterscheiden.

Das Äquivalenzprinzip erscheint schon in der Newton'schen Gravitationstheorie, wenn wir den Einfluss des Gravitationsfeldes mit dem Gravitationspotential $\mathit{\Phi}(\vec{\boldsymbol{r}})$ auf einen Testkörper der Masse m beobachten. Das Gravitationsfeld übt dann auf den Testkörper die Schwerkraft

$$\vec{\boldsymbol{F}} \;=\; m \cdot (-\operatorname{grad} \mathit{\Phi}) \qquad \text{mit der } \textbf{schweren Masse } m$$

aus. Lassen wir den Testkörper frei fallen, wird die Schwerkraft zur beschleunigenden Kraft

$$\vec{\boldsymbol{F}} \;=\; m \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\,, \qquad \text{welche die } \textbf{träge Masse } m$$

mit $\vec{\boldsymbol{a}}$ beschleunigt. In beiden Fällen ist m der Proportionalitätsfaktor. Sind nach dem Äquivalenzprinzip träge und schwere Masse gleich, erhalten wir aus den beiden Gleichungen die folgende Beziehung (Differentialgleichung) zwischen dem Bewegungsverhalten des Testkörpers und dem Potential des Gravitationsfeldes:

$$\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \frac{\mathrm{d}^2\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t^2} \;=\; -\operatorname{grad}\mathit{\Phi} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t^2} + \operatorname{grad}\mathit{\Phi} \;=\; 0\,.$$

Und die Poisson-Gleichung

$$\nabla^2\mathit{\Phi} \;=\; \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\right)\mathit{\Phi} \;=\; 4\pi\, G\, \varrho$$

mit der Gravitationskonstante G und der Dichte ϱ der felderzeugenden Masse(verteilung) beschreibt den Zusammenhang zwischen dem **Feld** und seiner **Quelle**, also zwischen dem Gravitationsfeld (Potentialfeld $\mathit{\Phi}$) und der Massenverteilung (Massendichte ϱ).

4.3 Die grundlegenden Prinzipien zur ART

1. **Mach'sches Prinzip**

   „... ein **Inertialsystem“**... ist... **„** ein System, das sich relativ zur mittleren Bewegung der Fixsterne in einer ausgezeichneten Bewegung befindet. Es sind also die Fixsterne, die durch ihre Masse, Verteilung und Bewegung ein lokales Inertialsystem **bestimmen**. ...
   Mach sieht somit alle Materie in einer solchen Weise gekoppelt, daß Inertialkräfte ihren physikalischen Ursprung in der Materie haben.**“**[7] Die Materieverteilung bestimmt also die „Geometrie“ des Universums, d. h. die Art und Weise, wie sich Körper bzw. Teilchen und auch Lichtstrahlen im Universum bewegen.

   Das Mach'sche Prinzip widerspricht der Vorstellung von einer (absoluten) Bewegung bezüglich eines absoluten Raums. Nach dem Mach'schen Prinzip gibt es nur Bewegungen bezüglich aller anderen Körper im Universum, insbesondere bezüglich der Fixsterne.

[7]Zitiert aus Ray d'Inverno, Einführung in die Relativitätstheorie, 2. Auflage, Seite 179.

2. **Äquivalenzprinzip**

   Veranschaulicht wird das Äquivalenzprinzip beispielsweise mit dem sog. Fahrstuhlexperiment oder mit einem Beobachter in einer „fensterlosen" Rakete, die entweder in einem (homogenen) Gravitationsfeld ruht oder die in einem gravitationsfreien Raum geradlinig gleichförmig beschleunigt wird. Der Beobachter hat dann keine experimentelle Möglichkeit, Schwerefeld und Beschleunigung zu unterscheiden (siehe Abbildung 4.1.).

   In (ideal) homogenen Gravitationsfeldern frei fallende nichtrotierende Systeme sind Inertialsysteme. In (allgemein) inhomogenen Gravitationsfeldern **frei fallende nichtrotierende Systeme sind lokale Inertialsysteme**. In inhomogenen Gravitationsfeldern wirken an frei fallenden Körpern wegen ihrer räumlichen Ausdehnung immer sog. Gezeitenkräfte. Deshalb kann es dort nur „lokale" Inertialsysteme geben, die sich auf räumliche Bereiche erstrecken, in denen die Gezeitenkräfte vernachlässigbar sind. Somit lautet das Äquivalenzprinzip kurz:

   Lokal sind Trägheit und Schwere experimentell nicht unterscheidbar.

   Das Äquivalenzprinzip umfasst mehrere Aussagen, die aber alle miteinander zusammenhängen und prinzipiell denselben Sachverhalt charakterisieren:

   - Schwerefelder sind äquivalent zu Trägheitsfeldern bzw. Gravitationskräfte sind äquivalent zu Trägheitskräften. Kurz gesagt:

     Schwere und träge Masse sind gleichwertig.

   - Ein *konstant* beschleunigtes System ist äquivalent zu einem *homogenen* Gravitationsfeld.

   - **Im Vakuum fallen alle Körper gleich schnell** (Galilei).

     Das heißt, dass der freie Fall von Körpern unabhängig ist von ihrer Masse und ihrer Zusammensetzung.

   - **Gravitationsfelder sind an alles gekoppelt**. Eine Abschirmung vor Gravitationsfeldern ist nicht möglich. Durch Überlagerung von Gravitationsfeldern verschiedener Gravitationszentren entstehen Orte mit verschwindender Gravitation. So gibt es beispielsweise auf dem Weg von der Erde zum Mond einen Punkt, in dem sich die Anziehungskräfte von Erde und Mond gegenseitig exakt aufheben.

3. **Kovarianzprinzip** und **Allgemeines Relativitätsprinzip**

   Der Begriff Kovarianz leitet sich aus dem Lateinischen ab: *con-* heißt *mit* und *Varianz* von variare heißt Streuung oder *Änderung*. Im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie bedeutet Kovarianz die Unveränderlichkeit der Form von physikalischen Gleichungen beim Übergang von der SRT zur ART. Etwas spezieller ausgedrückt besagt das Kovarianzprinzip, dass die physikalischen Gesetze der SRT in **Tensornotation** (kovarianter Notation) in den lokalen Inertialsystemen der ART die gleiche Form besitzen.

Aus dem Kovarianzprinzip resultiert verallgemeinernd das **allgemeine Relativitätsprinzip**:

„Alle Naturgesetze lassen sich so formulieren, daß sie in jedem beliebigen (also auch beschleunigten oder einem Gravitationsfeld unterliegenden) lokalen Bezugssystem gleich lauten. Inbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit lokal gleich“[8] der Konstanten c.

4. **Korrespondenzprinzip**

   Die ART (Einstein'sche Gravitationstheorie) baut auf älteren Theorien auf und beinhaltet diese als Spezial- bzw. Grenzfälle in deren jeweiligem Gültigkeitsbereich. So ist die klassische (Newton'sche) Mechanik ein Spezialfall der SRT und sowohl die SRT als auch die Newton'sche Gravitationstheorie sind Spezialfälle der ART.

Die klassische Mechanik (einschließlich der Newton'sche Gravitationstheorie), die SRT und die ART beschreiben physikalische Gesetze und Sachverhalte in Raum und Zeit, d. h. auf der Grundlage entsprechend unterschiedlicher raum-zeitlicher Koordinatensysteme. Diese besitzen jeweils ihre eigene Metrik. Eine Metrik wiederum wird charakterisiert insbesondere durch das infinitesimale Abstandsquadrat $\mathrm{d}s^2$ zwischen zwei Punkten im Ortsraum oder zwischen zwei Ereignissen in der Raumzeit. Das infinitesimale Abstandquadrat heißt Linienelement. Die Definitheit einer Metrik ist mit den „Vektoren“ x wie folgt definiert:

$$\left.\begin{array}{l}\text{positiv definit}\\ \text{negativ definit}\\ \text{indefinit}\end{array}\right\} \text{ falls } \forall x \neq 0 \quad \left\{\begin{array}{l} x^2 > 0\,,\\ x^2 < 0\,,\\ \text{sonst, einschließlich } x^2 = 0\,.\end{array}\right.$$

In der Relativitätstheorie wird meistens die Metrik-Signatur $+2 \mathrel{\widehat{=}} (-,+,+,+)$, also die Metrik mit resultierendem negativen Zeitelement-Quadrat verwendet. Im Fall der Signatur $+2$ gilt:

$$\begin{array}{lcl}\text{zeitartiges Intervall} & \Leftrightarrow & \big(\Delta s\big)^2 < 0\,,\\ \text{lichtartiges (neutrales) Intervall} & \Leftrightarrow & \big(\Delta s\big)^2 = 0\,,\\ \text{raumartiges Intervall} & \Leftrightarrow & \big(\Delta s\big)^2 > 0\,.\end{array}$$

Der Zusammenhang zwischen Linienelement und Eigenzeit ist dann $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2$.

- Die **Klassische Mechanik/Newton'sche Gravitationstheorie** beschreibt physikalische Zusammenhänge im absoluten 3-dimensionalen Ortsraum, dem **Euklidischen Raum**, und in der absoluten oder besser gesagt universellen Zeit.

  Die Metrik des Euklidischen Raums ist positiv definit mit dem infinitesimalen Abstandsquadrat
  $$\mathrm{d}s^2 \;=\; \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^{\,2} \;>\; 0\,.$$

  Im Euklidischen Raum ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten die Gerade.

[8] Zitiert aus: Georg Heinrichs, Einstein und die Schwarzen Löcher, Praxis-Schriftenreihe – Abteilung Phsik, Band 46, Aulis Verlag Deubner, 2. Auflage, Köln, 1993, Seite 100.

- Die **SRT** beschreibt physikalische Zusammenhänge in der
  global flachen 4-dimensionalen Raumzeit,
  d. h. in einem **pseudo-Euklidischen Raum**.

  Die (Pseudo-)Metrik der SRT ist indefinit mit dem Linienelement

  $$\mathrm{d}s^2 \;=\; \eta_{ij}\,\mathrm{d}x^i x^j \;=\; -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^{\,2} \;=\; -c^2\mathrm{d}\tau^2\,.$$

  In der SRT ist die kürzeste Weltlinie (Verbindung) zwischen zwei Ereignissen (Weltpunkten) die gerade Weltlinie.

  In der SRT entspricht die gerade Weltlinie dem längsten zeitartigen Intervall.

  In der SRT bewegen sich kräftefreie Körper bzw. Inertialsysteme auf geraden zeitartigen Weltlinien. Gerade zeitartige Weltlinien von *ruhenden* Körpern entsprechen folglich *Punkten* im Ortsraum und gerade zeitartige Weltlinien von *geradlinig gleichförmig bewegten* Körpern entsprechen *Geraden* im Ortsraum.

- Die **ART** beschreibt physikalische Zusammenhänge in der
  global gekrümmten 4-dimensionalen Raumzeit,
  d. h. in einer **pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit**.

  Die (Pseudo-)Metrik der ART ist indefinit mit dem Linienelement

  $$\mathrm{d}s^2 \;=\; g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu x^\nu \;=\; -c^2\mathrm{d}\tau^2\,.$$

  Frei fallende Körper entsprechen in der ART lokalen Inertialsystemen, für die die SRT gilt, d. h. die Geometrie der Raumzeit in der ART ist **lokal pseudo-Euklidisch**.

  In der ART ist die kürzeste Weltlinie (Verbindung) zwischen zwei Ereignissen (Weltpunkten) die geodätische Linie oder kurz **Geodäte**. Weltlinien von Lichtstrahlen sind Nullgeodäten. Die Geodäte in der ART ist das Analogen zur geraden Weltlinie in der SRT. In der Raumzeit der ART entspricht die Geodäte dem längsten zeitartigen Intervall.

  Frei fallende Körper bewegen sich (kräftefrei) auf zeitartigen Geodäten, den am wenigsten gekrümmten („geradesten“) Bahnen in der gekrümmten Raumzeit der ART. Raumzeit-Geodäten sind keine Geodäten im Ortsraum, aber sie entsprechen im Ortsraum dem kürzesten Weg zwischen zwei Punkten.

Zusammenfassend kann man feststellen:
Die Kurve mit dem kürzesten Weg zwischen zwei Punkten im Ortsraum entspricht in der Raumzeit der Weltlinie mit der längsten (Eigen-)Zeit. Das Analogon zu einer Geraden im Ortsraum ist in der Raumzeit die Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit in konstanter Richtung, d. h. die Bewegung eines Inertialsystems längs einer geraden Weltlinie in der SRT bzw. die Bewegung eines lokalen Inertialsystems längs einer Geodäte in der ART.

4.4 Prinzip der maximalen Eigenzeit

Eigenzeit in der SRT:
Einführend vergegenwärtigen wir uns den Eigenzeitbegriff in der SRT. Ein Massenpunkt ruhe in seinem System S' und bewege sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\vec{v}}$ bezüglich eines Systems S. Dann misst eine an dem Massenpunkt fixierte Uhr, d. h. die mitbewegte Uhr, die Eigenzeit τ für den Massenpunkt. Es ist evident, dass die Eigenzeit eine Lorentz-Invariante und somit unabhängig vom Bezugssystem ist. Der Zusammenhang zwischen der **Eigenzeit** τ in S' und der **Koordinatenzeit** t in S ist

$$\mathrm{d}\tau \;=\; \mathrm{d}t' \;=\; \sqrt{1-\frac{\boldsymbol{\vec{v}}^{\,2}}{c^2}}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}\tau < \mathrm{d}t\,. \tag{4.2}$$

Der Massenpunkt bewegt sich entlang seiner Weltlinie (im Raum-Zeit-Diagramm) sowohl bezüglich seines Ruhesystems S' als auch mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\vec{v}}$ bezüglich des Koordinatensystems S. Die in der Raumzeit vom Massenpunkt auf seiner Weltlinie zurückgelegten Abschnitte werden beschrieben durch die Weltlinienelemente $\mathrm{d}s$ bzw. $\mathrm{d}s'$. Auch die Weltlinienelemente sind lorentzinvariant gemäß

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -c^2\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2 \;=\; -c^2\underbrace{\mathrm{d}t'^2}_{=\,\mathrm{d}\tau^2}+\underbrace{\mathrm{d}x'^2+\mathrm{d}y'^2+\mathrm{d}z'^2}_{=\,(\mathrm{d}\boldsymbol{\vec{r}}\,')^2} \;=\; \mathrm{d}s'^2\,.$$

Einschub zur Invarianz des Weltlinienelements bzw. des Intervalls

Gemäß dem Prinzip von der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit c gilt für die Lichtausbreitung in den Inertialsystemen S und S'

$$\frac{(\Delta\boldsymbol{\vec{r}})^2}{\Delta t^2} \;=\; c^2 \;=\; \frac{(\Delta\boldsymbol{\vec{r}}\,')^2}{\Delta t'^2} \quad\Rightarrow$$

$$\textbf{lichtartiges Intervall}\;\; \Delta s^2 \;=\; -c^2\Delta t^2+(\Delta\boldsymbol{\vec{r}})^2 \;=\; -c^2\Delta t'^2+(\Delta\boldsymbol{\vec{r}}\,')^2 \;=\; 0\,.$$

„Streng genommen lässt sich die Anforderung eines invarianten Intervalls Δs^2 unter Transformation zwischen den Koordinaten zweier Inertialsysteme nur im Fall $\Delta s^2 = 0$ aus den einsteinschen Postulaten herleiten. Für $\Delta s^2 \neq 0$ wird die Anforderung *postuliert* – im Nachhinein führt die Bedingung aber zu „guten“ Koordinatentransformationen, wobei sie gerechtfertigt wird.**“**[9]

Schließlich ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Eigenzeit und dem Weltlinienelement aus (4.2) und aus der Tatsache, dass für das Masseteilchen in seinem Ruhesystem S' $\mathrm{d}\boldsymbol{\vec{r}}\,' = \boldsymbol{\vec{0}}$ gilt:

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -c^2\mathrm{d}t'^2 \;=\; -c^2\mathrm{d}\tau^2 \;=\; \mathrm{d}s'^2 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{d}\tau = -\,\frac{\mathrm{d}s^2}{c^2}\,,$$

$$\mathrm{d}\tau \;=\; \sqrt{-\,\frac{\mathrm{d}s^2}{c^2}}\,. \tag{4.3}$$

Da sich Teilchen, die eine Ruhemasse besitzen, nur mit Geschwindigkeiten $|\boldsymbol{\vec{v}}| < c$ bewegen können, sind die Abstände auf ihren Weltlinien zeitartig gemäß $\mathrm{d}s^2 < 0$, sodass der Radikand in (4.3) für diese Teilchen positiv wird.

Im Rahmen der SRT ist auch die Behandlung von beschleunigten Bezugssystemen möglich, wenn man sog. **mitbewegte Koordinatensysteme** einführt. Mitbewegte Koordinatensysteme sind momentane Inertialsysteme. Wenn man es in der SRT nur mit Inertialsystemen (mit $\boldsymbol{\vec{v}} = \text{const}$) zu tun hat, kann man statt der differentiellen Koordinatenangaben wegen der linearen Verhältnisse die Angabe der Koordinatendifferenzen verwenden. Die Eigenzeit in der SRT ist dann

$$\boldsymbol{\vec{v}} = \text{const} \quad\Rightarrow\quad \Delta\tau \;=\; \sqrt{1-\frac{\boldsymbol{\vec{v}}^{\,2}}{c^2}}\,\Delta t \;=\; \frac{1}{\gamma}\,\Delta t\,. \tag{4.4}$$

[9] Zitiert aus dem Vorlesungsskript von Nicolas Borghini, Spezielle Relativitätstheorie, Universität Bielefeld, 2017, Seite 4,
`https://www.physik.uni-bielefeld.de/~borghini/Teaching/Theorie-II/SRT.pdf`

Eigenzeit in der ART:
Mit dem Gravitationspotential $\Phi = \Phi(r) < 0$ und der Koordinatenzeit t_∞ in unendlicher Entfernung vom Gravitationszentrum ist die Eigenzeit für einen in einem schwachen Gravitationsfeld *ruhenden* Körper

$$\mathrm{d}\tau_{\mathrm{grav}} \;\approx\; \sqrt{1-\frac{2\cdot GM}{c^2\,r}}\;\mathrm{d}t_\infty \;=\; \sqrt{1+\frac{2\cdot\Phi(r)}{c^2}}\;\mathrm{d}t_\infty\;, \qquad r\to\infty \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\;. \tag{4.5}$$

Dabei ruht der Körper irgendwo auf einer Sphäre mit dem Großkreisumfang $U = 2\pi r$ und mit dem Gravitationszentrum als Kreismittelpunkt. Der Radius $r = U/(2\pi)$ ergibt sich also aus U und berücksichtigt insofern nicht die gravitative radiale Längenkontraktion bzw. die Raumzeitkrümmung. G ist die Gravitationskonstante und M ist die aktive schwere Masse. Wie man sieht, gilt für das Gravitationspotential

$$\Phi < 0\;, \qquad r\to\infty \;\Rightarrow\; \Phi\to 0\;.$$

Das bedeutet, je näher eine Uhr dem Gravitationszentrum ist, desto langsamer geht sie und desto kleiner ist die verstrichene Eigenzeit im Vergleich zur verstrichenen Koordinatenzeit „außerhalb“ des Gravitationsfeldes bzw. in unendlicher Entfernung vom Gravitationszentrum. Wenn der Körper im Gravitationsfeld nicht ruht sondern sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, erhalten wir unter Berücksichtigung des SRT-Anteils (4.4) die totale Eigenzeit

$$\mathrm{d}\tau_{\mathrm{total}} \;\approx\; \sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}\;\sqrt{1-\frac{2\cdot GM}{c^2\,r}}\;\mathrm{d}t_\infty \;=\; \underbrace{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}}_{\text{SRT-Anteil}}\;\underbrace{\sqrt{1+\frac{2\cdot\Phi(r)}{c^2}}}_{\text{ART-Anteil}}\;\mathrm{d}t_\infty\;,$$

und in weiterer (linearer) Näherung

$$\mathrm{d}\tau \;\approx\; \left(1-\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}-\frac{GM}{c^2\,r}\right)\mathrm{d}t_\infty \;=\; \left(1-\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}+\frac{\Phi}{c^2}\right)\mathrm{d}t_\infty\;.$$

Das **Prinzip der maximalen Eigenzeit** resultiert aus der Tatsache, dass sich Körper in der Raumzeit so bewegen, dass ihre Eigenzeit maximal ist. Mit der Eigenzeit τ und der Koordinatenzeit t gilt dann speziell für die kräftefreie Bewegung[10]:

> Wenn sich ein Teilchen **kräftefrei** in der Raumzeit vom Ereignis E_1 zum Ereignis E_2 bewegt, so gilt für die zugehörige Weltlinie (Bahn)
> $$\frac{\tau(E_2)-\tau(E_1)}{t(E_2)-t(E_1)} \;=\; \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \;\to\; \text{Maximum}\;. \tag{4.6}$$

Weil aber die Koordinatenzeit $\mathrm{d}t$ für die betrachteten Abläufe vorgegeben ist gemäß $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\cdot\sqrt{1-(\dots)}$, kann man die Aussage (4.6) auf

$$\boxed{\mathrm{d}\tau \;\to\; \text{Maximum}}$$

reduzieren. Das Prinzip der maximalen Eigenzeit hängt unmittelbar zusammen mit dem **Hamilton'schen Prinzip der extremalen Wirkung** und gilt sowohl für die SRT als auch für die ART. Auf jedem anderen optionalen Weg als dem Weg mit der maximalen Eigenzeit ist das betrachtete Teilchen nicht kräftefrei, sodass $\mathrm{d}\tau$ *im Verhältnis* zu $\mathrm{d}t$ kleiner wird. Folglich ist dann $\mathrm{d}\tau$ nicht mehr maximal.

[10]Siehe “Epstein erklärt Einstein“ online lesen – Relativity, Abschnitt *H4 Das Prinzip der maximalen Eigenzeit*, Seite 122.

In Analogie zur (geraden) Strecke als kürzestem Abstand zwischen zwei Punkten im euklidischen Raum liegt das kürzeste Intervall zwischen zwei Ereignissen in der pseudoeuklidischen Raumzeit der SRT auf einer geraden Weltlinie und in der gekrümmten Raumzeit der ART auf einer geodätischen Linie bzw. Geodäte.

In der SRT erfolgt die kräftefreie Bewegung von Teilchen auf geraden zeitartigen Weltlinien. In der ART sind Teilchen, die sich kräftefrei bewegen, frei fallende Teilchen. Der freie Fall von Teilchen erfolgt entlang von zeitartigen Geodäten. In dem zur gekrümmten Raumzeit der ART gehörenden 3-dimensionalen Ortsraum liefert die zeitartige Geodäte *keine Gerade* sondern den Verbindungsweg zwischen Ereignissen mit zeitartigem Abstand, für den die verstrichene Eigenzeit ein Maximum ist. Das Prinzip der maximalen Eigenzeit lässt sich auch anders und kurz formulieren:

In SRT und ART entspricht die kürzeste Weltlinie zwischen zwei Ereignissen der maximalen Eigenzeit. In der SRT ist die kürzeste Weltlinie zwischen zwei Ereignissen die gerade Weltlinie und in der ART die Geodäte.

Wir veranschaulichen das Prinzip der maximalen Eigenzeit an zwei Beispielen.

- SRT – Zwillingsparadoxon:[11]

  Die Auflösung des Zwillingsparadoxons beruht auf der Feststellung, dass zwischen dem ruhenden Zwilling Z und dem bewegten Zwilling Z' keine Symmetrie herrscht. Während sich der ruhende Zwilling Z im Inertialsystem S mit der Koordinatenzeit t befindet, wird Z' mit seiner Eigenzeit t' im System S' zumindest bei der Umkehr zwischen Hin- und Rückweg abgebremst und beschleunigt, sodass S' kein Inertialsystem ist. Die Weltlinie zwischen den beiden Ereignissen E_1(Start) und E_2(Rückkehr) ist für Z eine auf der Zeitachse verlaufende Gerade, für Z' aber keine Gerade und folglich länger. Im Vergleich zur Koordinatenzeit t in S gilt für die Eigenzeit t' von Z' infolge der Zeitdilatation in S'
  $$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \tfrac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t' < \Delta t\,.$$
  Soviel zur üblichen Betrachtungsweise. Nun ist aber die verstrichene Koordinatenzeit Δt für Z selbst (für eine Uhr am Aufenthaltsort von Z) die verstrichene Eigenzeit $\Delta\tau = \Delta t$. Und wie man sieht, ist dann $\Delta\tau$ nicht nur größer als $\Delta t'$, sondern auch maximal, weil es keine kürzere Weltlinie als die gerade gibt.

- ART – Freier Fall im Gravitationsfeld:

  Im Gravitationsfeld (kräfte)frei fallende Körper können als lokale Inertialsysteme angesehen werden und bewegen sich auf Geodäten, den kürzesten Weltlinien zwischen Ereignissen in der (gekrümmten) Raumzeit der ART. Alle anderen Körper wie beispielsweise im Gravitationsfeld ruhende Körper sind nicht kräftefrei und bewegen sich folglich auf Weltlinien, die im Vergleich zu Geodäten länger sind. Frei fallende Körper messen deshalb eine maximale Eigenzeit (im Vergleich zu nicht kräftefreien Körpern).

[11] Genau genommen ist das Inertialsystem ein idealisiertes Konstrukt mit eingeschränktem Geltungsbereich, denn die Ruhe eines ruhenden Inertialsystems ist relativ und ein bewegtes Inertialsystem muss irgendwann beschleunigt worden sein. Ähnlich verhält es sich mit unendlich ausgedehnten ebenen Wellen, die aus dem Unendlichen kommen und ins Unendliche gehen.

Abschließend verifizieren wir das Prinzip der maximalen Eigenzeit anhand der Lagrange-Funktion $\mathcal{L} = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$ und mit der Wirkung S sowie dem Prinzip der kleinsten Wirkung

$$S \;=\; \int \mathcal{L}\,\mathrm{d}t \;=\; \int \big(E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}\big)\,\mathrm{d}t \;=\; \int \left(\frac{1}{2}\,mv^2 - E_{\text{pot}}\right)\mathrm{d}t \;\longrightarrow\; \text{Minimum}\,. \tag{4.7}$$

Dazu linearisieren wir zunächst die SRT- und ART-Eigenzeiten (4.2) und (4.5), d. h. wir ersetzen die Wurzelausdrücke durch lineare Näherungen bzw. Taylor-Entwicklungen bis zur 1. Ordnung gemäß

$$(1 \pm x)^n \;\approx\; 1 \pm nx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 \pm x} \;=\; (1 \pm x)^{\frac{1}{2}} \;\approx\; 1 \pm \frac{1}{2}\,x \;:$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau \;&=\; \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t \quad &&\approx\; \mathrm{d}t\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\right) \;&&=\; \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\,\mathrm{d}t\,,\\
\mathrm{d}\tau_{\text{grav}} \;&\approx\; \sqrt{1 + \frac{2\cdot\Phi}{c^2}}\,\mathrm{d}t \quad &&\approx\; \mathrm{d}t\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) \;&&=\; \mathrm{d}t + \frac{\Phi}{c^2}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Die Terme, welche die Abweichung der Eigenzeit $\mathrm{d}\tau$ gegenüber der Koordinatenzeit $\mathrm{d}t$ für ein im Gravitationsfeld *bewegtes* Teilchen beschreiben, sind $-\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\,\mathrm{d}t$ und $\frac{\Phi}{c^2}\,\mathrm{d}t$. Um dem Prinzip der *maximalen* Eigenzeit zu genügen, muss das Integral über diese Abweichungen *maximal* werden:

$$\boxed{\int \left(-\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2} + \frac{\Phi}{c^2}\right)\mathrm{d}t \quad \overset{!}{\longrightarrow} \quad \text{Maximum}}\,. \tag{4.8}$$

Wenn wir jetzt das Integral (4.8) mit $-mc^2$ multiplizieren, erhalten wir mit $E_{\text{pot}} = m\Phi$ das Wirkungsintegral (4.7) wie folgt:

$$-mc^2 \cdot \int \left(-\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2} + \frac{\Phi}{c^2}\right)\mathrm{d}t \;=\; \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\cdot mc^2 - \frac{\Phi}{c^2}\cdot mc^2\right)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{S \;=\; \int \left(\frac{1}{2}\,mv^2 - m\Phi\right)\mathrm{d}t \;\longrightarrow\; \text{Minimum}}\,.\;\square \tag{4.9}$$

Hierbei bewirkt die Vorzeichenumkehr durch den Vorfaktor $-mc^2$, dass aus dem geforderten Maximum (4.8) das vorausgesetzte Minimum (4.7) resultiert. Anders gesagt, weil (4.9) tatsächlich minimal ist, muss (4.8) maximal sein.

4.5 Zeitverlauf im Gravitationsfeld und gravitative Rotverschiebung

Für rotationssymmetrische Körper der Masse M werden wir im Folgenden eine Größe zur Vereinfachung verwenden, den

$$\textbf{Schwarzschild-Radius}\ R_\mathrm{S} \;=\; \frac{2\,GM}{c^2} \;\text{ mit Gravitationskonstante } G\,.$$

Mit dem Äquivalenzprinzips und dem Energieerhaltungssatz leiten wir die Abhängigkeit des Zeitverlaufs vom Gravitationspotential in linearer Näherung für schwache Gravitationsfelder bzw. kleine Geschwindigkeiten her. Dazu synchronisieren wir drei Uhren A, B und C „außerhalb" des Gravitationsfeldes einer Masse M. Dann positionieren wir die Uhr A in kleinerem Abstand r_A und die Uhr B in größerem Abstand r_B vom Gravitationszentrum von M. Die Uhr C befinde sich anfangs in unendlicher Entfernung von M und habe dort die Geschwindigkeit Null. Aus dem Unendlichen kommend passiere die Uhr C dann im freien Fall die Position von B mit der Geschwindigkeit v_B und anschließend die Position von A mit der Geschwindigkeit v_A. Dabei soll die Uhr C die eigenen infinitesimalen Zeitintervalle $\mathrm{d}t_\mathrm{C}$ mit den entsprechenden infinitesimalen Zeitintervallen $\mathrm{d}t_\mathrm{B}$ von B und $\mathrm{d}t_\mathrm{A}$ von A vergleichen (siehe Abbildung 4.1a). Weil die Anfangsgeschwindigkeit von C im Unendlichen gleich Null war, gilt für die Uhr C im Gravitationsfeld mit dem Potential

$$\Phi = \Phi(r) = -\,\frac{GM}{r} \quad\Rightarrow\quad \Phi(r\to\infty)\,\to\,0$$

entsprechend dem Energieerhaltungssatz zu jedem Zeitpunkt

$$\frac{1}{2}\,v^2 + \Phi(r) \;=\; \frac{1}{2}\,v^2 - \frac{GM}{r} \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\,v^2 \;=\; -\,\Phi(r) \;=\; \frac{GM}{r}\,, \qquad \Phi(r) \;=\; -\,\frac{GM}{r}\,. \tag{4.10}$$

Äquivalent[12] dazu nehmen wir an, dass sich die Uhren A, B und C in einem gravitationsfreien Raum befinden und dort in ruhendem Zustand synchronisiert worden sind. Beginnend mit der Anfangsgeschwindigkeit Null sollen dann die Uhren A und B so beschleunigt werden, dass sich zuerst B mit der Geschwindigkeit v_B und danach A mit der Geschwindigkeit v_A an der ruhenden Vergleichsuhr C vorbeibewegen. Der Abstand zwischen A und B sei dabei $r_\mathrm{B} - r_\mathrm{A} = \text{const}$ (siehe Abbildung 4.1b). Während sich die Uhr B und die Uhr A an der Uhr C vorbeibewegen, sollen wieder die infinitesimalen Zeitintervalle $\mathrm{d}t_\mathrm{B}$ von B und $\mathrm{d}t_\mathrm{A}$ von A mit den ihnen entsprechenden infinitesimalen Zeitintervallen $\mathrm{d}t_\mathrm{C}$ von C verglichen werden. Dabei resultiert gemäß der Zeitdilation

[12] Man beachte, dass das Äquivalenzprinzip meistens mit einem homogenen Gravitationsfeld und einem geradlinig gleichförmig beschleunigten Körper veranschaulicht wird. Beides ist hier nicht bzw. nur näherungsweise der Fall, weil das Gravitationspotential von M eine $\frac{1}{r}$-Abhängigkeit besitzt und folglich inhomogen ist.

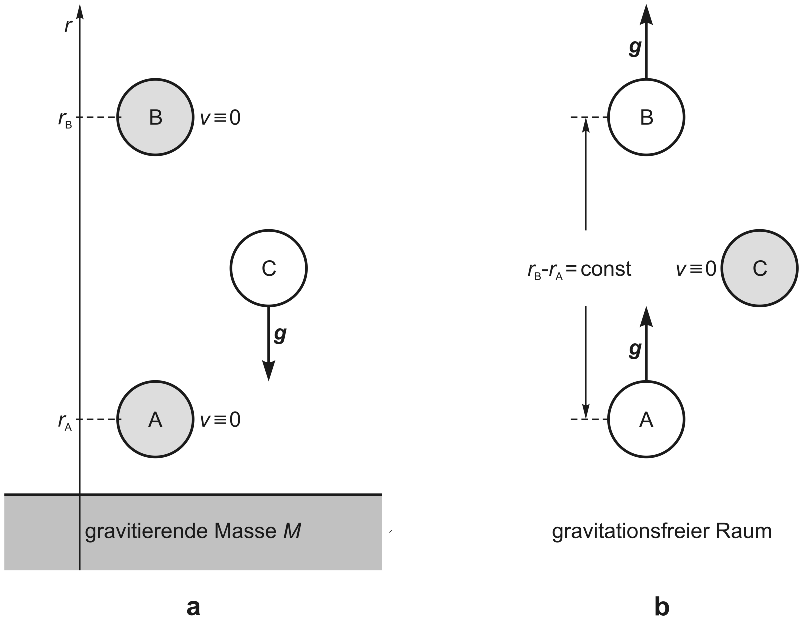

Abb. 4.1 Vergleich des Gangs von Uhren im Gravitationsfeld mit dem Gang von Uhren im beschleunigten System auf Grundlage des Äquivalenzprinzips. A, B, und C werden verkörpert von Uhren, die alle **a**) vor Beginn des freien Falls „außerhalb" des Gravitationsfeldes und **b**) vor Beginn der beschleunigten Bewegung synchronisiert wurden.
a Die Uhren A und B ruhen im Gravitationsfeld. Die Uhr C bewegt sich im freien Fall vorbei an B und A.
b Die Uhr C ruht im gravitationsfreien Raum. Die Uhren B und A bewegen sich geradlinig und gleichförmig beschleunigt vorbei an C.

der SRT und mit (4.10)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t_\mathrm{A} &= \mathrm{d}t_\mathrm{C}\sqrt{1-\frac{v_\mathrm{A}^2}{c^2}} \approx \mathrm{d}t_\mathrm{C}\left(1-\frac{v_\mathrm{A}^2}{2c^2}\right) = \mathrm{d}t_\mathrm{C}\left(1+\frac{\Phi(r_\mathrm{A})}{c^2}\right) = \mathrm{d}t_\mathrm{C}\left(1-\frac{GM}{c^2\,r_A}\right) , \\ \mathrm{d}t_\mathrm{B} &= \mathrm{d}t_\mathrm{C}\sqrt{1-\frac{v_\mathrm{B}^2}{c^2}} \approx \mathrm{d}t_\mathrm{C}\left(1-\frac{v_\mathrm{B}^2}{2c^2}\right) = \mathrm{d}t_\mathrm{C}\left(1+\frac{\Phi(r_\mathrm{B})}{c^2}\right) = \mathrm{d}t_\mathrm{C}\left(1-\frac{GM}{c^2\,r_\mathrm{B}}\right) \end{aligned}$$

mit der linearen Näherung $(1 \pm x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x$ bzw. mit der Taylor-Entwicklung bis zur 1. Ordnung für kleine x bzw. an der Stelle $x = 0$. Wie man sieht, ist

$$r_\mathrm{A} < r_\mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_\mathrm{A} < \Delta t_\mathrm{B} \, .$$

Wir können feststellen:

> Je größer der Absolutbetrag $|\Phi(r)|$ des Gravitationspotentials ist bzw. je kleiner der Abstand zum Gravitationszentrum ist, desto langsamer gehen die Uhren.

Um das Äquivalenzprinzip zu demonstrieren, hatten wir bisher *einerseits* die infinitesimalen Zeitintervalle $\mathrm{d}t_\mathrm{A}$ und $\mathrm{d}t_\mathrm{B}$ eines gravitierenden Systems mit dem infinitesimalen Zeitintervall $\mathrm{d}t_\mathrm{C}$ eines dort frei fallenden lokalen Inertialsystems C und *andererseits* die infinitesimalen Zeitintervalle $\mathrm{d}t_\mathrm{A}$ und $\mathrm{d}t_\mathrm{B}$ eines im gravitationsfreien Raum beschleunigten Systems mit einem ruhenden „globalen“ Inertialsystem C verglichen. Das aus dem Unendlichen kommende frei fallende lokale Inertialsystem C war zu allen Zeiten dasselbe lokale Inertialsystem mit ungestörtem, gleichen Zeitverlauf. Insofern kann man $\mathrm{d}t_\mathrm{C}$ als infinitesimales Zeitintervall in unendlicher Entfernung vom Gravitationszentrum, also für das Gravitationspotential $\Phi \to 0$, betrachten. Für $\mathrm{d}t_\mathrm{C}$ können wir deshalb auch $\mathrm{d}t_\infty$ schreiben.

Jetzt vergleichen wir $\mathrm{d}t_\mathrm{A}$ mit $\mathrm{d}t_\mathrm{B}$, das heißt, wir setzen $\mathrm{d}t_\mathrm{A}$ und $\mathrm{d}t_\mathrm{B}$ zueinander ins Verhältnis, wodurch $\mathrm{d}t_\mathrm{C}$ herausfällt:

$$\frac{\mathrm{d}t_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t_\mathrm{B}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v_\mathrm{A}^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_\mathrm{B}^2}{c^2}}} \overset{(4.10)}{=} \frac{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_\mathrm{A}\cdot c^2}}}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_\mathrm{B}\cdot c^2}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}}}{\sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{B}}}} \tag{4.11}$$

---

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}t_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t_\mathrm{B}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v_\mathrm{A}^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_\mathrm{B}^2}{c^2}}} \approx \left(1-\frac{v_\mathrm{A}^2}{2c^2}\right)\frac{1}{1-\frac{v_\mathrm{B}^2}{2c^2}} \approx \left(1-\frac{v_\mathrm{A}^2}{2c^2}\right)\left(1+\frac{v_\mathrm{B}^2}{2c^2}\right) . \tag{4.12}$$

Im letzten Näherungsschritt haben wir die Taylor-Entwicklung $\frac{1}{1\pm x} = 1 \mp x \ \cdots$ für kleine x bzw. an der Stelle $x = 0$ bis zur 1. Ordnung benutzt. Wir können jetzt die Klammerausdrücke ausmultiplizieren und dann weiter nähern, indem wir alle bezüglich v^2 quadratischen und gemischten Terme vernachlässigen:

$$\frac{\mathrm{d}t_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t_\mathrm{B}} \approx 1 + \frac{v_\mathrm{B}^2}{2c^2} - \frac{v_\mathrm{A}^2}{2c^2} , \quad v_\mathrm{A} > v_\mathrm{B} .$$

Abschließend brauchen wir nur noch nach $\mathrm{d}t_\mathrm{A}$ und $\mathrm{d}t_\mathrm{B}$ aufzulösen:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t_\mathrm{A} &= \mathrm{d}t_\mathrm{B}\left(1+\frac{v_\mathrm{B}^2}{2c^2}-\frac{v_\mathrm{A}^2}{2c^2}\right) , \\ \mathrm{d}t_\mathrm{B} &= \mathrm{d}t_\mathrm{A}\left(1+\frac{v_\mathrm{A}^2}{2c^2}-\frac{v_\mathrm{B}^2}{2c^2}\right) . \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung, also die Auflösung nach $\mathrm{d}t_\mathrm{B}$, erhält man ausgehend von (4.12) ganz einfach durch Vertauschen der Indizes A und B. In einem Gravitationsfeld mit dem Potential $\Phi(r)$ ist dann der Zusammenhang zwischen $\mathrm{d}t_\mathrm{A}$ und $\mathrm{d}t_\mathrm{B}$ mit (4.10) und unter Berücksichtigung von

$$r_\mathrm{A} < r_\mathrm{B} \quad \Rightarrow \quad \Phi(r_\mathrm{A}) < \Phi(r_\mathrm{B}) \text{ bzw. } |\Phi(r_\mathrm{A})| > |\Phi(r_\mathrm{B})| \text{ wegen } \Phi < 0 :$$

$$\mathrm{d}t_\mathrm{A} = \mathrm{d}t_\mathrm{B}\left(1+\frac{\Phi(r_\mathrm{A})}{c^2}-\frac{\Phi(r_\mathrm{B})}{c^2}\right) , \tag{4.13}$$

$$\mathrm{d}t_\mathrm{B} = \mathrm{d}t_\mathrm{A}\left(1-\frac{\Phi(r_\mathrm{A})}{c^2}+\frac{\Phi(r_\mathrm{B})}{c^2}\right) . \tag{4.14}$$

In unendlicher Entfernung vom Gravitationszentrum, also für $r_\mathrm{B} \to \infty$, verschwindet das Gravitationspotential $\varPhi_\mathrm{B}$. Aus (4.11) wird dann

$$\frac{\mathrm{d}t_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t_\infty} = \sqrt{1 - \frac{2\,GM}{r_\mathrm{A} \cdot c^2}} = \sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{s}}{r_\mathrm{A}}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}t_\mathrm{A} &= \mathrm{d}t_\infty \sqrt{1 - \frac{2\,GM}{r_\mathrm{A} \cdot c^2}} = \mathrm{d}t_\infty \sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t_\mathrm{A} < \mathrm{d}t_\infty\ , \qquad (4.15) \\ \mathrm{d}t_\infty &= \mathrm{d}t_\mathrm{A} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\,GM}{r_\mathrm{A} \cdot c^2}}} = \mathrm{d}t_\mathrm{A} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t_\infty > \mathrm{d}t_\mathrm{A}\ . \qquad (4.16) \end{aligned}}$$

Diese Beziehungen werden wir bei der Herleitung der gravitationsbedingten Längenkontraktion benötigen. Aus (4.10) erhalten wir mit $r_\mathrm{B} = r_\mathrm{A} + h$, mit $r_\mathrm{A} \gg h$ und mit der Näherung $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$

$$\begin{aligned} \varPhi(r_\mathrm{B}) - \varPhi(r_\mathrm{A}) &= -\frac{GM}{r_\mathrm{B}} + \frac{GM}{r_\mathrm{A}} = \frac{GM}{r_\mathrm{A}} - \frac{GM}{r_\mathrm{A} + h} = \frac{GM}{r_\mathrm{A}} \left(1 - \frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{A} + h}\right) \\ &= \frac{GM}{r_\mathrm{A}} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{r_\mathrm{A}}}\right) \approx \frac{GM}{r_\mathrm{A}} \left[1 - \left(1 - \frac{h}{r_\mathrm{A}}\right)\right] = \frac{GM}{r_\mathrm{A}} \cdot \frac{h}{r_\mathrm{A}}\ , \end{aligned}$$

$$\varPhi(r_\mathrm{B}) - \varPhi(r_\mathrm{A}) \approx \frac{GM}{r_\mathrm{A}^2} \cdot h = g \cdot h\ .$$

Ist r_A der Erdradius, dann ist g die Erdbeschleunigung in Meeresspiegelhöhe. Und wenn Δt_A ein Zeitintervall in Meeresspiegelhöhe ist, dann ist das entsprechende Zeitintervall in der Höhe h über dem Meeresspiegel gemäß (4.14)

$$\Delta t_\mathrm{B} \approx \Delta t_\mathrm{A} \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)\ .$$

Jetzt haben wir alle erforderlichen Zusammenhänge für eine näherungsweise quantitative Beschreibung der gravitationsbedingten oder kurz gravitativen Rotverschiebung hergeleitet.

Aus der SRT kennen wir den longitudinalen optischen Dopplereffekt für eine Lichtquelle Q und einen Lichtempfänger E:

Q und E nähern sich an: $$f_\mathrm{E} = f_\mathrm{Q} \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} = f_\mathrm{Q} \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ , \qquad (4.17)$$

Q und E entfernen sich voneinander: $$f_\mathrm{E} = f_\mathrm{Q} \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}} = f_\mathrm{Q} \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ . \qquad (4.18)$$

f_Q ist die Quellenfrequenz und f_E ist die Frequenz beim Empfänger. Ein ähnliches Phänomen tritt auf, wenn Quelle und Empfänger zwar in einem Gravitationsfeld ruhen, sich aber an Orten $\mathrm{A}(r_\mathrm{A})$ und $\mathrm{B}(r_\mathrm{B})$ mit verschiedenem Gravitationspotential $\Phi(r_\mathrm{A})$ und $\Phi(r_\mathrm{B})$ befinden. Die Frequenz f ist der Kehrwert der Schwingungsdauer oder Periode T, also

$$f \;=\; \frac{1}{T} \;\propto\; \frac{1}{\Delta t}\,.$$

Ausgehend von (4.11), (4.13) und (4.14) brauchen wir also nur $\mathrm{d}t_\mathrm{A} = T_\mathrm{A}$ und $\mathrm{d}t_\mathrm{B} = T_\mathrm{B}$ zu setzen und anschließend den Kehrwert zu bilden, d. h., wieder die Vorzeichen im Klammerausdruck zu vertauschen. Und wie die infinitesimalen Zeitintervalle bei r_A und r_B verhalten sich auch die Perioden bzw. Frequenzen reziprok zueinander, unabhängig davon, ob es sich um die Quellen- oder die Empfängerfrequenz handelt. Und

Achtung !

Wie die Eigenzeit (einer Uhr), so ist auch die Eigenfrequenz einer Quelle orts- bzw. systemunabhängig. Die Eigenfrequenz ist gleichsam eine Eigenschaft der Quelle.
Befindet sich also die Quelle $\mathrm{Q}(r_\mathrm{B})$ bei $r_\mathrm{B} > r_\mathrm{A}$, so besitzt sie die Periode T_B entsprechend der Frequenz f_B. Und befindet sich die Quelle $\mathrm{Q}(r_\mathrm{A})$ bei $r_\mathrm{A} < r_\mathrm{B}$, so besitzt sie die Periode T_A entsprechend der Frequenz f_A. Die Perioden und Frequenzen bei den Empfängern $\mathrm{E}(r_\mathrm{A})$ bzw. $\mathrm{E}(r_\mathrm{B})$ sind dann

$$\mathrm{Q}(r_\mathrm{B}) \to \mathrm{E}(r_\mathrm{A}):\; T_\mathrm{A} = T_\mathrm{B}\left(1 + \frac{\Phi(r_\mathrm{A})}{c^2} - \frac{\Phi(r_\mathrm{B})}{c^2}\right) \;\Rightarrow\; f_\mathrm{A} = f_\mathrm{B}\left(1 - \frac{\Phi(r_\mathrm{A})}{c^2} + \frac{\Phi(r_\mathrm{B})}{c^2}\right),$$

$$\mathrm{Q}(r_\mathrm{A}) \to \mathrm{E}(r_\mathrm{B}):\; T_\mathrm{B} = T_\mathrm{A}\left(1 - \frac{\Phi(r_\mathrm{A})}{c^2} + \frac{\Phi(r_\mathrm{B})}{c^2}\right) \;\Rightarrow\; f_\mathrm{B} = f_\mathrm{A}\left(1 + \frac{\Phi(r_\mathrm{A})}{c^2} - \frac{\Phi(r_\mathrm{B})}{c^2}\right).$$

Beobachten wir also eine Lichtquelle, die sich im Abstand r_A vom Gravitationszentrum innerhalb eines Gravitationsfeldes befindet, aus dem Unendlichen bzw. aus sehr großer Entfernung $r_\mathrm{B} \to \infty$ entsprechend $\Phi(r_\mathrm{B}) \to 0$, so sehen wir ihr Spektrum zu kleineren Frequenzen hin verschoben, d. h. rotverschoben. Umgekehrt sieht ein Beobachter, der sich innerhalb eines Gravitationsfeldes befindet, jenes Licht zu höheren Frequenzen hin verschoben bzw. blauverschoben, das ihn von „außerhalb“ des Gravitationsfeldes erreicht. Unter Berücksichtigung von $f \propto 1/\mathrm{d}t$ erhalten wir folglich aus (4.16) und (4.15) für

$$\boxed{\mathrm{Q}(r_\mathrm{A}) \to \mathrm{E}(\infty) \quad \widehat{=} \quad \mathrm{E}(r_\mathrm{A}) \leftarrow \mathrm{Q}(\infty)} \;:$$

$$\begin{aligned} f_\mathrm{B} \;&=\; f_\infty \;=\; f_\mathrm{A}\sqrt{1 - \frac{2\,GM}{r_\mathrm{A}\cdot c^2}} \;=\; f_\mathrm{A}\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}} \qquad \Rightarrow \qquad f_\infty < f_\mathrm{A}\,,\\ \Leftrightarrow \qquad f_\mathrm{A} \;&=\; f_\infty\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\,GM}{r_\mathrm{A}\cdot c^2}}} \;=\; f_\infty\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}}} \qquad \Rightarrow \qquad f_\mathrm{A} > f_\infty\,. \end{aligned}$$

In verallgemeinerter Form mit $r_\mathrm{A} = r$ und $f_\mathrm{A} = f(r)$ schreiben wir dafür

$$\boxed{\begin{aligned} f_\infty \;&=\; f(r)\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{r}} \qquad \Rightarrow \qquad f_\infty < f(r)\,,\\ \Leftrightarrow \quad f(r) \;&=\; f_\infty\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{S}}{r}}} \qquad \Rightarrow \qquad f(r) > f_\infty\,. \end{aligned}}$$

4.6 Gravitationsbedingte Längenkontraktion

Die Herleitung der gravitationsbedingten oder kurz gravitativen Längenkontraktion erfolgt ebenfalls auf Grundlage des Äquivalenzprinzips und auf der Grundlage des Modells bzw. Gedankenexperiments in den Abbildungen 4.1a und 4.1b.

Wir betrachten also eine längs zur Feldrichtung bzw. zur Beschleunigungsrichtung ausgerichtete infinitesimale Strecke $\mathrm{d}l_\mathrm{A}$ als das System A und als Analogon zur Uhr A. Wird A geradlinig gleichförmig bezüglich des „globalen“ Inertialsystems C beschleunigt, so misst ein Beobachter in C für die Länge von $\mathrm{d}l_\mathrm{A}$ in Bewegungsrichtung gemäß der SRT

$$\mathrm{d}l_\mathrm{C} \;=\; \mathrm{d}l_\infty \;=\; \mathrm{d}l_\mathrm{A}\sqrt{1-\frac{v_\mathrm{A}^2}{c^2}} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}l_\infty < \mathrm{d}l_\mathrm{A}\ ,$$

wobei v_A die momentane Geschwindigkeit von A ist. Im „globalen“ Inertialsystem C erscheint die bewegte Strecke $\mathrm{d}l_\mathrm{A}$ verkürzt. Dem Äquivalenzprinzip entsprechend, d. h. entsprechend

$$\mathrm{d}l_\mathrm{A}\sqrt{1-\frac{v_\mathrm{A}^2}{c^2}} \;=\; \mathrm{d}l_\mathrm{A}\sqrt{1-\frac{2\,GM}{r_\mathrm{A}\cdot c^2}}$$

misst aber auch der mit der Anfangsgeschwindigkeit Null aus dem Unendlichen kommende und in Feldrichtung frei fallende Beobachter in seinem lokalen Inertialsystem C die gleiche Länge gemäß der

Längenkontraktion längs der Feldrichtung

$$\mathrm{d}l_\mathrm{C} = \mathrm{d}l_\infty = \mathrm{d}l_\mathrm{A}\sqrt{1-\frac{2\,GM}{r_\mathrm{A}\cdot c^2}} = \mathrm{d}l_\mathrm{A}\sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}l_\infty < \mathrm{d}l_\mathrm{A} \tag{4.19}$$

für $\mathrm{d}l_\mathrm{A}$, wenn er sich mit der momentanen Geschwindigkeit v_A an A vorbeibewegt. Aus der Sicht des lokalen Inertialsystems C bewegt sich nämlich A mit der Momentangeschwindigkeit v_A *entgegengesetzt zur Feldrichtung*, also mit der gleichen Geschwindigkeit und in die gleiche Richtung wie das beschleunigte System A bezüglich des ruhenden Systems C im gravitationsfreien Raum.

In Umkehrung dazu erscheint eine im gravitationsfreien Raum, d. h. eine in unendlicher Entfernung vom Gravitationszentrum gelegene infinitesimale Strecke $\mathrm{d}l_\infty$ innerhalb des Gravitationsfeldes verlängert

längs der Feldrichtung

$$\mathrm{d}l_\mathrm{A} \;=\; \mathrm{d}l_\infty\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2\,GM}{r_\mathrm{A}\cdot c^2}}} \;=\; \mathrm{d}l_\infty\frac{1}{\sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}}} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}l_\mathrm{A} > \mathrm{d}l_\infty\ . \tag{4.20}$$

Quer zur Feldrichtung bzw. zur Beschleunigungsrichtung tritt diese Längenkontraktion nicht auf gemäß

quer zur Feldrichtung $\quad \mathrm{d}l_\infty \;=\; \mathrm{d}l_\mathrm{A}$. (4.21)

4.7 Lichtgeschwindigkeit im Gravitationsfeld

Das in der SRT herrschende **Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit** bzw. genau genommen der Vakuumlichtgeschwindigkeit[13] c gilt in der ART bzw. im Gravitationsfeld nur **lokal**. Bezüglich unseres Gedankenexperiments in den Abbildungen 4.1a und 4.1b bedeutet das folgendes:
Bestimmt ein Beobachter im Abstand r_A vom Gravitationszentrum die Lichtgeschwindigkeit mit seinem Maßstab und mit seiner Zeit, so findet er die

$$\textbf{lokale Lichtgeschwindigkeit} \quad \frac{\mathrm{d}l_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t_\mathrm{A}} \;=\; c \;=\; \text{const} \,. \tag{4.22}$$

Konstant heißt also in diesem Fall *lokal konstant* und bedeutet, dass unabhängig vom Ort und damit auch unabhängig vom Abstand $r_\mathrm{A} = r$ vom Gravitationszentrum jeder Beobachter an seinem Ort, mit seinem Maßstab und mit seiner Zeit die gleiche Lichtgeschwindigkeit c misst. In Übereinstimmung mit der SRT gilt das folglich auch für einen Beobachter, der sich nicht unter dem Einfluss von Gravitation in unendlichem Abstand $r \to \infty$ vom Gravitationszentrum befindet.

Wir können uns also ausgehend vom Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit der SRT

$$c \;=\; \frac{\mathrm{d}l_\infty}{\mathrm{d}t_\infty} \;=\; \text{const}$$

überlegen, wie sich die Lichtgeschwindigkeit $\tilde{c}$ innerhalb eines Gravitationsfeldes und abhängig von r aus der Sicht eines in unendlicher Entfernung vom Gravitationszentrum positionierten Beobachters verhält. Dazu verwenden wir die Beziehungen, die dieser Sichtweise entsprechen, also (4.19), d. h. die infinitesimale Wegstrecke gemäß der Längenkontraktion im Gravitationsfeld längs ($\|$) der Feldrichtung, (4.21), d. h. die infinitesimale Wegstrecke quer ($\perp$) zur Feldrichtung, und (4.16), d. h. das infinitesimale Zeitintervall gemäß der Zeitdilatation im Gravitationsfeld:

$$\tilde{c}_\| \overset{(4.19)}{=} \frac{\mathrm{d}l_\mathrm{A}\sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}}}{\mathrm{d}t_\mathrm{A}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}}}} \overset{(4.22)}{=} \underbrace{\frac{\mathrm{d}l_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t_\mathrm{A}}}_{=c} \cdot \left[\sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}}\right]^2 \overset{(r_\mathrm{A}=r)}{=} c\left[\sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r}}\right]^2 \;=\; \tilde{c}_\|(r) \;,$$

$$\boxed{\textbf{längs der Feldrichtung}: \;\; \tilde{c}_\|(r) \;=\; c\left(1-\frac{R_\mathrm{S}}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}_\|(r) < c}$$

bzw.

$$\tilde{c}_\perp \overset{(4.21)}{=} \frac{\mathrm{d}l_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t_\mathrm{A}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}}}} \overset{(4.22)}{=} \underbrace{\frac{\mathrm{d}l_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t_\mathrm{A}}}_{=c} \cdot \sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{A}}} \overset{(r_\mathrm{A}=r)}{=} c\sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r}} \;=\; \tilde{c}_\perp(r) \;,$$

$$\boxed{\textbf{quer zur Feldrichtung}: \;\; \tilde{c}_\perp(r) \;=\; c\sqrt{1-\frac{R_\mathrm{S}}{r}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}_\perp(r) < c} \;.$$

[13] Für Vakuumlichtgeschwindigkeit schreiben wir kurz Lichtgeschwindigkeit.

Die kleinere Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts im Gravitationsfeld gemäß $\tilde{c} < c$ bedeutet, dass ein Gravitationsfeld im Vergleich zum gravitationsfreien Raum einem optisch dichteren Medium entspricht. Licht, welches das Gravitationsfeld eines Sterns passiert, wird deshalb wie bei einer Sammellinse abgelenkt – beim Eintritt in das Feld zum Einfallslot hin und beim Austritt aus dem Feld vom Ausfallslot weg, wobei Ein- und Ausfallslot längs der (radialen) Feldlinien verlaufen. Man spricht deshalb in diesem Zusammenhang auch von Gravitationslinsen.

4.8 Eine Anmerkung zu Gravitationswellen

Gravitationswellen oder Schwerkraftwellen sind transversale Raumzeit-Quadrupol-Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten und dabei Energie transportieren. Sie entstehen bei

Beschleunigungsänderungen

von Massen und besitzen zwei Polarisationen, die um 45° gegeneinander geneigt sind. Sie sind allesdurchdringend, d. h., es gibt keine Möglichkeit der Abschirmung gegen Gravitationswellen.

Zitat aus: Domenico Giuline und Claus Kiefer, Essentials – Gravitationswellen – Einblicke in Theorie, Vorhersage und Entdeckung, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017, Seite 20:

> **„** Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir noch einem weit verbreiteten Missverständnis begegnen, gemäß dem irrigerweise geschlossen wird, Gravitationswellen könne man gar nicht nachweisen. Diesem Argument liegt die fehlerhafte Annahme zugrunde, dass die durch die Gravitationswelle verursachten Änderungen der Abstandsverhältnisse *universell* sind, dass also insbesondere auch die zur Abstandsmessung verwendeten Systeme, etwas ein gewöhnlicher Maßstab oder auch die Wellenlänge des Lichts, stets im gleichen Verhältnis verkürzt oder verlängert würden wie die zu messende Länge.[14] Mit dieser (fehlerhaften) Annahme wird dann weiter (formal richtig) geschlossen, dass keine physikalisch messbare Abstandsänderung eintritt, weil physikalische Abstandsmessungen ja immer auf dem Verhältnis zweier Längen beruhen, der zu messenden und der des Maßstabs. Ein universeller Dehnungs- oder Stauchungsfaktor fällt aber klarerweise bei der Verhältnisbildung heraus – soweit das Argument. Nun ist aber die Ausgangshypothese dieses Schlusses falsch. Um welchen Betrag sich ein Körper unter dem Einfluss einer Gravitationswelle tatsächlich deformiert, hängt davon ab, welche spezifischen elastischen Kräfte der Körper dieser Deformation entgegensetzt. Die Beziehung $\frac{\Delta L}{L} = \frac{h}{2}$ gilt nur für den Fall,[15] dass die Massen in der betrachteten Richtung *kräftefrei* gelagert sind, so wie nach Voraussetzung die in Abb. .... Letztere sind zumindest senkrecht zur Richtung der Aufhängung kräftefrei und können insbesondere in Richtung ihrer Verbindungsgeraden frei schwingen, was die für das Funktionieren als Gravitationswellendetektor relevante Eigenschaft ist.**“**

[14]**„**Ein analoges Missverständnis in bezug auf die Kosmologie wäre zu glauben, die Expansion des Universums beträfe gleichermaßen alle darin enthaltenen Körper. Das ist aber nicht der Fall. Nur die schwach gebundenen Strukturen oberhalb der Größe von Galaxienclustern werden von der kosmologischen Expansion mitgenommen, während Galaxien, Sonnensysteme, Planeten, Menschen, Amöben und Atome nicht expandieren. Insofern darf der oft gehörte Ausspruch, dass es „der Raum selbst“ sei, der expandiere, nicht dahin gehend missverstanden werden, dass jedes Objekt mit räumlicher Ausdehnung notwendig diese Expansion ungebremst mitmacht; mehr dazu findet man in Giulini (2014).**“**

[15]L ist der ursprüngliche Abstand der Massen vor Eintreffen der Gravitationswelle. h ist die Amplitude der Gravitationswelle.