Reinhard Weiß

Koordinatentransformation

– metrischer Tensor –

SRT im Tensorkalkül

02.03.2023

Inhaltsverzeichnis

1 Transformation zwischen im Ursprung gegeneinander gedrehten kartesischen Koordinatensystemen

1.1 Vorbemerkungen

Zur Schreibweise und zum Sprachgebrauch:

Einen Vektor $\vec{\boldsymbol{v}}$ im 3-dimensionalen Vektorraum bzw. im $\mathbb{R}^3$ schreiben wir entweder als **Spaltenvektor** (einspaltige Matrix)

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

oder in **Komponentendarstellung**

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \sum_{i=1}^{3} v_i \, \vec{\boldsymbol{g}}_i$$

mit

$\{\vec{\boldsymbol{g}}_1, \vec{\boldsymbol{g}}_2, \vec{\boldsymbol{g}}_3\}$	**Vektorbasis** aus den Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}_i$,
$v_i \, \vec{\boldsymbol{g}}_i$	**Vektorkomponenten** (Komponenten des Vektors $\vec{\boldsymbol{v}}$) ,
v_i	**skalare Vektorkomponenten** (skalare Komponenten des Vektors $\vec{\boldsymbol{v}}$) .

Nur bei Vektordarstellungen in Koordinatensystemen, bei denen alle Koordinatenachsen geradlinig sind, und wenn zusätzlich alle Basisvektoren Einheitsvektoren sind, kann man die Begriffe skalare Vektorkomponente und **Vektorkoordinate** synonym gebrauchen. In geradlinigen Koordinatensystemen sind die Vektorbasen nämlich global, sodass sich der Startpunkt jedes Vektors dann in den Koordinatenursprung legen lässt. Sind die Basisvektoren dann auch noch Einheitsvektoren, so sind die Koordinaten der Vektorenden gleich den skalaren Vektorkomponenten und können als Vektorkoordinaten bezeichnet werden.

Es gibt im Wesentlichen vier verschiedene Arten von Koordinatensystemen:

- das orthogonal-geradlinige (kartesische) Koordinatensystem,
- orthogonal-krummlinige Koordinatensysteme
  (z. B. Polar- und Kugelkoordinaten),
- schiefwinklig-geradlinige Koordinatensysteme und
- schiefwinklig-krummlinige Koordinatensysteme.

Geradlinige Koordinatensysteme werden auch affine Koordinatensysteme genannt. Der Begriff „affin“ entstammt dem lateinischen Wort „affinis“ und bedeutet u. a. angrenzend.

Allgemein unterliegt der Umgang mit Vektoren in Koordinatensystemen einem **dualen Prinzip**, d. h. es gibt die **kontravariante** und die **kovariante Darstellung** sowohl der skalaren Vektorkomponenten als auch der zugehörigen Basisvektoren. Und das **Normquadrat**[1] eines Vektors (sein Längenquadrat bzw. das Quadrat des Abstands zwischen zwei Punkten im Raum) ist *allgemein* gegeben durch das **Skalarprodukt** der kontravarianten mit den kovarianten skalaren Vektorkomponenten dieses Vektors. Für die Komponentendarstellung von Vektoren gilt: zu kontravarianten skalaren Vektorkomponenten gehören kovariante Basisvektoren, zu kovarianten skalaren Vektorkomponenten gehören kontravariante Basisvektoren.

Die ko- und kontravarianten skalaren Vektorkomponenten und Basisvektoren verändern sich bei einem Koordinatenwechsel in der Weise, dass die Norm von Vektoren sowie ihre Richtung und ihre Orientierung im Raum unabhängig vom Koordinatensystem erhalten bleiben.

Die **Invarianz der Vektornorm unter Koordinatentransformation** hängt unmittelbar damit zusammen, dass die Transformation der kovarianten Basis invers zur Transformation der kontravarianten Basis ist und dass die Transformation der skalaren Vektorkomponenten invers ist zur Transformation der zugehörigen Vektorbasis. Dieses Prinzip fordert aber auch, dass z. B. bei einer Normierung vorgenommene Längenänderungen von Basisvektoren durch reziproke „Längenänderungen“ der zugehörigen skalaren Vektorkomponenten kompensiert werden.

Auf die Diskussion der ko- und kontravarianten Darstellung von Basisvektoren und skalaren Vektorkomponenten wollen wir hier aber noch nicht näher eingehen. Wir werden uns nämlich in diesem Kapitel ausschließlich mit kontravarianten skalaren Vektorkomponenten und mit kovarianten Basisvektoren beschäftigen.
Die Koordinaten eines Koordinatensystems und kontravariante skalaren Vektorkomponenten transformieren sich kontravariant. Die zu den kontravarianten skalaren Vektorkomponenten gehörenden kovarianten Vektorbasen transformieren sich kovariant. Transformationen z. B. von einem ungestrichenen zu einem gestrichenen Koordinatensystem werden nach folgendem Prinzip durchgeführt:

$$\boxed{\textbf{kontravariant} \quad a'_j = \frac{\partial x'_j}{\partial \boldsymbol{x_i}}\, \boldsymbol{a_i}\,, \qquad \textbf{kovariant} \quad a'_j = \frac{\partial \boldsymbol{x_i}}{\partial x'_j}\, \boldsymbol{a_i}}\,. \tag{1.1}$$

Achtung!
Kartesische Koordinatensysteme sind ein **Sonderfall**.
In ihnen spielt das duale Prinzip keine Rolle, weil ko- und kontravariante Darstellungen und Transformationen dort identisch sind.

Für die Beherrschung der Mathematik nichtkartesischer Koordinatensysteme wurde eigens der Tensorkalkül entwickelt. Dieser zeichnet sich u. a. dadurch aus, dass kontravariante Indizes hochgestellt und kovariante Indizes tiefgestellt werden. Hochgestellte Indizes bezeichnet man auch kurz als obere und tiefgestellte als untere Indizes. In Tensorschreibweise hat (1.1) die Form

$$\text{kontravariant} \quad a^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\, a^i\,, \qquad \text{kovariant} \quad a_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\, a_i\,. \tag{1.2}$$

[1]Die **Norm** eines Vektors im anschaulichen (bis 3-dimensionalen) Euklidischen Raum bezeichnen wir der Schulmathematik folgend als **Betrag** dieses Vektors.

Sowohl in (1.1) als auch in (1.2) haben wir die **Einstein'sche Summenkonvention** verwendet, d. h., wenn in einem Produktterm ein Index doppelt – bei Anwendung der Tensoralgebra ein Mal hochgestellt und ein Mal tiefgestellt – auftritt, wird über diesen Index summiert. Derartige Indizes heißen Summationsindizes. Es ist dabei zu berücksichtigen, dass obere Indizes im Nenner als tiefgestellt betrachtet werden. Wir werden im Folgenden aber ohne den Tensorkalkül auskommen.

1.2 Transformation der Koordinaten

Alle Koordinatenlinien eines **kartesischen Koordinatensystems** sind **geradlinig** und die Koordinatenachsen verlaufen **orthogonal** zueinander. Kartesische Koordinatensysteme besitzen folglich ortsunabhängige, d. h. **globale Vektorbasen**.[2] In diesem Kapitel werden wir uns nur mit kartesischen Koordinatensystemen befassen.

Veranschaulichen wir uns den in diesem Zusammenhang gebrauchten Begriff der **Transformation** (Umformung) an einem einfachen Beispiel (siehe Abbildung 1.1) :

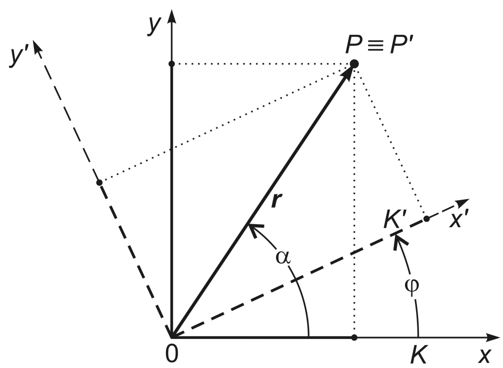


Abb. 1.1 Die dargestellten zweidimensionalen kartesischen Koordinatensysteme seien K' (gestrichelt) und K. K' sei gegenüber K um den Winkel φ entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung gedreht. Für jeden beliebigen Punkt P gilt dann

$$\vec{\boldsymbol{r}} := (x,\, y) =: P \equiv P' := (x',\, y') = (x\,\cos\varphi + y\,\sin\varphi,\; -x\,\sin\varphi + y\,\cos\varphi) =: \vec{\boldsymbol{r}}'\;,$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{r}} \equiv \vec{\boldsymbol{r}}' \quad \text{aber} \quad (x,\, y) \neq (x',\, y')\;.$$

Jeder Punkt P und damit auch der jeweils zugehörige Ortsvektor $\vec{\boldsymbol{r}}$ im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem K wird definiert durch seine Koordinaten x und y. Es gilt also $P := (x,\, y) =: \vec{\boldsymbol{r}}$. Drehen wir das Koordinatensystem K um seinen Ursprung entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn (im mathematisch positiven Drehsinn) um den Winkel φ, so erhalten wir das kartesische Koordinatensystem K'. Ein Punkt $P := (x,\, y) =: \vec{\boldsymbol{r}}$ hat in K' die Koordinaten x' und y'. Für den betrachteten Punkt gilt also $P \equiv P' := (x',\, y') =: \vec{\boldsymbol{r}}'$. Wenngleich der Punkt derselbe geblieben ist, so

[2] Während geradlinige Koordinatensysteme globale Basen besitzen, haben krummlinige Koordinatensysteme, wie z. B. das Polar- und das Kugelkoordinatensystem, **lokale Vektorbasen**. Lokale Basen verändern sich von Raumpunkt zu Raumpunkt, sind also im Gegensatz zu globalen Basen ortsabhängig.

kann er doch zahlenwertig unterschiedliche Koordinaten besitzen. In der Abbildung 1.1 z. B. besitzt er in K einen kleinen x- und einen großen y-Koordinatenwert, in K' umgekehrt einen großen x'- und einen kleinen y'-Koordinatenwert.
Wenn wir die Umrechnungsformeln bzw. Transformationsgleichungen für die Koordinaten von K nach K' kennen, können wir die P'-Koordinaten x' und y' aus den P-Koordinaten x und y berechnen. Die (linearen) **Transformationsgleichungen für die Koordinaten**[3] bei Drehung eines zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystems um seinen Ursprung um den Winkel φ im mathematisch positiven Drehsinn sind

$$x' = x \cos\varphi + y \sin\varphi\,, \tag{1.3}$$

$$y' = -x \sin\varphi + y \cos\varphi\,. \tag{1.4}$$

Dies kann man sich mit einigen Grundkenntnissen in der Vektorrechnung leicht klar machen: Man zerlegt zunächst sowohl die x- als auch die y-Komponente des Ortsvektors $\vec{\boldsymbol{r}} =: P$ jeweils in ihre Komponenten auf der x'- und auf der y'-Achse. Addiert man dann die x'-Komponente von x, d. h. $x\cos\varphi$, und die x'-Komponente von y, d. h. $y\sin\varphi$, so erhält man die x'-Komponente von P. Die Addition der y'-Komponente von x und der y'-Komponente von y, d. h. die Addition von $-x\cdot\sin\varphi$ und $y\cdot\cos\varphi$, liefert schließlich die y'-Komponente von $P \equiv P'$.

So erhalten wir jede P'-Koordinate durch die entsprechende Transformationsgleichung jeweils aus allen P-Koordinaten. Gleichzeitig haben wir damit aber auch den Ortsvektor $\vec{\boldsymbol{r}}$ von K nach K' transformiert. Wenn wir die entsprechenden Transformationsgleichungen (1.3) und (1.4) als Matrixgleichung schreiben, erhält die Transformation des Orts(spalten)vektors $\vec{\boldsymbol{r}}$ in den Orts(spalten)vektor $\vec{\boldsymbol{r}}'$ die übersichtliche Gestalt

$$\vec{\boldsymbol{r}}' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ -x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,. \tag{1.5}$$

Wie man sieht, werden bei der Matrixmultiplikation die Zeilenelemente der linken Matrix A mit den Spaltenelementen der folgenden rechten Matrix $\binom{x}{y} =: \vec{\boldsymbol{r}}$ der Reihe nach multipliziert und die dabei entstehenden Produkte anschließend addiert. Ein Spaltenvektor ist nämlich eine einspaltige Matrix und die Matrixmultiplikation erfolgt nach dem Falk'schen Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\,.$$

Auf den Formalismus der Matrizenrechnung wollen wir aber in diesem Zusammenhang nicht weiter eingehen.[4] Die Transformationsmatrix A ist in diesem Fall eine sog. Drehmatrix[5], weil sie die Transformation zwischen gegeneinander gedrehten Koordinatensystemen vermittelt.

[3] Eine Herleitung der Transformationsgleichungen für die Koordinaten bei Drehung eines zweidimensionalen Koordinatensystems findet man z. B. im Springer-Lehrbuch *Mathematik für Physiker 2* von Weltner 2008.

[4] Eine anschauliche Darstellung der Matrizenrechnung findet man z. B. in Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2, 10. Aufl., Vieweg-Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 2001, Seite 1 bis Seite 19.

[5] Für Drehmatrizen (Rotationsmatrizen) wird manchmal such das Symbol D verwendet.

Auf der Grundlage von Abbildung 1.1 zeigen wir die Herleitung der Transformationgleichungen (1.3) und (1.4) „zu Fuß“ mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \varphi) &= \cos\alpha\cos\varphi \mp \sin\alpha\sin\varphi\ , \\ \sin(\alpha \pm \varphi) &= \sin\alpha\cos\varphi \pm \cos\alpha\sin\varphi\end{aligned}$$

sowie mit $\qquad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha\,, \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

und gehen aus von

$$\begin{aligned} r\cdot\cos\alpha = x \;\Leftrightarrow\; \cos\alpha = \frac{x}{r}\ , &\qquad r\cdot\sin\alpha = y \;\Leftrightarrow\; \sin\alpha = \frac{y}{r}\ , \\ x' = r\cdot\cos(\alpha-\varphi)\ , &\qquad y' = r\cdot\cos\big[(90^\circ-\alpha)+\varphi\big]\ . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Jetzt wenden wir die Additionstheoreme auf (1.6) an:

$$\begin{aligned} x' &= r\cdot(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) = r\cdot\left(\frac{x}{r}\cos\varphi + \frac{y}{r}\sin\varphi\right) \\ &= x\,\cos\varphi + y\,\sin\varphi\ , \\[1ex] y' &= r\cdot\big[\cos(90^\circ-\alpha)\cos\varphi - \sin(90^\circ-\alpha)\sin\varphi\big] \\ &= r\cdot(\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi) = r\cdot\left(\frac{y}{r}\cos\varphi - \frac{x}{r}\sin\varphi\right) \\ &= -x\,\sin\varphi + y\,\cos\varphi\ . \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

1.3 Transformation der skalaren Vektorkomponenten

Transformationsgleichungen zwischen **kartesischen Koordinatensystemen** sind linear wie beispielsweise (1.3) und (1.4). Wir dürfen in diesem Fall die Koordinaten x und y des Ortsvektors $\vec{\boldsymbol{r}} =: P$ durch die skalaren Vektorkomponenten $\Delta x = a_x$ und $\Delta y = a_y$ eines beliebigen Vektors $\vec{\boldsymbol{a}}$ ersetzen. So erhalten wir die allgemeine Formel für die
Transformation der skalaren Vektorkomponenten a_i vom ungestrichenen Koordinatensystem K in das gestrichene Koordinatensystem K':

$$\vec{\boldsymbol{a}}\,' := \begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} , \tag{1.7}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} , \tag{1.8}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}\,' := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi \\ -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi \end{pmatrix} . \tag{1.9}$$

Es stellt sich jetzt die Frage, ob wir die Elemente der Transformationsmatrix A direkt berechnen können. Dafür betrachten wir (1.3) und (1.4) als Funktionen

$$\begin{aligned} x' &= x'(x,y) = x \cos\varphi + y \sin\varphi , \\ y' &= y'(x,y) = -x \sin\varphi + y \cos\varphi . \end{aligned}$$

Der Drehwinkel φ zwischen den Koordinatensystemen und folglich auch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ sind Konstanten. Wenn wir jetzt beispielsweise x um Δx verändern und dabei y konstant halten gemäß $y = const \;\Rightarrow\; \Delta y = 0$, resultieren im gestrichenen Koordinatensystem die folgenden Veränderungen sowohl von x' also auch von y':

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \Delta x \cdot \cos\varphi + \underbrace{\Delta y}_{=0} \cdot \sin\varphi = \Delta x \cdot \cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \cos\varphi , \\ \Delta y' &= -\Delta x \cdot \sin\varphi + \underbrace{\Delta y}_{=0} \cdot \cos\varphi = -\Delta x \cdot \sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta y'}{\Delta x} = -\sin\varphi . \end{aligned}$$

Diese Differenzenquotienten liefern die Elemente der ersten Spalte von A. Allgemein können wir dafür die Differentialquotienten schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\,(x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi) = \cos\varphi , \\ \frac{\partial y'(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(-x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi) = -\sin\varphi . \end{aligned}$$

Die Elemente der zweiten Spalte von A sind folglich

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\,(x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi) = \sin\varphi , \\ \frac{\partial y'(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(-x \cdot \sin\varphi + y \cdot \cos\varphi) = \cos\varphi . \end{aligned}$$

Die Differenzenquotienten sind hier gleich den Differentialquotienten, weil die Transformationsgleichungen im Fall kartesischer Koordinaten linear sind.
Die Transformationsmatrix für die Transformation der Koordinaten des Vektors $\vec{\boldsymbol{a}}$ in K nach den Koordinaten des Vektors $\vec{\boldsymbol{a}}'$ in K' ist

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial x'(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial y'(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial y'(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

und vermittelt, wie wir bei einem Vergleich mit den oben gezeigten Transformationsprinzipien (1.1) sehen, die **kontravariante Transformation**

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial x'(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial y'(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial y'(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \ .$$

Um die Rücktransformation von den Vektorkoordinaten in K' nach den Vektorkoordinaten in K zu zeigen, leiten wir zunächst die Rücktransformationsgleichungen her aus dem Gleichungssystem (1.3) und (1.4) mit zwei Unbekannten:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & x' = & x\,\cos\varphi + y\,\sin\varphi\,, \\ \text{(II)} & y' = & -\,x\,\sin\varphi + y\,\cos\varphi\,. \end{array}$$

Durch Äquivalenzumformung erhalten wir aus (II)

$$y = \frac{y' + x\,\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

und setzen dies in (I) ein:

$$\begin{aligned} x' &= x\,\cos\varphi + \frac{y' + x\,\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\sin\varphi = x\,\cos\varphi + y'\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + x\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \\ &= y'\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + x\left(\cos\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\right) = y'\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + x\,\frac{\cos^2 + \sin^2\varphi}{\cos\varphi} \\ x' &= y'\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + x\,\frac{1}{\cos\varphi} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \cos\varphi\left(x' - y'\,\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\ , \end{aligned}$$

$$\boxed{x = x'\,\cos\varphi - y'\,\sin\varphi}\ . \tag{1.10}$$

Schließlich setzen wir (1.10) in (I) ein und erhalten

$$\begin{aligned} x' &= (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\,\cos\varphi + y\,\sin\varphi \\ &= x'\cos^2\varphi - y'\sin\varphi\cos\varphi + y\,\sin\varphi \\ \Leftrightarrow \quad y &= \frac{1}{\sin\varphi}\left(x' - x'\cos^2\varphi + y'\sin\varphi\cos\varphi\right) \\ &= \frac{1}{\sin\varphi}\left[x'\underbrace{\left(1-\cos^2\varphi\right)}_{=\sin^2\varphi} + y'\sin\varphi\cos\varphi\right]\ , \end{aligned}$$

$$\boxed{y = x'\,\sin\varphi + y'\,\cos\varphi}\ . \tag{1.11}$$

Wir betrachten die Rücktransformationsgleichungen (1.10) und (1.11) als Funktionen, jetzt von x' und y', und leiten aus diesen, in gleicher Weise wie für die Hintransformation, die Elemente der zu A inversen Rücktransformationsmatrix A^{-1} ab.
1. Spalte von A^{-1}:

$$\frac{\partial x(x',y')}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}\big(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\big) = \cos\varphi \,, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial y(x',y')}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}\big(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\big) = \sin\varphi \,. \tag{1.13}$$

2. Spalte von A^{-1}:

$$\frac{\partial x(x',y')}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\big(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\big) = -\sin\varphi \,, \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial y(x',y')}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\big(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\big) = \cos\varphi \,. \tag{1.15}$$

Damit erhält die (kontravariante) Rücktransformation die Gestalt

$$\vec{\boldsymbol{a}} := \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} \,,$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(x',y')}{\partial x'} & \frac{\partial x(x',y')}{\partial y'} \\ \frac{\partial y(x',y')}{\partial x'} & \frac{\partial y(x',y')}{\partial y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A^{\mathrm{T}} \,,$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_x\,\cos\varphi - a'_y\,\sin\varphi \\ a'_x\,\sin\varphi + a'_y\,\cos\varphi \end{pmatrix} \,.$$

Drehmatrizen sind orthogonale Matrizen und orthogonale Matrizen A besitzen die Eigenschaften $\det A = +1$ und $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, d. h. die Inverse ist gleich der Transponierten.[6]

[6]Man überprüfe hier, dass die Multiplikation einer Matrix mit ihrer Inversen die Einheitsmatrix ergibt gemäß $A \cdot A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathbb{1}$.

1.4 Transformation der Standardbasis

Wir zeigen jetzt, wie sich in unserem Beispiel die Standardbasis $\{\vec{\boldsymbol{e}}_x, \vec{\boldsymbol{e}}_y\}$ des **kartesischen Koordinatensystems** K in die Standardbasis $\{\vec{\boldsymbol{e}}'_x, \vec{\boldsymbol{e}}'_y\}$ des um den Winkel φ gedrehten kartesischen Koordinatensystems K' **kovariant** transformiert. Dafür verwenden wir die bereits berechneten partiellen Differentialquotienten (1.12) bis (1.15):

$$\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}'_x \\ \\ \vec{\boldsymbol{e}}'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(x',y')}{\partial x'} & \frac{\partial y(x',y')}{\partial x'} \\ \frac{\partial x(x',y')}{\partial y'} & \frac{\partial y(x',y')}{\partial y'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x + \sin\varphi \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y \\ \\ -\sin\varphi \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x + \cos\varphi \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y \end{pmatrix} .$$

Hierbei liefern

$$\frac{\partial x(x',y')}{\partial x'} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial y(x',y')}{\partial x'} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y = \vec{\boldsymbol{e}}'_x \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x(x',y')}{\partial x'} \\ \frac{\partial y(x',y')}{\partial x'} \end{pmatrix} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}(x',y')}{\partial x'} ,$$

$$\frac{\partial x(x',y')}{\partial y'} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial y(x',y')}{\partial y'} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y = \vec{\boldsymbol{e}}'_y \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x(x',y')}{\partial y'} \\ \frac{\partial y(x',y')}{\partial y'} \end{pmatrix} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}(x',y')}{\partial y'}$$

die **Tangentenvektoren** $\vec{\boldsymbol{e}}'_x$ und $\vec{\boldsymbol{e}}'_y$ an die entsprechenden Koordinatenlinien x' und y' von K' und $\vec{\boldsymbol{r}}(x',y')$ ist der Ortsvektor in K, ausgedrückt in den Koordinaten von K'. Das zu verstehen ist wichtig, denn damit wird klar, warum sich Basisvektoren kovariant und folglich allgemein anders transformieren als die skalaren Vektorkomponenten. Während die Transformation der skalaren Vektorkomponenten z. B. eines Vektors $\vec{\boldsymbol{a}}$ gemäß $\vec{\boldsymbol{a}} \equiv \vec{\boldsymbol{a}}'$ schließlich **denselben Vektor** liefert[7], besitzt jedes Koordinatensystem seine eigenen Basisvektoren, d. h., die Transformation der Basisvektoren liefert am Ende **andere Basisvektoren**.

Besonderheiten bei Transformationen von einem kartesischen in ein anderes kartesisches Koordinatensystem:

- Kartesische Basisvektoren werden mit der gleichen Transformationsmatrix transformiert wie die zugehörigen kartesischen Vektorkoordinaten, weil sich ko- und kontravariante Darstellung in diesem speziellen Fall gleichen. Es gilt verkürzt ausgedrückt:

  kartesisches Koordinatensystem $\Rightarrow$ **kovariant = kontravariant** .
- Basis-Einheitsvektoren des einen kartesischen Koordinatensystems transformieren sich in Basis-Einheitsvektoren des anderen kartesischen Koordinatensystems, d. h., ihre Länge 1 ist in diesem speziellen Fall invariant. Das ist bei nichtkartesischen Koordinatensystemen allgemein nicht der Fall, wie wir im Kapitel 2 noch sehen werden.

[7] Wir dürfen hier das Identitätszeichen $\equiv$ verwenden, weil $\vec{\boldsymbol{a}}$ und $\vec{\boldsymbol{a}}'$ ein und denselben, vom verwendeten Koordinatensystem unabhängigen Vektor bezeichnen.

1.5 Vektor-Transformation in Komponentendarstellung

Die kontravariante Transformation der skalaren Vektorkomponenten des Vektors $\vec{\boldsymbol{a}}$ zusammen mit der kovarianten Transformation der zugehörigen Basisvektoren ermöglichen uns die Komponentendarstellung der Transformation des Vektors $\vec{\boldsymbol{a}}$ in den Vektor $\vec{\boldsymbol{a}}\,'$:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}}\,' &= \vec{\boldsymbol{a}}\,'_x + \vec{\boldsymbol{a}}\,'_y = a'_x \vec{\boldsymbol{e}}\,'_x + a'_y \vec{\boldsymbol{e}}\,'_y = \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}\,'_x \\ \vec{\boldsymbol{e}}\,'_y \end{pmatrix} \\
&= \left[A \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \right]^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \underbrace{A^{\mathrm{T}} \cdot A}_{=A^{-1}\cdot A = \mathbb{1}} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \end{pmatrix} = a_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + a_y \vec{\boldsymbol{e}}_y = \vec{\boldsymbol{a}}_x + \vec{\boldsymbol{a}}_y = \vec{\boldsymbol{a}} \ .
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Rechenregel für die Transponierte eines Produkts aus zwei Matrizen verwendet, nämlich $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$. Das gleiche Ergebnis können wir aber auch zeigen, indem wir für die Transformationen die partiellen Koordinaten-Differentialquotienten ausführlich hinschreiben:

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}}\,'_x &= a'_x \cdot \vec{\boldsymbol{e}}\,'_x = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\, a_x + \frac{\partial x'}{\partial y}\, a_y \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\, \vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial y}{\partial x'}\, \vec{\boldsymbol{e}}_y \right) \\
&= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}\, a_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}\, a_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x'}\, a_x \vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial x'}\, a_y \vec{\boldsymbol{e}}_x \\
&= \cos^2\!\varphi\ a_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + \sin^2\!\varphi\ a_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + \cos\varphi \sin\varphi\ a_x \vec{\boldsymbol{e}}_y + \sin\varphi \cos\varphi\ a_y \vec{\boldsymbol{e}}_x \ , \\
\vec{\boldsymbol{a}}\,'_y &= a'_y \cdot \vec{\boldsymbol{e}}\,'_y = \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\, a_x + \frac{\partial y'}{\partial y}\, a_y \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y'}\, \vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial y}{\partial y'}\, \vec{\boldsymbol{e}}_y \right) \\
&= \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'}\, a_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}\, a_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y'}\, a_x \vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial y'}\, a_y \vec{\boldsymbol{e}}_x \\
&= \sin^2\!\varphi\ a_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + \cos^2\!\varphi\ a_y \vec{\boldsymbol{e}}_y - \sin\varphi \cos\varphi\ a_x \vec{\boldsymbol{e}}_y - \cos\varphi \sin\varphi\ a_y \vec{\boldsymbol{e}}_x \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}}\,' = \vec{\boldsymbol{a}}\,'_x + \vec{\boldsymbol{a}}\,'_y &= \cos^2\!\varphi\ a_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + \sin^2\!\varphi\ a_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + \sin^2\!\varphi\ a_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + \cos^2\!\varphi\ a_y \vec{\boldsymbol{e}}_y \\
&= \underbrace{\left(\cos^2\!\varphi + \sin^2\!\varphi \right)}_{=1}\ a_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + \underbrace{\left(\sin^2\!\varphi + \cos^2\!\varphi \right)}_{=1}\ a_y \vec{\boldsymbol{e}}_y \\
&= a_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + a_y \vec{\boldsymbol{e}}_y = \vec{\boldsymbol{a}}_x + \vec{\boldsymbol{a}}_y = \vec{\boldsymbol{a}} \ . \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

2 Kugelkoordinaten

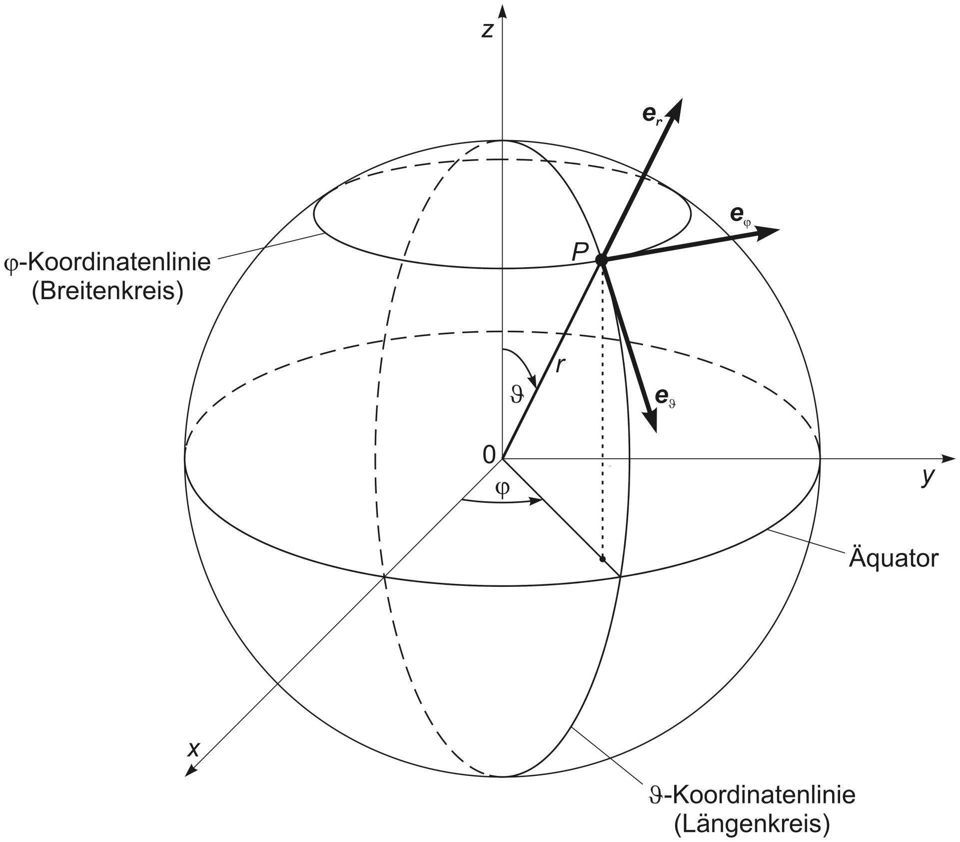


Abb. 2.1 Kugelkoordinatensystems. Der **Polarwinkel** ϑ läuft längs der Meridiane (meridional) von $0°$ bis $180°$, der **Azimutalwinkel** oder kurz Azimutwinkel φ läuft längs der Breitenkreise (azimutal) von $0°$ bis $360°$. Exemplarisch ist die (lokale) Orthonormalbasis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ für den Punkt P dargestellt. Dieser Punkt P wird durch den Ortsvektor $\vec{r}$ mit der Länge $|\vec{r}| = r$ definiert. Die Basis-Einheitsvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$, $\vec{e}_\varphi$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Dies merkt sich leicht, wenn man $\vec{e}_r$ durch den Daumen, $\vec{e}_\vartheta$ durch den Zeigefinger und $\vec{e}_\varphi$ durch den Mittelfinger der rechten Hand veranschaulicht.

Wir betrachten das Kugelkoordinatensystem S in Beziehung zum kartesischen Koordinatensystem K. Wo es zur besseren Unterscheidung erforderlich ist, verwenden wir für Größen in S statt des Strichindex' den hochgestellten Index s und für Größen in K den hochgestellten Index k. Die Kugelkoordinaten, das sind die **radiale Koordinate** r und die **Winkelkoordinaten** ϑ und φ, heißen auch räumliche Polarkoordinaten. Sie erleichtern die Lösung kugelsymmetrischer mathematisch-physikalischer Probleme. Das Kugelkoordinatensystem ist orthogonal[1] und teilweise krummlinig (s. Abb. 2.1):

r-Koordinatenlinien – gerade (radiale, nach außen gerichtete Strahlen),
ϑ-Koordinatenlinien – sphärisch gekrümmt, Breitenkoordinaten (Längenkreise),
φ-Koordinatenlinien – sphärisch gekrümmt, Längenkoordinaten (Breitenkreise).

[1]Kugelkoordinaten sind ein Beispiel für den speziellen Fall orthogonaler Koordinatensyteme. Die mathematischen Aussagen in diesem Kapitel beziehen sich deshalb nur auf orthogonale Koordinatensysteme und sind **nicht allgemeingültig**.

Die Basis-Einheitsvektoren $\vec{\boldsymbol{e}}_r$, $\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta$, $\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi$ sind Tangenten-Einheitsvektoren an die zugehörigen Koordinatenlinien und bilden mit Ausnahme des Koordinatenursprungs in jedem Raumpunkt ein orthogonales rechtshändiges Dreibein. Die Vektorbasis $\{\vec{\boldsymbol{e}}_r, \vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta, \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi\}$ ist eine lokale Basis, weil sie sich von Ort zu Ort ändert – nur entlang der r-Linien verändert sie sich nicht.

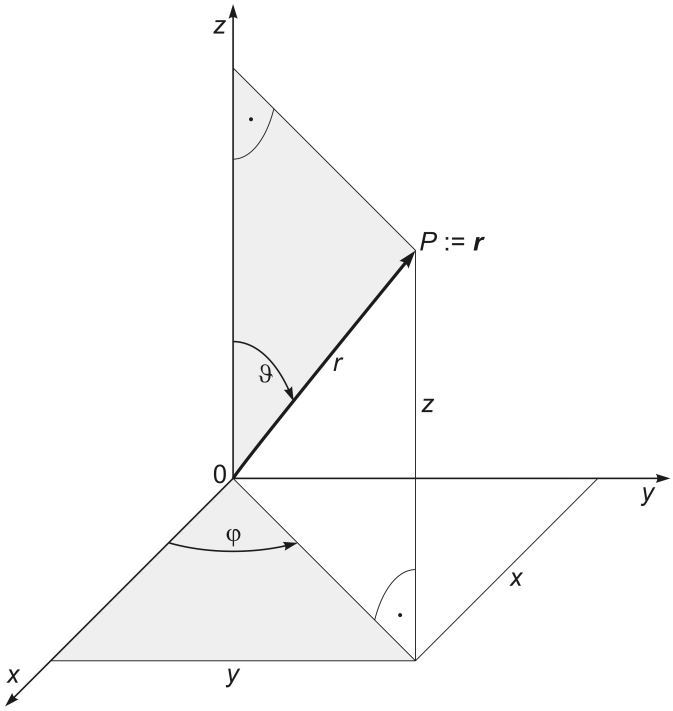


Abb. 2.2 Herleitung der **Transformationsgleichungen** von den kartesischen zu den Kugelkoordinaten:
$r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,, \qquad \vartheta(x,y,z) = \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\,, \qquad \varphi(x,y,z) = \arctan \frac{y}{x}\;.$

Im Gegensatz zu den Koordinaten-Transformationsgleichungen zwischen geradlinigen Koordinatensystemen (siehe Kapitel 1) sind die Koordinaten-Transformationsgleichungen zwischen kartesischem Koordinatensystem und Kugelkoordinatensystem **nichtlinear**. Die Matrixgleichungen für die Transformation von Basisvektoren und skalaren Vektorkomponenten sind jedoch **lineare Abbildungen**. Dies wird klar, wenn man sich die Bildung der Transformationsmatrizen und deren „Zusammenspiel“ mit den Basisvektoren oder den skalaren Vektorkomponenten anschaut.

Wie man sich auf der Grundlage von Abbildung 2.2 und unter Verwendung der Winkelfunktionen überlegen kann, sind die **Rücktransformationsgleichungen** von den Kugelkoordinaten zu den kartesischen Koordinaten in Analogie zu (1.10) und (1.11)

$$\begin{aligned} x &= x(r,\vartheta,\varphi) &= r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi\,, \\ y &= y(r,\vartheta,\varphi) &= r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi\,, \\ z &= z(r,\vartheta,\varphi) &= r\cdot\cos\vartheta\,. \end{aligned}$$

Daraus resultiert die **Rücktransformationsmatrix** für die **kontravariante** Transformation der skalaren Vektorkomponenten von S nach K:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial x(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial y(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial z(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \tag{2.1}$$

$S \to K$ für **unnormierte Komponenten** in S

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\,\cos\vartheta\cos\varphi & -r\,\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\,\cos\vartheta\sin\varphi & r\,\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\,\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.2}$$

Invertieren[2] der Matrix A^{-1} liefert die **Transformationsmatrix** $(A^{-1})^{-1} = A$ für die **kontravariante** Transformation der skalaren Vektorkomponenten von K nach S:

$K \to S$ für **unnormierte Komponenten** in S

$$A = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \frac{1}{r}\,\cos\vartheta\cos\varphi & \frac{1}{r}\,\cos\vartheta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\,\sin\vartheta \\ -\frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\sin\varphi & \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.3}$$

Jetzt folgt die **kovariante** Transformation der kartesischen Basis-Einheitsvektoren $\vec{\boldsymbol{e}}_x$, $\vec{\boldsymbol{e}}_y$, $\vec{\boldsymbol{e}}_z$ in die (kovarianten) Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}_r$, $\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta$, $\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi$, also die Transformation der Basisvektoren von K nach S, mit den in (2.1) berechneten Differentialquotienten:

$$\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{g}}_r \\ \vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta \\ \vec{\boldsymbol{g}}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial y(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} & \frac{\partial z(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} \\ \frac{\partial x(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial y(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial z(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \\ \vec{\boldsymbol{e}}_z \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{g}}_r \\ \vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta \\ \vec{\boldsymbol{g}}_\varphi \end{pmatrix} = A^{-1\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \\ \vec{\boldsymbol{e}}_z \end{pmatrix} ,$$

$K \to S$ für **unnormierte Basis** in S

$$A^{-1\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ r\,\cos\vartheta\cos\varphi & r\,\cos\vartheta\sin\varphi & -r\,\sin\vartheta \\ -r\,\sin\vartheta\sin\varphi & r\,\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.4}$$

[2] Es gibt verschiedene Verfahren, um eine Matrix A zu invertieren, z. B. den Gauß-Jordan-Algorithmus oder das Verfahren unter Verwendung der zu A adjungierten Matrix A_{adj} gemäß $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{\mathrm{adj}}$.

Man kann die Länge bzw. den Betrag der Basisvektoren leicht nachrechnen und stellt fest, dass $|\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta|$ und $|\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi|$ nicht gleich 1 sind:

$$\begin{aligned}
|\vec{\boldsymbol{g}}_r| &= \sqrt{(\sin\vartheta\cos\varphi)^2 + (\sin\vartheta\sin\varphi)^2 + (\cos\vartheta)^2} = 1 \;, \\
|\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta| &= \sqrt{(r\,\cos\vartheta\cos\varphi)^2 + (r\,\cos\vartheta\sin\varphi)^2 + (-r\,\sin\vartheta)^2} = r \;, \\
|\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi| &= \sqrt{(-r\,\sin\vartheta\sin\varphi)^2 + (r\,\sin\vartheta\cos\varphi)^2} = r\cdot\sin\vartheta \;.
\end{aligned}$$

Damit bilden wir jetzt die Basis-Einheitsvektoren $\vec{\boldsymbol{e}}_r$, $\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta$, $\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi$ für K^s :

$$\begin{array}{lllllll}
|\vec{\boldsymbol{g}}_r| = 1 & \qquad & \vec{\boldsymbol{g}}_r = \vec{\boldsymbol{e}}_r & \qquad & \vec{\boldsymbol{e}}_r = \vec{\boldsymbol{g}}_r \\
|\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta| = r & & \vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta = r\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta & & \vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta = \dfrac{1}{r}\,\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta \\
|\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi| = r\,\sin\vartheta & & \vec{\boldsymbol{g}}_\varphi = r\,\sin\vartheta\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi & & \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi = \dfrac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi \;.
\end{array} \tag{2.5}$$

Dieses Ergebnis berücksichtigen wir in (2.4) und erhalten schließlich die **kovariante** Transformation der kartesischen Basis-Einheitsvektoren $\vec{\boldsymbol{e}}_x$, $\vec{\boldsymbol{e}}_y$, $\vec{\boldsymbol{e}}_z$ in die (kovarianten) Basis-Einheitsvektoren $\vec{\boldsymbol{e}}_r$, $\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta$, $\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_r \\ \vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta \\ \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{g}}_r \\ \frac{1}{r}\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta \\ \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi \end{pmatrix} = \widetilde{A}\cdot\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \\ \vec{\boldsymbol{e}}_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \frac{1}{r}\cdot r\,\cos\vartheta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cdot r\,\cos\vartheta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\cdot r\,\sin\vartheta \\ -\frac{1}{r\,\sin\vartheta}\cdot r\,\sin\vartheta\sin\varphi & \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\cdot r\,\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \\ \vec{\boldsymbol{e}}_z \end{pmatrix} \;,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} K \to S \qquad \text{für } \textbf{normierte Basis} \text{ in } S \\[1ex] \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \end{array}} \;. \tag{2.7}$$

Im Folgenden werden wir die zu den **normierten** Basisvektoren gehörenden skalaren Vektorkomponenten mit einer **Tilde** kennzeichnen.

A in (2.3) ist die Matrix für die kontravariante Transformation der skalaren Komponenten eines Vektors $\vec{\boldsymbol{a}}$ von K nach S bezüglich der unnormierten kovarianten Kugelkoordinaten-Vektorbasis $\{\vec{\boldsymbol{g}}_r, \vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta, \vec{\boldsymbol{g}}_\varphi\}$, sodass in Matrixschreibweise die Transformation

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\vartheta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \frac{1}{r}\,\cos\vartheta\cos\varphi & \frac{1}{r}\,\cos\vartheta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\,\sin\vartheta \\ -\frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\sin\varphi & \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

und in Komponentendarstellung die Transformation

$$\begin{aligned}
a_r \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_r &= (\sin\vartheta\cos\varphi\cdot a_x + \sin\vartheta\sin\varphi\cdot a_y + \cos\vartheta\cdot a_z)\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_r \\
\underbrace{a_r \cdot 1}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r &= (\sin\vartheta\cos\varphi\cdot a_x + \sin\vartheta\sin\varphi\cdot a_y + \cos\vartheta\cdot a_z)\cdot 1\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{a}_r\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi\cdot a_x + \sin\vartheta\sin\varphi\cdot a_y + \cos\vartheta\cdot a_z)\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_r \;, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
a_\vartheta\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta &= \left(\frac{1}{r}\,\cos\vartheta\cos\varphi\cdot a_x + \frac{1}{r}\,\cos\vartheta\sin\varphi\cdot a_y - \frac{1}{r}\,\sin\vartheta\cdot a_z\right)\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta \\
\underbrace{a_\vartheta\cdot r}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta &= \left(\frac{1}{r}\,\cos\vartheta\cos\varphi\cdot a_x + \frac{1}{r}\,\cos\vartheta\sin\varphi\cdot a_y - \frac{1}{r}\,\sin\vartheta\cdot a_z\right)\cdot r\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{a}_\vartheta\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta = \Big(\cos\vartheta\cos\varphi\cdot a_x + \cos\vartheta\sin\varphi\cdot a_y - \sin\vartheta\cdot a_z\Big)\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta \;, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
a_\varphi\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi &= \left(-\frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\sin\varphi\cdot a_x + \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\cos\varphi\cdot a_y + 0\cdot a_z\right)\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi \\
\underbrace{a_\varphi\cdot r\,\sin\vartheta}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi &= \left(-\frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\sin\varphi\cdot a_x + \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\cos\varphi\cdot a_y + 0\cdot a_z\right)\cdot r\,\sin\vartheta\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{a}_\varphi\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi = \Big(-\sin\varphi\cdot a_x + \cos\varphi\cdot a_y + 0\cdot a_z\Big)\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \;. \tag{2.10}$$

resultiert. Aus den Gleichungen (2.8) bis (2.10) können wir die kontravariante Transformation der skalaren Komponenten eines Vektors $\vec{\boldsymbol{a}}$ von K nach S bezüglich der kovarianten Basis-Einheitsvektoren $\vec{\boldsymbol{e}}_r$, $\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta$, $\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi$ ablesen:

$$\begin{pmatrix}\tilde{a}_r\\ \tilde{a}_\vartheta\\ \tilde{a}_\varphi\end{pmatrix} = \widetilde{A}\cdot\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\\ \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix} \;, \tag{2.11}$$

$K \to S$ für **normierte Komponenten** in S

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\\ \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{pmatrix} \;. \tag{2.12}$$

Wir stellen fest, dass sich die skalaren Vektorkomponenten von K nach S in (2.11) genauso transformieren wie die Basisvektoren von K nach S in (2.6), wenn wir für das Kugelkoordinatensystem S die auf Einheitsvektoren normierte Vektorbasis $\{\vec{\boldsymbol{e}}_r,\, \vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta,\, \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi\}$ verwenden. Genau das wird mit der Normierung beabsichtigt.

Was ist hier bei der Normierung der Vektorbasis $\left\{\vec{\boldsymbol{g}}_r, \vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta, \vec{\boldsymbol{g}}_\varphi\right\}$ geschehen?

Weil eine Vektorkomponente $a_i\,\vec{\boldsymbol{g}}_i$ das a_i-fache der Länge ihres zugehörigen Basisvektors $\vec{\boldsymbol{g}}_i$ besitzt, müssen sich der „Faktor“ a_i und die Länge des zugehörigen Basisvektors bei einer Längenänderung von $\vec{\boldsymbol{g}}_i$ reziprok zueinander verhalten. Verkürzen wir z. B. einen Basisvektor um den Faktor $\frac{1}{m}$ $(m > 1)$, so müssen wir die zugehörige skalare Vektorkomponente mit dem zu $\frac{1}{m}$ reziproken Faktor m multiplizieren, also vergrößern.

Wenn wir nach erfolgter Transformation eines Vektors $\vec{\boldsymbol{a}}$ von K nach S durch Normierung der Vektorbasis $\left\{\vec{\boldsymbol{g}}_r, \vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta, \vec{\boldsymbol{g}}_\varphi\right\}$ dafür sorgen, dass $\vec{\boldsymbol{a}}$ im Kugelkoordinatensystem in der Einheits-Vektorbasis $\left\{\vec{\boldsymbol{e}}_r, \vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta, \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi\right\}$ dargestellt wird, dann sehen wir, dass sich am Ende die Basisvektoren mit der gleichen Transformationsmatrix wie die zugehörigen skalaren Vektorkomponenten von K nach S transformieren.

Wir zeigen dies unter Verwendung der **Einstein'schen Summenkonvention**, wobei über die gesternten Indizes i nicht summiert wird und die Indizes r, ϑ, φ und s selbstverständlich keine Laufindizes ist:

Transformation der Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{e}}_j^{\,k}$ von K nach S und
Normierung der Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}_i^{\,s}$:

$$A_{ij}^{-1\mathrm{T}}\,\vec{\boldsymbol{e}}_j^{\,k} \;=\; \vec{\boldsymbol{g}}_i^{\,s} \;=\; \left|\vec{\boldsymbol{g}}_{i*}^{\,s}\right|\vec{\boldsymbol{e}}_i^{\,s} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{e}}_i^{\,s} \;=\; \dfrac{1}{\left|\vec{\boldsymbol{g}}_{i*}^{\,s}\right|}\,\vec{\boldsymbol{g}}_i^{\,s}\;, \\[2ex] \vec{\boldsymbol{e}}_i^{\,s} \;=\; \underbrace{\dfrac{1}{\left|\vec{\boldsymbol{g}}_{i*}^{\,s}\right|}\,A_{ij}^{-1\mathrm{T}}}\,\vec{\boldsymbol{e}}_j^{\,k} \;=\; \widetilde{A}_{ij}\,\vec{\boldsymbol{e}}_j^{\,k}\;. \end{cases}$$

Transformation der skalaren Vektorkomponenten a_j^k von K nach S und
Normierung der skalaren Vektorkomponenten a_i^s :

$$A_{ij}\,a_j^k \;=\; a_i^s \;=\; \frac{1}{\left|\vec{\boldsymbol{g}}_{i*}^{\,s}\right|}\,\tilde{a}_i^s \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \tilde{a}_i^s \;=\; \left|\vec{\boldsymbol{g}}_{i*}^{\,s}\right| a_i^s\;, \\[2ex] \tilde{a}_i^s \;=\; \underbrace{\left|\vec{\boldsymbol{g}}_{i*}^{\,s}\right| A_{ij}}\,a_j^k \;=\; \widetilde{A}_{ij}\,a_j^k\;. \end{cases}$$

Für das Kugelkoordinatensystem lässt sich der Zusammenhang zwischen den kontravarianten skalaren Komponenten eines Vektors $\vec{\boldsymbol{a}}$ und den zugehörigen kovarianten Basisvektoren bei der Normierung zusammenfassend wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_r \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_r &= a_r \cdot 1 \cdot 1 \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_r &&= a_r \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_r\;, \\ \tilde{a}_\vartheta \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta &= a_\vartheta\, r \cdot \frac{1}{r}\,\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta &&= a_\vartheta \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta\;, \\ \tilde{a}_\varphi \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi &= a_\varphi\, r\sin\vartheta \cdot \frac{1}{r\sin\vartheta}\,\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi &&= a_\varphi \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_\varphi \end{aligned}$$

bzw.

$$\vec{\boldsymbol{a}} \;=\; \tilde{a}_i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_i \;=\; a_i\,\left|\vec{\boldsymbol{g}}_{i*}\right| \cdot \frac{1}{\left|\vec{\boldsymbol{g}}_{i*}\right|}\,\vec{\boldsymbol{g}}_i \;=\; a_i \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_i\;.$$

Beispiel

Wir veranschaulichen uns die Transformation vom kartesischen Koordinatensystem K in das Kugelkoordinatensystem S im Raumpunkt

$$P := \vec{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} .$$

Die Kugelkoordinaten dieses Punktes sind

$$P := \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 22,63° \\ 53,13° \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \cos\vartheta &= \frac{12}{13} \approx 0,923 & \qquad \cos\varphi &= \frac{3}{5} = 0,6 \\ \sin\vartheta &= \frac{5}{13} \approx 0,385 & \qquad \sin\varphi &= \frac{4}{5} = 0,8 \,. \end{aligned}$$

Mit diesen Kugelkoordinaten können wir die Transformationsmatrizen für den Punkt P berechnen:

- $\{\vec{\boldsymbol{e}}_x,\, \vec{\boldsymbol{e}}_x,\, \vec{\boldsymbol{e}}_x\} \xrightarrow{\widetilde{A}} \{\vec{\boldsymbol{e}}_r,\, \vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta,\, \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi\}$, $\qquad a_i(K) \xrightarrow{\widetilde{A}} \tilde{a}_j(S)$

  Matrix $\widetilde{A}$ für die Transformation der (kartesischen) Standardbasis und der kartesischen skalaren Vektorkomponenten in die **normierte** Kugelkoordinatenbasis und die zugehörigen skalaren Vektorkomponenten gemäß (2.6) und (2.11)

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{36}{65} & \frac{48}{65} & -\frac{25}{65} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} ,$$

- $\{\vec{\boldsymbol{e}}_x,\, \vec{\boldsymbol{e}}_x,\, \vec{\boldsymbol{e}}_x\} \xrightarrow{A^{-1\mathrm{T}}} \{\vec{\boldsymbol{g}}_r,\, \vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta,\, \vec{\boldsymbol{g}}_\varphi\}$

  Matrix $A^{-1\mathrm{T}}$ für die Transformation der Standardbasis in die **unnormierte** Kugelkoordinatenbasis gemäß (2.4)

$$A^{-1\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ r\,\cos\vartheta\cos\varphi & r\,\cos\vartheta\sin\varphi & -r\,\sin\vartheta \\ -r\,\sin\vartheta\sin\varphi & r\,\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{36}{5} & \frac{48}{5} & -\frac{25}{5} \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} ,$$

- $a_j(K) \xrightarrow{A} a_i(S)$

  Matrix A für die Transformation der kartesischen skalaren Vektorkomponenten in die **unnormierten** skalaren Vektorkomponenten im Kugelskoordinatensystem gemäß (2.3)

$$A = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ \frac{1}{r}\,\cos\vartheta\cos\varphi & \frac{1}{r}\,\cos\vartheta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\,\sin\vartheta \\ -\frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\sin\varphi & \frac{1}{r\,\sin\vartheta}\,\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{36}{845} & \frac{48}{845} & -\frac{25}{845} \\ -\frac{4}{25} & \frac{3}{25} & 0 \end{pmatrix} .$$

Heften wir den Vektor $\vec{\boldsymbol{r}}$ mit der Länge $r = 13$ an den Punkt $P := \vec{\boldsymbol{r}}$, verläuft dieser exakt in Verlängerung des Kugelkoordinaten-Basisvektors $\vec{\boldsymbol{e}}_r = \vec{\boldsymbol{g}}_r$ des Punktes P. Der angeheftete Vektor $\vec{\boldsymbol{r}}$ besitzt folglich in der (lokalen) Kugelkoordinatenbasis des Punktes P keine Winkelkomponenten sondern nur eine radiale Komponente, wie man sehr leicht nachrechnen kann:

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\vartheta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_r \\ \tilde{a}_\vartheta \\ \tilde{a}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Jetzt heften wir einen Vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$, der nicht die Richtung von $\vec{\boldsymbol{r}}$ und damit nicht die Richtung des Basisvektors $\vec{\boldsymbol{e}}_r = \vec{\boldsymbol{g}}_r$ im Punkt P hat, an diesen Punkt P und untersuchen die Transformationen seiner skalaren Komponenten von K nach S: Es sei z. B.

$$\vec{\boldsymbol{a}} = 3\,\vec{\boldsymbol{e}}_x + 2\,\vec{\boldsymbol{e}}_y + 1\,\vec{\boldsymbol{e}}_z := \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2 = 14 .$$

Transformation von a_x, a_y, a_z nach $\tilde{a}_r$, $\tilde{a}_\vartheta$, $\tilde{a}_\varphi$ (in der normierten Basis):

$$\widetilde{A} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} =: \tilde{a}_r\,\vec{\boldsymbol{e}}_r + \tilde{a}_\vartheta\,\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta + \tilde{a}_\varphi\,\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi = \frac{29}{13}\,\vec{\boldsymbol{e}}_r + \frac{179}{65}\,\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta - \frac{6}{5}\,\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi . \tag{2.13}$$

Transformation der kartesischen Basisvektoren in die normierten Kugelkoordinaten-Basisvektoren:

$$\widetilde{A} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \\ \vec{\boldsymbol{e}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13}\,\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{4}{13}\,\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{12}{13}\,\vec{\boldsymbol{e}}_z \\ \frac{36}{65}\,\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{48}{65}\,\vec{\boldsymbol{e}}_y - \frac{25}{65}\,\vec{\boldsymbol{e}}_z \\ -\frac{4}{5}\,\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{3}{5}\,\vec{\boldsymbol{e}}_y + 0\,\vec{\boldsymbol{e}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_r \\ \vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta \\ \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \end{pmatrix} .$$

Transformation der kartesischen Basisvektoren in die unnormierten Kugelkoordinaten-Basisvektoren:

$$A^{-1\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \\ \vec{\boldsymbol{e}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13}\,\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{4}{13}\,\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{12}{13}\,\vec{\boldsymbol{e}}_z \\ \frac{36}{5}\,\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{48}{5}\,\vec{\boldsymbol{e}}_y - \frac{25}{5}\,\vec{\boldsymbol{e}}_z \\ -4\,\vec{\boldsymbol{e}}_x + 3\,\vec{\boldsymbol{e}}_y + 0\,\vec{\boldsymbol{e}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{g}}_r \\ \vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta \\ \vec{\boldsymbol{g}}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_r \\ 13 \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta \\ 5 \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \end{pmatrix} .$$

Wie man sieht und schnell nachrechnen kann, sind die Beträge der unnormierten Basisvektoren

$$\left|\vec{\boldsymbol{g}}_r\right| = 1 , \qquad \left|\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta\right| = 13 , \qquad \left|\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi\right| = 5 .$$

Transformation von a_x, a_y, a_z nach a_r, a_ϑ, a_φ (in der unnormierten Basis):

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} =: a_r\,\vec{\boldsymbol{g}}_r + a_\vartheta\,\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta + a_\varphi\,\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi = \frac{29}{13}\,\vec{\boldsymbol{g}}_r + \frac{179}{845}\,\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta - \frac{6}{25}\,\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi . \tag{2.14}$$

Wenn wir die unnormierten Basisvektoren in (2.14) durch die normierten ersetzen und das Ergebnis mit (2.13) vergleichen, stellen wir fest, dass sich der Vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$ durch diesen Basiswechsel nicht ändert:

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}}\big(\vec{\boldsymbol{g}}_r, \vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta, \vec{\boldsymbol{g}}_\varphi\big) &= \frac{29}{13}\,\vec{\boldsymbol{g}}_r + \frac{179}{845}\,\vec{\boldsymbol{g}}_\vartheta - \frac{6}{25}\,\vec{\boldsymbol{g}}_\varphi \quad \xrightarrow{\text{unnormiert}} \quad \begin{pmatrix} a_r \\ a_\vartheta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{13} \\ \frac{179}{845} \\ -\frac{6}{25} \end{pmatrix} \\
&= \frac{29}{13}\,\vec{\boldsymbol{e}}_r + \frac{179}{845}\cdot 13\,\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta - \frac{6}{25}\cdot 5\,\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi\ , \\
\vec{\boldsymbol{a}}\big(\vec{\boldsymbol{e}}_r, \vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta, \vec{\boldsymbol{e}}_\varphi\big) &= \frac{29}{13}\,\vec{\boldsymbol{e}}_r + \frac{179}{65}\,\vec{\boldsymbol{e}}_\vartheta - \frac{6}{5}\,\vec{\boldsymbol{e}}_\varphi \quad \xrightarrow{\text{normiert}} \quad \begin{pmatrix} \tilde{a}_r \\ \tilde{a}_\vartheta \\ \tilde{a}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{13} \\ \frac{179}{65} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Das bedeutet: Ändern wir in einem vorgegebenen Koordinatensystem allein die Länge der Basisvektoren (nicht ihre Richtung und Orientierung), muss sich kompensatorisch die „Länge“ der zugehörigen skalaren Komponenten eines Vektors in reziproker Weise ändern, um die Invarianz dieses Vektors zu gewährleisten.

Aufgabe

Man berechne die Betragsquadrate von $\vec{\boldsymbol{a}}$ mit seinen kartesischen, seinen „normierten“ und seinen „unnormierten“ skalaren Vektorkomponenten, auch auf die Gefahr, dass man sich das Ergebnis noch nicht erklären kann. Die Verwendung allein der kontravarianten „unnormierten“ skalaren Vektorkomponenten liefert nämlich ein falsches Ergebnis. Klarheit tritt diesbezüglich ein, wenn man sich nicht nur mit der kontravarianten sondern auch mit der kovarianten Darstellung von Vektoren vertraut gemacht hat. Erst dann versteht man, wie sich die Norm eines Vektors allgemein in beliebigen Koordinatensystemen berechnen lässt.

3 Transformation von Feldern

3.1 Transformation von skalaren Feldern

Gehen wir davon aus, dass der Ortsraum beschrieben wird von einem Koordinatensystem K mit seinen Ortsvektoren $\vec{\boldsymbol{r}} := (x, y, z)$. Bei skalaren Feldern $\Phi(x, y, z)$ ist jedem Raumpunkt eine bestimmter Zahlenwert Φ, also ein Skalar, zugeordnet. Diese Zahlenwerte Φ werden ausgedrückt durch die Koordinaten, sind also eine Funktion von x, y, z und ändern sich nicht, wenn das Koordinatensystem geändert bzw. transformiert wird. Man sagt, skalare Felder sind **invariant bezüglich Koordinatentransformation**.

Wechseln wir von K zu einem anderen, z. B. gestrichenen Koordinatensystem K', so muss folglich gelten

$$\boxed{\Phi(x, y, z) = \Phi'(x', y', z')} \; .$$

Die gleichgebliebenen Zahlenwerte werden dann nach dieser Transformation durch die Koordinaten $x', y'z'$ ausgedrückt, d. h. wir müssen dafür sorgen, dass die Koordinaten x, y, z in $\Phi(x, y, z)$ durch x', y', z' ausgedrückt werden. Anders gesagt, die Koordinaten x', y', z' müssen die „Koordinatenwerte“ x, y, z liefern. Dies aber ist die Koordinatentransformation von K' nach K gemäß

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ,$$

die im Abschnitt 1.3 als Rücktransformation hergeleitet wird. Für das skalare Feld können wir damit schreiben:

$$\Phi(x, y, z) = \Phi\Big(x(x', y', z'),\ y(x', y', z'),\ z(x', y', z')\Big) = \Phi'(x', y', z')$$

oder in der meistens üblichen Schreibweise

$$\Phi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \Phi\big(A^{-1} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}'\big) = \Phi'\big(\vec{\boldsymbol{r}}'\big) \; .$$

In der Theorie mag das alles etwas umständlich erscheinen, praktisch ist es aber ganz einfach. Wir brauchen in der Funktion $\Phi(x, y, z)$ nur x, y, z durch die rechten Seiten der zugehörigen Rücktransformationgleichungen zu ersetzen. Im Abschnitt 1.3 sind dies für x und y die rechten Seiten von (1.10) und (1.11).

3.2 Transformation von Vektorfeldern

Bei Vektorfeldern $\vec{\boldsymbol{v}}(x, y, z)$ ist an jeden Raumpunkt ein Vektor $\vec{\boldsymbol{v}}$ angeheftet. Die skalaren Komponenten dieser Vektoren transformieren sich beim Übergang vom Koordinatensystem K in ein gestrichenes Koordinatensystem K' wie mit (1.7) hergeleitet:

$$\vec{\boldsymbol{v}}' := \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad .$$

Jetzt müssen in den skalaren Vektorkomponenten nur noch x, y, z durch die gestrichenen Koordinaten x', y', z' ausgedrückt werden. Dies erfolgt genau so, wie bereits für skalare Felder beschrieben. Die Transformation eines Vektorfeldes von K nach K' erhält dann die Gestalt

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{r}}) := \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{\text{Transformation von } K \text{ nach } K'}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}'(\vec{\boldsymbol{r}}') := \begin{pmatrix} v'_x(x', y', z') \\ v'_y(x', y', z') \\ v'_z(x', y', z') \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} v_x\Big(x(x', y', z'),\ y(x', y', z'),\ z(x', y', z')\Big) \\ v_y\Big(x(x', y', z'),\ y(x', y', z'),\ z(x', y', z')\Big) \\ v_z\Big(x(x', y', z'),\ y(x', y', z'),\ z(x', y', z')\Big) \end{pmatrix}$$

oder ausmultipliziert und mit veränderter Indizierung

$$\vec{\boldsymbol{v}}'(\vec{\boldsymbol{r}}') := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1\big(A^{-1}\vec{\boldsymbol{r}}'\big) & a_{12} \cdot v_2\big(A^{-1}\vec{\boldsymbol{r}}'\big) & a_{13} \cdot v_3\big(A^{-1}\vec{\boldsymbol{r}}'\big) \\ a_{21} \cdot v_1\big(A^{-1}\vec{\boldsymbol{r}}'\big) & a_{22} \cdot v_2\big(A^{-1}\vec{\boldsymbol{r}}'\big) & a_{23} \cdot v_3\big(A^{-1}\vec{\boldsymbol{r}}'\big) \\ a_{31} \cdot v_1\big(A^{-1}\vec{\boldsymbol{r}}'\big) & a_{32} \cdot v_2\big(A^{-1}\vec{\boldsymbol{r}}'\big) & a_{33} \cdot v_3\big(A^{-1}\vec{\boldsymbol{r}}'\big) \end{pmatrix}$$

oder schließlich in der meistens üblichen Kurzschreibweise

$$\vec{\boldsymbol{v}}'(\vec{\boldsymbol{r}}') = A \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\big(A^{-1} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}'\big) \ .$$

4 Transformation einer reellen Matrix

Allgemein bezeichnet man die Matrizen M und $\widetilde{M}$ als **äquivalent**, wenn sie durch die Matrixgleichung

$$\widetilde{M} = A\,M\,B$$

miteinander verknüpft sind. Die Wahl von A und B bestimmt die Überführung („Transformation“) von M in $\widetilde{M}$ und damit $\widetilde{M}$ selbst bzw. in der Umkehrung auch M . Davon ausgehend wollen wir zwei Spezialfälle dieser Transformation untersuchen.

Zur Vereinfachung betrachten wir nur Transformationen zwischen den kartesischen Koordinatensystemen K und K' mit der Vektordarstellung in den entsprechenden Standard-Basen $\{\vec{\boldsymbol{e}}\}$ und $\{\vec{\boldsymbol{e}}\,'\}$. Die (relle, quadratische, reguläre)

Koordinaten-Transformationsmatrix von K nach K' sei A

und die (zu A inverse)

Koordinaten-Rücktransformationsmatrix von K' nach K sei $A^{-1} \equiv A'$.

Die zu transformierende reelle (quadratische) Matrix sei M in K bzw. M' in K' .

4.1 Kongruente Transformation

Wir gehen aus von den Rücktransformationen der Vektoren $\vec{\boldsymbol{v}}'$ und $\vec{\boldsymbol{w}}'$ von K' nach K

$$A^{-1}\,\vec{\boldsymbol{v}}' = \vec{\boldsymbol{v}}\,, \qquad A^{-1}\,\vec{\boldsymbol{w}}' = \vec{\boldsymbol{w}}\,.$$

Für das transformationsinvariante Skalarprodukt $s = s'$ gilt damit

$$\begin{aligned} s = \vec{\boldsymbol{v}}^{\,\mathrm{T}}\,M\,\vec{\boldsymbol{w}} \;&=\; \left(A^{-1}\,\vec{\boldsymbol{v}}'\right)^{\mathrm{T}}\,M\,\left(A^{-1}\,\vec{\boldsymbol{w}}'\right) \\ &=\; \vec{\boldsymbol{v}}'^{\,\mathrm{T}}\,\underbrace{\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\,M\,A^{-1}}_{M'}\,\vec{\boldsymbol{w}}' \\ &=\; \vec{\boldsymbol{v}}'^{\,\mathrm{T}}\,M'\,\vec{\boldsymbol{w}}' = s' \qquad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$K \;\longrightarrow\; K' \;: \qquad M' = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}} M\,A^{-1} = A'^{\,\mathrm{T}}\,M\,A'$$

und analog dazu

$$K' \;\longrightarrow\; K \;: \qquad M \;=\; A^{\mathrm{T}} M' A\,.$$

In diesem speziellen Fall nennt man die Matrizen M und M' **kongruent**.

Wie wir sehen, erfolgt die Transformation von M nach M' nicht mit der Koordinaten-Transformationsmatrix A, sondern mit der (inversen) Rücktransformationsmatrix $A^{-1} \equiv A'$. Analog dazu erfolgt die Rücktransformation von M' nach M mit der Transformationsmatrix A.

4.2 Ähnlichkeitstransformation

Wir gehen wieder aus von den Rücktransformationen der Vektoren $\vec{\boldsymbol{v}}'$ und $\vec{\boldsymbol{w}}'$ von K' nach K

$$\vec{\boldsymbol{v}} = A^{-1}\,\vec{\boldsymbol{v}}'\,, \qquad \vec{\boldsymbol{w}} = A^{-1}\,\vec{\boldsymbol{w}}'$$

und suchen die Transformation von M unter der

$$\textbf{Bedingung} \quad \vec{\boldsymbol{v}} = M\,\vec{\boldsymbol{w}}\ :$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = A^{-1}\,\vec{\boldsymbol{v}}' = M\,\vec{\boldsymbol{w}} = M\,A^{-1}\,\vec{\boldsymbol{w}}'\,. \tag{4.1}$$

Die Multiplikation der Matrixgleichung (4.1) von links mit A ergibt

$$\begin{aligned} A\,A^{-1}\,\vec{\boldsymbol{v}}' &= \underbrace{A\,M\,A^{-1}}_{M'}\,\vec{\boldsymbol{w}}' \\ \vec{\boldsymbol{v}}' &= M'\,\vec{\boldsymbol{w}}' \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$K \longrightarrow K'\ : \qquad M' = A\,M\,A^{-1} = A\,M\,A'$$

und analog dazu unter Verwendung von $A^{-1}A = A\,A^{-1}$

$$K' \longrightarrow K\ : \qquad M = A^{-1}M'A = A'M'A\,.$$

In diesem speziellen Fall nennt man die Matrizen M und M' **ähnlich** oder auch zueinander **transformiert**.

5 Ko- und kontravariante Darstellung von Vektoren und der metrische Tensor

5.1 Vorbemerkungen

Zu diesem Thema und auch darüber hinaus sehr zu empfehlen ist die YouTube-Vorlesungsreihe *Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung* VT I und VT II von Prof. Dr. Paul Wagner, Fakultät für Physik, Universität Wien.

Beim Umgang mit Vektoren in nichtkartesischen Koordinatensystemen kommt man um die Verwendung des Tensorkalküls (der Tensoranalysis) nicht herum. Es handelt sich dabei um eine besonders von Physikern und Technikern verwendete Rechenmethode in der Differentialgeometrie. Man sagt deshalb auch **Tensorrechnung** zur Tensoranalysis.

Zur besseren Übersicht werden in den Vorbemerkungen einige Sachverhalte vorweggenommen, die sich erst im Nachhinein, d. h. im Verlauf dieses Kapitels erschließen werden.

- **Koordinaten** wie beispielsweise u^i werden immer **hochgestellt** (oben) **indiziert**. Sie beziehen sich nicht auf ein Basisvektorsystem, sondern sie sind die Grundlage für die Einführung von Vektorbasen. Koordinaten sind weder ko- noch kontravariant.
- **Kontravariante Vektorkomponenten** bzw. **Tensorkomponenten** werden **hochgestellt** indiziert, **kovariante tiefgestellt**. „Kartesische Größen" sind gleichzeitig ko- und kontravariant. Warum das so ist, wird im Folgenden klar werden. Für den Ortsvektor $\vec{x}$ und seine Koordinaten im kartesischen Koordinatensystem werden wir die Notation $\vec{x} = x^1\,\vec{e}_1 + x^2\,\vec{e}_2 + \cdots + x^n\,\vec{e}_n = x^i\,\vec{e}_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$ verwenden.
- Im Tensorkalkül wird ein hochgestellter (oberer) Index im Nenner eines Bruchterms als tiefgestellter (unterer) Index betrachtet.
- **Einstein'sche Summenkonvention**

  Wenn bei Verwendung der Tensoralgebra in einem Produktterm ein Index doppelt und dabei einmal oben und einmal unten auftritt, wird über diesen Index summiert. Derartige Indizes sind demzufolge Summationsindizes. Soll über einen doppelt auftretenden Index nicht summiert werden, wird dieser in Klammern gesetzt oder mit einem Stern indiziert (gesternt).
- **Summationsindizes sind gebundene oder stumme Indizes**, weil sie nach erfolgter Summation verschwunden sind. Sie sind deshalb beliebig wählbar bzw. dürfen umbenannt werden. Sind die Glieder einer Summe Produktterme mit Paaren stummer Indizes, darf die Umbenennung dieser stummen Indizes auch gliedweise erfolgen.

  In Produkttermen nur **einfach auftretende Indizes sind freie Indizes** und dürfen nicht ohne Weiteres umbenannt werden. Bei der Umbenennung von Indizes sollte man aufpassen, ob ein umbenannter Index schon anderweitig verwendet wurde, z.B. als Summationsindex. In diesem Fall muss man einen anderen Index wählen.

- Die Begriffe kovariant und kontravariant beziehen sich im Grunde genommen auf Vektoren, also auf deren skalare Vektorkomponenten und die zugehörigen Basisvektoren. Wir werden im Folgenden die Abkürzung **Vektorkomponente** statt des Begriffs *skalare Vektorkomponente* verwenden, denn allgemein geht aus dem Kontext hervor, was im Einzelfall gemeint ist. Jeder Vektor als gerichtete Größe und dargestellt als Pfeil mit einer bestimmten Länge zwischen seinem Anfangspunkt und seiner Spitze ist gleichsam angeheftet an einen Punkt P in einem Koordinatensystem. Das bedeutet, dass die Koordinaten dieses Punktes P lediglich den Startpunkt des Vektors definieren, allgemein aber nichts über seine Länge, nichts über seine Richtung und auch nichts über seine Orientierung aussagen. Deshalb werden wir in diesem Kapitel den in der Vektorrechnung üblichen Begriff *Vektorkoordinate* vermeiden.
  (Siehe *Vorbemerkungen* des Kapitels 1!)

- Es ist in der Physik üblich, mit dem folgenden **Mannigfaltigkeitsbegriff** zu arbeiten:
  Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist eine Punktmenge, in der jedem Punkt P ein n-Tupel (u^i) von Koordinaten u^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zugeordnet ist.

  Jeder Punkt $P(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ wird also durch n Koordinaten u^i indentifiziert.

- Der 3-dimensionale Raum unserer Anschauung heißt auch euklidischer Raum. Die Menge der Punkte des euklidischen Raums ist eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. Folglich ist im euklidischen Raum die Punktmenge jeder Fläche eine 2-dimensionale und die Punktmenge jeder Kurve eine 1-dimensionale **Teilmannigfaltigkeit**.

  Gehen wir von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit $n > 3$ aus und betrachten diese als Hyperräume, dann sind die daraus resultierenden $(n-1)$-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten in Analogie zum euklidischen Raum als **Hyperflächen** anzusehen.

- Unsere Betrachtungen in diesem Kapitel sollen im anschaulichen, dreidimensionalen Ortsraum stattfinden, sodass die entsprechenden Indizes nur von 1 bis 3 laufen. Das jeweils verwendete Koordinatensystem, verkörpert durch ein dreidimensionales Netz aus den Koordinatenlinien, bestimmt die Metrik des Raums. „Schneiden sich die Koordinatenlinien unter rechten Winkeln, so heißt das Koordinatensystem orthogonal.“[1] Andernfalls handelt es sich um schiefwinklige Koordinatensysteme. Beispielsweise kartesische Koordinaten sowie Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten bilden orthogonale Koordinatensysteme.

- „Die Koordinatenachsen sind als Tangenten an die Koordinatenlinien definiert. Da die Koordinatenlinien im Allgemeinen gekrümmt sind, sind die Koordinatenachsen nicht räumlich fest, … Dies führt auf das Konzept der lokalen Basisvektoren, deren Richtung vom betrachteten Raumpunkt abhängt – im Gegensatz zu globalen Basisvektoren der kartesischen oder affinen Koordinaten. …
  Für … krummlinige … Koordinaten variieren Basisvektoren und Komponenten von Punkt zu Punkt, weshalb die Basis als lokale Basis bezeichnet wird.“[1]

[1]Zitiert aus: http://de.wikipedia.org/wiki/Krummlinige_Koordinaten, Seite 3 und Seite 4.

- Es gibt im Wesentlichen die vier folgenden verschiedenen Typen von Koordinatensystemen:
    - das geradlinig-orthogonale (kartesische),
    - die krummlinig-orthogonalen (z. B. Polar- und Kugelkoordinaten),
    - die geradlinig-schiefwinkligen und
    - die krummlinig-schiefwinkligen Koordinatensysteme.

  Die geradlinigen Koordinatensysteme werden auch **affine Koordinatensysteme** genannt.
- Geradlinige Koordinatensysteme besitzen (ortsunabhängige) **globale Vektorbasen**. Krummlinige Koordinatensysteme besitzen (ortsabhängige) **lokale Vektorbasen**.
- Alle Koordinatenlinien des kartesischen Koordinatensystem sind geradlinig und verlaufen orthogonal zueinander. Standardmäßig verwendet man deshalb für kartesische Koordinaten die

  Standardbasis $\{\vec{e}_i\}$ mit den **Basis-Einheitsvektoren** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$,

  die parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Die Standardbasis ist eine (ortsunabhängige) Orthonormalbasis und wird auch **kanonische Basis** genannt.
- Das kartesische Koordinatensystem bezeichnen wir in diesem Kapitel mit X, seine Koordinatenlinien mit x^i , $i = 1, 2, 3$. Die drei Koordinatenlinien, die durch den Koordinatenursprung laufen, bilden die Achsen des kartesischen Koordinatensystems. Man sagt, das kartesische Koordinatensystem X wird aufgespannt von den drei Achsen x^1 , x^2 , x^3 .
- Im kartesischen Koordinatensystem sind die Koordinaten eines Punktes P gleich den skalaren Vektorkomponenten des zu diesem Punkt gehörenden Ortsvektors $\vec{\boldsymbol{r}}$:

$$P(x_1, x_2, x_3) \;:=\; \vec{\boldsymbol{r}} \;:=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Im kartesischen Koordinatensystem X erhält man die skalaren Vektorkomponenten eines Vektors $\vec{\boldsymbol{v}}$ durch dessen Parallelprojektion (parallel zu den Achsen von X) auf die Achsen von X . Weil aber die Achsen im kartesischen Koordinatensystem senkrecht aufeinander stehen, ist in diesem Fall die Parallelprojektion gleichzeitig auch eine orthogonale Projektion.
- Bei **Orthonormalbasen** wie beispielsweise bei der physikalischen (normierten) Kugelkoordinaten-Vektorbasis und natürlich bei der Standardbasis stimmen sowohl die ko- und kontravarianten Basisvektoren als auch die aus den Vektorbasen resultierenden ko- und kontravarianten skalaren Vektorkomponenten überein. In diesem Fall ist der Metriktensor g_{ij} in Matrixdarstellung die Einheitsmatrix:

$$\left(g_{ij}\right) \;=\; \left(g^{ij}\right) \;=\; \left(\delta_i{}^j\right) \;=\; \mathbb{1} \; .$$

- Die Länge des infinitesimalen Abstandsvektors[2]

$$\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}x^1\vec{e}_1 + \mathrm{d}x^2\vec{e}_2 + \mathrm{d}x^3\vec{e}_3 = \mathrm{d}x^i\,\vec{e}_i$$

zwischen zwei benachbarten Punkten in kartesischen Koordinaten beträgt

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^i}$$

und ist bei einem Wechsel des Koordinatensystems invariant, d. h., die Länge des Vektors ist in allen Koordinatensystemen gleich.

- Nichtkartesische Koordinatensysteme bezeichnen wir mit U. So erscheint z. B. ein schiefwinklig-krummliniges Koordinatensystem U als *räumliches* Netz aus seinen Koordinatenlinien u^k, also den Koordinatenlinien u^1, u^2, u^3.

  Zwischen U und X soll die invertierbare, d. h. die umkehrbar-eindeutige Beziehung

$$u^k = u^k(x^i) \quad \longleftrightarrow \quad x^i = x^i(u^k)$$

bestehen. Derartige Beziehungen heißen **Isomorphismen**.

- In nicht-kartesischen Koordinatensystemen und somit im Allgemeinen ist die Länge des infinitesimalen Abstandsvektors

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}u^k\,\mathrm{d}u_k}\;.$$

Dies werden wir im Abschnitt 5.13 verdeutlichen.

- Der Ursprung jedes Vektors eines Vektorfeldes ist „angeheftet“ an seinen (zugehörigen) Raumpunkt, von dessen Koordinaten der Vektor abhängt. Die Ursprünge der Vektoren fallen also in U zusammen mit den Ursprüngen der lokalen Basisvektoren, sodass jeder Feldvektor seine eigene lokale Basis besitzt, bezüglich der er in seine Komponenten zerlegt werden kann. Ein derartiges Vektorfeld ist z. B. das Gradientenfeld eines skalaren Feldes

$$\Phi(x^1,\,x^2,\,x^3) \quad \text{bzw.} \quad \Phi\big(u^1(x^1,\,x^2,\,x^3),\;u^2(x^1,\,x^2,\,x^3),\;u^3(x^1,\,x^2,\,x^3)\big)\;.$$

- Ein Vektor $\vec{a}$ lässt sich in einem gegebenen Koordinatensystem, charakterisiert durch den Verlauf seiner Koordinatenlinien, durch seine kontravarianten Komponenten a^k in der kovarianten Vektorbasis $\{\vec{g}_k\}$ gemäß

$$\vec{a} = a^k \cdot \vec{g}_k$$

oder durch seine kovarianten Komponenten a_k in der kontravarianten Vektorbasis $\{\vec{g}^k\}$ gemäß

$$\vec{a} = a_k \cdot \vec{g}^k$$

darstellen. Der Vektor $\vec{a}$ selbst verändert sich dabei nicht, er ist in beiden Vektordarstellungen derselbe. Lediglich die Basen $\{\vec{g}_k\}$ und $\{\vec{g}^k\}$ sind verschieden konstruiert, sodass sich allgemein auch die auf ihnen basierenden Vektorkomponenten a^k und a_k entsprechend voneinander unterscheiden.

[2] Den infinitesimalen Abstandsvektor findet man oft auch in der Notation $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x \cdot \vec{i} + \mathrm{d}y \cdot \vec{j} + \mathrm{d}z \cdot \vec{k}$ mit der Standardbasis $\{\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\,\}$.

- **Tensor-Definition**

  $\mathcal{V}$ sei ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ (meistens der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$) und $\mathcal{V}^*$ sei der zugeordnete duale Vektorraum (Dualraum). m, n seien zwei nicht-negative ganze Zahlen. Dann nennt man $\binom{m}{n}$-Tensoren oder auch (m,n)-Tensoren auf $\mathcal{V}$ diejenigen multilinearen Abbildungen, welche m Kovektoren (Elemente von $\mathcal{V}^*$) und n Vektoren (Elemente von $\mathcal{V}$) auf Skalare des Körpers $\mathbb{K}$ abbilden, wobei Linearität bezüglich *jedes* Arguments gelten soll. Die ganze Zahl $m+n$ heißt die Stufe des Tensors. (m,n)-Tensoren sind m-fach kontravariant und n-fach kovariant, besitzen also m obere und n untere Indizes.

  Erläuterungen:

  $(0,0)$-Tensoren sind Skalare,
  $(1,0)$-Tensoren sind Vektoren (Spaltenvektoren),
  $(0,1)$-Tensoren sind Kovektoren (Zeilenvektoren, 1-Multilinearformen oder kurz Einsformen),
  $(1,1)$-Tensoren sind „Matrizen“,
  $(2,0)$-Tensoren sind „Dyaden“ oder „Bivektoren“,
  $(0,2)$-Tensoren sind 2-Multilinearformen (Bilinearformen),
  $(0,n)$-Tensoren sind n-Multilinearformen.

  Zwei einfache **Beispiele** in 2 Dimensionen zur Veranschaulichung:

  Anwendung eines $(0,1)$-Tensors (Kovektors) $T_i =: T = \vec{\boldsymbol{p}}^* = (\,p_1 \;\; p_2)$
  auf den Vektor $\vec{\boldsymbol{v}} := \binom{v_1}{v_2}$:

  $$\vec{\boldsymbol{p}}^*(\vec{\boldsymbol{v}}) \;=\; \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \;=\; p_i v^i \;=\; p_1 v^1 + p_2 v^2 \;\Rightarrow\; \text{Skalar}\,.$$

  Anwendung eines $(2,0)$-Tensors $T^{ij} =: T = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{pmatrix}$

  auf die Kovektoren $\vec{\boldsymbol{p}}^* = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{\boldsymbol{q}}^* = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}$:

  $$\begin{aligned} T^{ij} p_i q_j = \vec{\boldsymbol{p}}^*\, T\big(\vec{\boldsymbol{q}}^*\big)^{\mathrm{T}} \;&=\; \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{11} q_1 + T^{12} q_2 \\ T^{21} q_1 + T^{22} q_2 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \end{pmatrix} = p_1 r^1 + p_2 r^2 \;\Rightarrow\; \text{Skalar}\,. \end{aligned}$$

  Tensoren zeichnen sich durch ein **bestimmtes Transformationsverhalten** bei einem Wechsel des Koordinatensystems aus. Z. B. transformiert sich ein $(1,2)$-Tensor beim Wechsel vom ungestrichenen zum gestrichenen Koordinatensystem wie folgt:

  $$T^{i'}{}_{j'k'} = \frac{\partial i'}{\partial i}\,\frac{\partial j}{\partial j'}\,\frac{\partial k}{\partial k'}\; T^{i}{}_{jk}\,.$$

  Mathematische Objekte, die sich nicht in dieser Weise transformieren, sind keine Tensoren.

- **Transformation der kontravarianten Komponenten** a^k eines n-dimensionalen Vektors $\vec{a}$ vom x^k-Koordinatensystem S in das $x^{k'}$-Koordinatensystem S' für einen Punkt $P := (x^1, x^2, \ldots, x^n) \equiv (x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'})$:

$$\begin{array}{ccc} a^{k'} = & \left[\dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right]_P & a^k \\ S' & \longleftarrow & S\,. \end{array}$$

- **Transformation der kovarianten Komponenten** a_k eines n-dimensionalen Vektors $\vec{a}$ vom x^k-Koordinatensystem S in das $x^{k'}$-Koordinatensystem S' für einen Punkt $P := (x^1, x^2, \ldots, x^n) \equiv (x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'})$:

$$\begin{array}{ccc} a_{k'} = & \left[\dfrac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\right]_P & a_k \\ S' & \longleftarrow & S\,. \end{array}$$

- Die Koordinaten eines Koordinatensystems selbst und ihre Differentiale transformieren sich immer kontravariant gemäß

$$x^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\, x^k\,, \qquad \mathrm{d}x^k = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\, \mathrm{d}x^k\,.$$

  Im Gegensatz dazu transformiert sich und ist der Gradient eines skalaren Feldes kovariant, wie wir noch sehen werden.

- Die Anzahl der Indizes eines Tensors kennzeichnet seine Stufe. Dazu vier selbsterklärende Beispiele:

  T^i kontravarianter Tensor der Stufe 1
  bzw. (1, 0)-Tensor (1 kontravarianter Index, 0 kovariante Indizes).

  T_{ij} kovarianter Tensor der Stufe 2
  bzw. (0, 2)-Tensor (0 kontravariante Indizes, 2 kovariante Indizes).

  $T^{ijk}{}_l$ gemischter Tensor der Stufe 4
  bzw. (3, 1)-Tensor (3 kontravariante Indizes, 1 kovarianter Index).

  T Tensor der Stufe 0
  bzw. (0, 0)-Tensor (0 kontravariante Indizes, 0 kovariante Indizes).

- Die Anzahl der Komponenten[3] eines Tensors entspricht seiner Dimension D. Dazu vier selbsterklärende Beispiele: d sei die Anzahl der Dimensionen des Raumes, in dem die Tensoren „leben“. Für den $\mathbb{R}^3$ z. B. ist $d = 3$.

[3] Der Sprachgebrauch in der Literatur ist nicht einheitlich. Meistens wird von Tensorkomponenten gesprochen, obwohl die zugehörigen Basisvektoren dabei nicht erscheinen. Gelegentlich wird dafür aber auch der Begriff „Tensorkoordinaten“ benutzt, wohl in Analogie zum Begriff „Vektorkoordinaten“.

Wir werden die z. B. $T^i{}_{jk}$ eines Tensors T als **Tensorkomponenten** (und nicht als Tensorkoordinaten) bezeichnen. Demzufolge werden wir für Tensoren entweder die Komponentenschreibweise (**Komponentendarstellung**) oder die Matrixschreibweise (**Matrixdarstellung**) verwenden. Matrizen hingegen setzen sich zusammen aus **Matrixelementen**.

- Tensor der Stufe **0**, $d = 3 \quad \Rightarrow D = d^0 = 3^0 = 1$ Komponente.
  Ein Tensor der Stufe 0 besitzt immer nur *eine* Komponente und ist folglich ein Skalar bzw. eine Zahl.
- Tensor der Stufe **1**, $d = 2 \quad \Rightarrow D = d^1 = 2^1 = 2$ Komponenten.
  Ein Tensor der Stufe 1 repräsentiert einen Vektor oder einen Kovektor mit d Komponenten.
- Tensor der Stufe **2**, $d = 4 \quad \Rightarrow D = d^2 = 4^2 = 4 \times 4 = 16$ Komponenten.
  Ein Tensor der Stufe 2 repräsentiert eine Matrix mit d^2 Komponenten.
- Tensor der Stufe **3**, $d = 4 \quad \Rightarrow D = d^3 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ Komponenten.
  Ein Tensor der Stufe 3 repräsentiert ein kubisches dreidimensionales Gitter (Raumgitter) mit d^3 Komponenten.

• In der kartesischen Vektoralgebra („Vektorrechnung“) unterscheidet man zwischen der **Komponentendarstellung von Vektoren** z. B. gemäß

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3$$

und der Spaltenvektordarstellung z. B.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \big(v_1,\, v_2,\, v_3\big)^{\mathrm{T}} ,$$

in der Vektoren als Spaltenvektoren bzw. einspaltige Matrizen aufgefasst werden. Insofern handelt sich bei der Spaltenvektordarstellung im Grunde um eine **Matrixdarstellung**.

• In der Tensoralgebra bzw. im Tensorkalkül verwendet man vor allem die **Komponentendarstellung** (Komponentenschreibweise oder auch Indexschreibweise) von Tensoren wie z. B. eines (1, 1)-Tensors T im $\mathbb{R}^3$ gemäß

$$T \underset{U}{\longrightarrow} T^k{}_l \,.$$

Die zugehörige **Matrixdarstellung** (Matrixschreibweise)

$$T \underset{U}{\longrightarrow} \big(T^k{}_l\big) = \begin{pmatrix} T^1{}_1 & T^1{}_2 & T^1{}_3 \\ T^2{}_1 & T^2{}_2 & T^2{}_3 \\ T^3{}_1 & T^3{}_2 & T^3{}_3 \end{pmatrix}$$

dient oft der Veranschaulichung. Das U unter dem Pfeil ist optional und steht für das Koordinatensystem bzw. für die Basis, in der die Tensordarstellung erfolgt, falls dies nicht aus dem Zusammenhang hervorgeht.

Allgemein gilt aber:
Wird eine Größe bzw. ein Tensor in Klammern gesetzt, sind innerhalb der Klammer alle sich aus den Indizes ergebenden Größen bzw. Tensorkomponenten gemeint. Beispielsweise beinhaltet die Matrixdarstellung $\big(g_{ij}\big)$ des Metriktensors g_{ij} alle Komponenten g_{ij} .

- Vektoren, definiert durch ihre kontravarianten Komponenten, werden als Spaltenvektoren (einspaltige Matrizen) dargestellt. Kovariante Komponenten definieren kovariante Vektoren oder **Kovektoren**[4], die man auch als Einsformen (1-Formen) bezeichnet und als Zeilenvektoren (einzeilige Matrizen) schreibt. Dies ist bei der Multiplikation von Tensoren in Matrixschreibweise zu berücksichtigen. Wir zeigen der Einfachheit halber für den 2-dimensionalen Raum ($d = 2$) die mit dem Vektor bzw. $(1,0)$-Tensor a^i und dem Kovektor bzw. $(0,1)$-Tensor b_i in Matrixschreibweise möglichen Produkte:
  - **Skalarprodukt**: $a^i\, b_i = b_i\, a^i = \lambda$
    $\big($auch inneres Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}^*$ aus dem Vektor $\vec{a}$ und dem Kovektor $\vec{b}^*\big)$
    $$\big(b_1\,,\, b_2\big)\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = b_1 a^1 + b_2 a^2 = a^1 b_1 + a^2 b_2 = \lambda\,. \tag{5.1}$$
  - **dyadisches Produkt**: $a^i\, b_j = T^i{}_j$ (als Tensorkomponente $= b_j\, a^i$)
    $\big($auch Tensorprodukt $\vec{a} \otimes \vec{b}^* = \big(\vec{b}^* \otimes \vec{a}\big)^{\mathrm{T}}$ aus Vektor $\vec{a}$ und Kovektor $\vec{b}^*\big)$
    $$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}\big(b_1\,,\, b_2\big) = \begin{pmatrix} a^1 b_1 & a^1 b_2 \\ a^2 b_1 & a^2 b_2 \end{pmatrix} = \big(T^i{}_j\big) = \begin{pmatrix} b_1 a^1 & b_1 a^2 \\ b_2 a^1 & b_2 a^2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \big(T_j{}^i\big)^{\mathrm{T}}\,.$$
  - **Vektor-Matrix-Vorprodukt**: $b_i\, L^i{}_j = L^i{}_j\, b_i = v_j$
    $$\begin{aligned} \big(b_1\,,\, b_2\big)\begin{pmatrix} L^1{}_1 & L^1{}_2 \\ L^2{}_1 & L^2{}_2 \end{pmatrix} &= \Big(b_1 L^1{}_1 + b_2 L^2{}_1\,,\; b_1 L^1{}_2 + b_2 L^2{}_2\Big) \\ &= \Big(L^1{}_1 b_1 + L^2{}_1 b_2\,,\; L^1{}_2 b_1 + L^2{}_2 b_2\Big) = \big(v_1\,,\, v_2\big)\,. \end{aligned}$$
  - **Vektor-Matrix-Nachprodukt**: $L^j{}_i\, a^i = a^i\, L^j{}_i = v^j$
    $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L^1{}_1 & L^1{}_2 \\ L^2{}_1 & L^2{}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} &= \Big(L^1{}_1 a^1 + L^1{}_2 a^2\,,\; L^2{}_1 a^1 + L^2{}_2 a^2\Big) \\ &= \Big(a^1 L^1{}_1 + a^2 L^1{}_2\,,\; a^1 L^2{}_1 + a^2 L^2{}_2\Big) = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

  Tensoren der Stufe > 2 lassen sich nicht als Matrix darstellen.
- $\{\vec{\boldsymbol{g}}_k\}$ ist die kovariante Vektorbasis aus den kovarianten Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}_k$.

  $\{\vec{\boldsymbol{g}}^k\}$ ist die kontravariante Vektorbasis aus den kontravarianten Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}^k$.
- $g_{kl} = \vec{\boldsymbol{g}}_k \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}_l$ sind die Komponenten des kovarianten metrischen Tensors. Man sagt auch salopp: g_{kl} ist der Metriktensor.

  $g^{kl} = \vec{\boldsymbol{g}}^k \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}^l$ sind die Komponenten des kontravarianten metrischen Tensors. Man sagt auch salopp: g^{kl} ist der kontravariante Metriktensor.

[4] Kovektoren werden zur Unterscheidung von „normalen“ Vektoren in der Literatur gelegentlich mit einem Stern indiziert, z. B. $\vec{a} \;\to\; \vec{a}^{\,*}$. Aber auch physikalische Vektorkomponenten werden mit einem Stern indiziert, um sie von holonomen Vektorkomponenten zu unterschieden (siehe unten), was dann zu Verwechselungen führen kann.

- Basisvektoren, die aus den Koordinaten eines Koordinatensystems nach dem Tensorkalkül hergeleitet werden (siehe Abschnitt 5.2 und Abschnitt 5.3), bezeichnet man als **natürliche** oder auch als **holonome Basisvektoren**. Im Allgemeinen sind holonome Vektorbasen unnormiert, werden also nicht aus Einheitsvektoren gebildet.

  Zu holonomen Vektorbasen gehören **holonome Vektorkomponenten**.

  Man kann Vektorbasen aber auch frei wählen – beispielsweise im einfachsten Fall in einem kartesischen Koordinatensystem als Anpassung an spezielle physikalische Sachverhalte.

- Nur im speziellen Fall **orthogonaler Koordinatensysteme** verhalten sich die Längen der kovarianten *Basisvektoren* **reziprok** zu den Längen der entsprechenden kontravarianten *Basisvektoren*. Dieser Sachverhalt wird im Folgenden noch deutlich werden.

- Werden die Basisvektoren auf die Länge 1 normiert, bilden sie eine Einheits-Vektorbasis, auch **physikalische Basis** genannt.[5]

- Die wirklichen Längen der Vektorkomponenten werden angegeben durch die **physikalischen Vektorkomponenten**. Diese werden oft mit einem Stern indiziert wie beispielsweise die physikalische kovariante Vektorkomponente

  $$a_k^* \;=\; a_k^* \cdot 1 \;=\; a_k^* \left|\vec{\boldsymbol{e}}^{\,k}\right| \;=\; a_k \left|\vec{\boldsymbol{g}}^{\,k}\right| \;=\; \left|a_k \, \vec{\boldsymbol{g}}^{\,k}\right|$$

  mit der Länge $\left|\vec{\boldsymbol{g}}^{\,k}\right| = \sqrt{g^{kk}}$ des unnormierten kontravarianten Basisvektors $\vec{\boldsymbol{g}}^{\,k}$ und der zugehörigen unnormierten kovarianten Vektorkomponente a_k.

- **Regel vom Austausch der Indizes**

  Mit dem gemischten Metriktensor bzw. dem Kronecker-delta $\vec{\boldsymbol{g}}_j \cdot \vec{\boldsymbol{g}}^{\,k} = \delta_j^{\ k}$ gilt die

  $$\text{Regel vom Austausch der Indizes :} \quad V^j \, \delta_j^{\ k} \;=\; V^k$$

  bzw. bezügliche eines Tensors der Stufe 2

  $$\boxed{A^{ij} \, \delta_j^{\ k} \;=\; A^{ik}} \,. \tag{5.2}$$

  Dies für 3 Dimensionen ausgeschrieben ergibt

  für $k = 1$:

  $$\left.\begin{aligned} \underline{A^{11} \, \delta_1^{\ 1}} + A^{12} \, \delta_2^{\ 1} + A^{13} \, \delta_3^{\ 1} \;&=\; A^{11} \\ \underline{A^{21} \, \delta_1^{\ 1}} + A^{22} \, \delta_2^{\ 1} + A^{23} \, \delta_3^{\ 1} \;&=\; A^{21} \\ \underline{A^{31} \, \delta_1^{\ 1}} + A^{32} \, \delta_2^{\ 1} + A^{33} \, \delta_3^{\ 1} \;&=\; A^{31} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; A^{i1} \xrightarrow{\text{Matrix}} \text{1. Spalte} \,,$$

  für $k = 2$:

  $$\left.\begin{aligned} A^{11} \, \delta_1^{\ 2} + \underline{A^{12} \, \delta_2^{\ 2}} + A^{13} \, \delta_3^{\ 2} \;&=\; A^{12} \\ A^{21} \, \delta_1^{\ 2} + \underline{A^{22} \, \delta_2^{\ 2}} + A^{23} \, \delta_3^{\ 2} \;&=\; A^{22} \\ A^{31} \, \delta_1^{\ 2} + \underline{A^{32} \, \delta_2^{\ 2}} + A^{33} \, \delta_3^{\ 2} \;&=\; A^{32} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; A^{i2} \xrightarrow{\text{Matrix}} \text{2. Spalte} \,,$$

[5] Auf Einheitsvektoren normierte Vektorbasen werden gelegentlich auch unitäre Vektorbasen genannt.

für $k = 3$:

$$\left.\begin{aligned} A^{11}\,\delta_1{}^3 + A^{12}\,\delta_2{}^3 + \underline{A^{13}\,\delta_3{}^3} &= A^{13} \\ A^{21}\,\delta_1{}^3 + A^{22}\,\delta_2{}^3 + \underline{A^{23}\,\delta_3{}^3} &= A^{23} \\ A^{31}\,\delta_1{}^3 + A^{32}\,\delta_2{}^3 + \underline{A^{33}\,\delta_3{}^3} &= A^{33} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^{i2} \xrightarrow{\text{Matrix}} \text{3. Spalte .}$$

Dem Kronecker-delta entspricht in der Matrixdarstellung die Einheitsmatrix. Folglich ist (5.2) in Matrixdarstellung

$$\left(A^{ij}\right) = \left(A^{ij}\right) \cdot \mathbb{1} = \left(A^{i1} \mid A^{i2} \mid A^{i3}\right) = \left(A^{ik}\right) \quad \text{mit } k = 1, 2, 3 \, .$$

- **Herauf- und Herunterziehen von Indizes**

  Mit dem kovarianten Metriktensor können kontravariante in kovariante Komponenten umgewandelt werden, d. h. hochgestellte (kontravariante) Indizes heruntergezogen werden:

  $$g_{ij}\,V^j = V_i \, , \qquad g_{ij}\,A^{jk} = A_i{}^k \, . \tag{5.3}$$

  Umgekehrt können mit dem kontravarianten Metriktensor kovariante in kontravariante Komponenten umgewandelt werden, d. h. tiefgestellte (kovariante) Indizes heraufgezogen werden:

  $$g^{ij}\,V_j = V^i \, , \qquad g^{ij}\,A_{jk} = A^i{}_k \, . \tag{5.4}$$

  Mit dem entsprechenden Metriktensor kann also zwischen der ko- und der kontravarianten Darstellung gewechselt (umgerechnet) werden.

- Jeder Index an einem Tensor braucht einen „Aufzugsschacht“ zum Herauf- und Herunterziehen:

  $$T_i{}^j \longrightarrow T\Big|^{\uparrow}_{i}\Big|^{j}_{\downarrow}\Big| \, .$$

  Deshalb müssen die Indizes in der Horizontalen gegeneinander versetzt stehen. Eine Ausnahme von dieser Regel darf man aus Bequemlichkeit z. B. beim symmetrischen und zu sich selbst inversen Kronecker-delta machen, denn es gilt (entsprechend der Einheitsmatrix)

  $$\delta_i{}^j \equiv \delta^i{}_j \equiv \delta_j{}^i \equiv \delta^j{}_i \equiv \delta_i^j \equiv \delta_j^i \, .$$

- Definition: **Riemann'scher Raum** (kurz Riemann-Raum)

  Der Riemann'sche Raum ist eine Mannigfaltigkeit, auf der das Tensorfeld des Metriktensors $\left(g_{ij}\right)$ definiert ist und in der die Bogenlänge Δs zwischen einem Anfangspunkt a und einem Endpunkt e gegeben ist durch

  $$\Delta s = \int\limits_{t_a}^{t_e} \sqrt{g_{ij}\,\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}}\;\mathrm{d}t \, .$$

  Der Riemann'sche Raum ist also ein Raum mit Abstandsbegriff, wobei die Metrik des Riemann'schen Raums, d. h. die Riemann'sche Metrik durch den Metriktensor $\left(g_{ij}\right)$ festgelegt wird und die Struktur des Raums definiert.

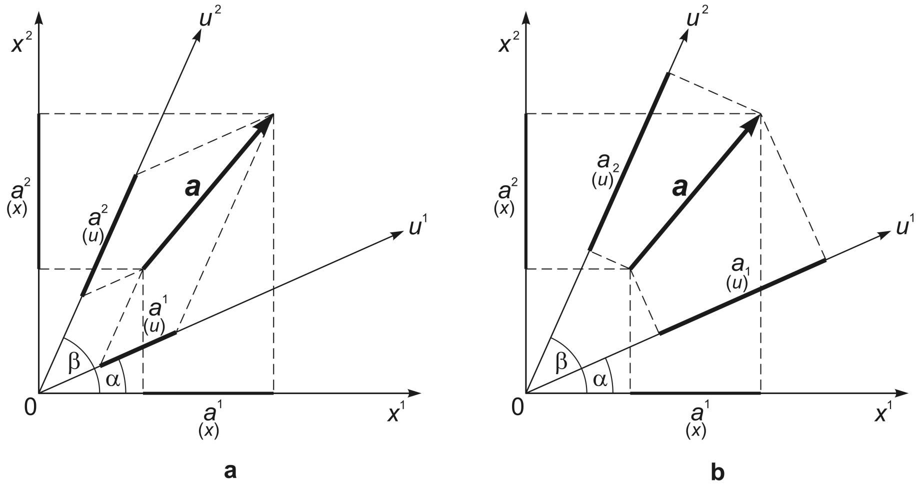


Abb. 5.1 Darstellungsmöglichkeiten eines Vektors $\vec{a}$ im zweidimensionalen schiefwinklig-geradlinigen Koordinatensystem $U := \{u^1, u^2\}$. Als Referenz dient das kartesische Koordinatensystem $X := \{x^1, x^2\}$.

a Durch **Parallelprojektion** auf die Koordinatenachsen u^1 und u^2 erhält man die kontravarianten Vektorkomponenten a^1 und a^2 in U. Die Projektion erfolgt parallel zu den Achsen u^1 und u^2.

b Durch **Orthogonalprojektion** (auch Normalprojektion genannt) auf die Koordinatenachsen u^1 und u^2 erhält man die kovarianten Vektorkomponenten a_1 und a_2 in U. Man beachte, dass die **Skalierung** bzw. die graphische Länge der **Einheiten** der auf die Koordinatenachsen u^1 und u^2 orthogonal projizierten kovarianten Vektorkomponenten die **gleiche** ist wie die der kontravarianten Vektorkomponenten in Abbildung 5.1 a.

5.2 Darstellung von Vektoren in der kovarianten Basis

Ausgehend von der Beziehung $x^i = x^i(u^k)$ kann man für den infinitesimalen Abstandsvektor $\mathrm{d}\vec{x}$ das totale Differential

$$\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}x^i \cdot \vec{e}_i = \underbrace{\frac{\partial x^i(u^k)}{\partial u^k}\,\mathrm{d}u^k}_{=\mathrm{d}x^i} \cdot \vec{e}_i \tag{5.5}$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\vec{e}_i}\cdot \mathrm{d}u^k \tag{5.6}$$

$$= \vec{g}_k \cdot \mathrm{d}u^k = \mathrm{d}\vec{u}\,. \tag{5.7}$$

schreiben. Die $\frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\mathrm{d}u^k$ sind dabei die Koordinatendifferentiale oder Vektorkomponenten $\mathrm{d}x^i$ des infinitesimalen Abstandsvektors $\mathrm{d}\vec{x}$ in Richtung der kartesischen Basis-Einheitsvektoren $\vec{e}_i$. Außerdem sieht man an

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\mathrm{d}u^k \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}u^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i\,, \tag{5.8}$$

dass sich die Koordinatendifferentiale kontravariant transformieren.

Die **holonomen kovarianten Basisvektoren** $\vec{g}_k$, also

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial u^1}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^1}\,\vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^1}\,\vec{e}_3 \ , \\
\vec{g}_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\,\vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\,\vec{e}_3 \ , \\
\vec{g}_3 &= \frac{\partial x^1}{\partial u^3}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^3}\,\vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^3}\,\vec{e}_3 \ ,
\end{aligned}$$

sind die **Tangentenvektoren** an die Koordinatenlinien von U (aber dargestellt in der Basis von X), also in Richtung der Koordinatenlinien u^k (lokal) am Ort des infinitesimalen Abstandsvektors $\mathrm{d}\vec{x}$. Die Multiplikation der $\vec{g}_k$ mit den zugehörigen Abstandsdifferentialen $\mathrm{d}u^k$ und die anschließende Vektoraddition gemäß

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 \cdot \mathrm{d}u^1 + \vec{g}_2 \cdot \mathrm{d}u^2 + \vec{g}_3 \cdot \mathrm{d}u^3 = \vec{g}_k \cdot \mathrm{d}u^k &= \mathrm{d}u^k \cdot \vec{g}_k \\
&= \mathrm{d}x^i \cdot \vec{e}_i = \mathrm{d}\vec{x}
\end{aligned}$$

liefert schließlich, wie man sieht, den infinitesimalen Abstandsvektor $\mathrm{d}\vec{x}$. Voraussetzung für die Berechnung von $\mathrm{d}\vec{x}$ in X ist aber die Kenntnis der Funktion $x^i(u^k)$ und der $\mathrm{d}u^k$ in U (entsprechend $U \mapsto X$).

Setzen wir für den infinitesimalen Abstandsvektors $\mathrm{d}\vec{x}$ einen beliebigen Vektor $\vec{a}$, so gilt am Ort von $\mathrm{d}\vec{x}$ im Vergleich mit (5.5) bis (5.8)

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \overbrace{\underset{(x)}{a^i}}\cdot \vec{e}_i \\
\vec{a} &= \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\underset{(u)}{a^k} \cdot \vec{e}_i \qquad (5.9) \\
\Rightarrow \quad \underset{(x)}{a^i} &= \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\underset{(u)}{a^k} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underset{(u)}{a^k} = \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\,\underset{(x)}{a^i} \ .
\end{aligned}$$

Aus (5.9) folgt die Darstellung des Vektors $\vec{a}$ durch seine kontravarianten Komponenten $\underset{(u)}{a^k}$:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\vec{e}_i} \cdot \underset{(u)}{a^k} \\
\vec{a} &= \quad \vec{g}_k \ \cdot \ \underset{(u)}{a^k} \ .
\end{aligned}$$

Die $\underset{(u)}{a^k}$ sind die kontravarianten Komponenten des Vektors $\vec{a}$ (s. Abb. 5.1 a) mit der zugehörigen kovarianten Basis $\{\vec{g}_k\}$ von U .[6] Die kovarianten Basisvektoren

$$\vec{g}_k = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\vec{e}_i$$

zeigen die kovarianten Transformationseigenschaften und sind Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien u^k , also kollinear zu den Koordinatenachsen. Deshalb

[6] Im Gegensatz zur kanonischen Basis $\{\vec{e}_i\}$ sind Basisvektoren im Allgemeinen nicht normiert.

bezeichnet man den von der Basis $\{\vec{g}_k\}$ aufgespannten Vektorraum auch als **Tangentialraum**. Die Basisvektoren $\vec{g}_k$ wurden hier wieder mit Hilfe der kartesischen Basis $\{\vec{e}_i\}$ dargestellt.

Das Skalarprodukt

$$\vec{g}_k \cdot \vec{g}_l = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\vec{e}_i \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^l}\,\vec{e}_j = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\frac{\partial x^j}{\partial u^l}\,\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\frac{\partial x^j}{\partial u^l}\,\delta_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\frac{\partial x^i}{\partial u^l} \equiv g_{kl}\;,$$

$$\vec{g}_k \cdot \vec{g}_l = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\frac{\partial x^i}{\partial u^l} \equiv g_{kl} \tag{5.10}$$

aus den kovarianten Basisvektoren liefert die Komponenten g_{kl} des (**kovarianten**) **metrischen Tensors** des Koordinatensystems U (bezüglich X). In Matrixschreibweise und vereinfacht auf zwei Dimensionen ist der (kovariante) metrische Tensor

$$\begin{aligned}
\big(g_{kl}\big) &= (\vec{g}_1\,,\;\vec{g}_2)^{\mathrm{T}} \cdot (\vec{g}_1\,,\;\vec{g}_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \\
\big(g_{kl}\big) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + \frac{\partial x^2}{\partial u^1}\frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + \frac{\partial x^2}{\partial u^1}\frac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix}\;.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

5.3 Darstellung von Vektoren in der kontravarianten Basis

Wir werden jetzt eine andere Basis, die holonome kontravariante Basis $\{\vec{g}^k\}$, im Koordinatensystem U zur Darstellung des Vektors $\vec{a}$ entwickeln. Dafür betrachten wir die Koordinaten $u^1(x^1,\, x^2,\, x^3)$, $u^2(x^1,\, x^2,\, x^3)$ und $u^3(x^1,\, x^2,\, x^3)$ jeweils für sich als skalares Feld. Für diese drei Felder (bzw. Koordinaten) erhalten wir die **Gradienten**

$$\begin{aligned}
\nabla u^1(x^1,\, x^2,\, x^3) &= \frac{\partial u^1}{\partial x^1}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^2}\,\vec{e}_2 + \frac{\partial u^1}{\partial x^3}\,\vec{e}_3 = \frac{\partial u^1}{\partial x^i}\,\vec{e}_i = \vec{g}^1 \ , \\
\nabla u^2(x^1,\, x^2,\, x^3) &= \frac{\partial u^2}{\partial x^1}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\,\vec{e}_2 + \frac{\partial u^2}{\partial x^3}\,\vec{e}_3 = \frac{\partial u^2}{\partial x^i}\,\vec{e}_i = \vec{g}^2 \ , \\
\nabla u^3(x^1,\, x^2,\, x^3) &= \frac{\partial u^3}{\partial x^1}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial u^3}{\partial x^2}\,\vec{e}_2 + \frac{\partial u^3}{\partial x^3}\,\vec{e}_3 = \frac{\partial u^3}{\partial x^i}\,\vec{e}_i = \vec{g}^3 \ .
\end{aligned}$$

Damit haben wir schon die **holonomen kontravarianten Basisvektoren**

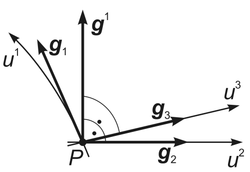
$$\vec{g}^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\,\vec{e}_i$$

für die kontravariante Basis $\{\vec{g}^k\}$ gefunden. Wegen der Identität $\vec{e}_i \equiv \vec{e}^{\,i}$ schreiben wir konsistent mit dem Tensorkalkül

$$\vec{g}^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\,\vec{e}^{\,i} \ ,$$

wodurch die für einen kontravarianten Basisvektor typische Transformationseigenschaft noch deutlicher wird. Die kontravarianten Basisvektoren $\vec{g}^k$ stehen senkrecht (normal) auf den Koordinatenflächen, gebildet von den Koordinatenlinien u^l , $l \neq k$. Anders gesagt, die kontravarianten Basisvektoren $\vec{g}^k$ sind **Normalenvektoren** (kurz Normalvektoren) auf den Koordinatenflächen mit $k = \text{const}$ (Niveauflächen).

Der **Gradient eines skalaren Feldes** steht stets senkrecht auf denjenigen Flächen in diesem Feld, die von gleichen Skalarwerten gebildet werden. Derartige Flächen werden auch Niveauflächen genannt. Außerdem zeigt der Gradient immer in die Richtung der größten Änderung des Skalars (siehe Abbildung 5.2). Die nebenstehende Abbildung stehe beispielhaft für ein (u^1, u^2, u^3)-Koordinatensystem mit gekrümmten u^1- aber geraden u^2- und u^3-Koordinatenlinien. Außerdem durchstoße die u^1-Koordinatenlinie im Punkt P die von u^2 und u^3 aufgespannte Ebene *nicht orthogonal*. Alle von u^2 und u^3 aufgespannten Ebenen seien *komplanar*. Die Koordinatenwerte u^1 können wir als **Skalarfeld** $u^1(x^1,\, x^2,\, x^3)$ betrachten. Halten wir jetzt u^1 an einem bestimmten Wert P fest, variieren aber die beiden anderen, durch den Punkt P verlaufenden Koordinaten u^2 und u^3, so erhalten wir eine (u^2, u^3)-Fläche (Niveaufläche) mit konstantem u^1-Wert.



Diese Argumentation gilt analog auch für die skalaren Felder $u^2(x^1,\, x^2,\, x^3)$ und $u^3(x^1,\, x^2,\, x^3)$. Dabei ist zu berücksichtigen, dass gerade Koordinatenlinien Niveauebenen und gekrümmte Koordinatenlinien gekrümmte Niveauflächen aufspannen.

Man kann sich überlegen, dass der Gradient einer Koordinate allgemein und insbesondere bei schiefwinkligen Koordinatensystemen nicht in die Richtung der zugehörigen Koordinatenlinie zeigt (siehe nebenstehende Abbildung). Genauer gesagt, die

Richtung des Gradienten einer Koordinate stimmt allgemein nicht überein mit der Richtung der Tangenten an diejenigen Koordinatenlinien, die von dieser Koordinate gebildet werden. In unserem Beispiel ist also der Gradient $\vec{g}^1$ der Koordinate u^1 im Punkt P nicht parallel zum Basisvektor $\vec{g}_1$ bzw. zur Tangente an die Koordinatenlinie u^1 im Punkt P, sondern steht senkrecht auf der von u^2 und u^3 aufgespannten Niveauebene durch P.

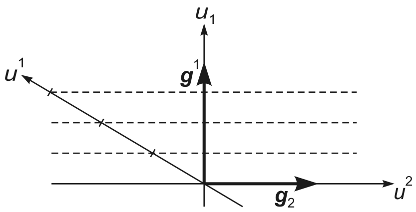


Abb. 5.2 Zweidimensionale Darstellung in Analogie zur vorherigen Abbildung, denn die Darstellung von u^3 und $\vec{\boldsymbol{g}}_3$ wurde unterdrückt. Außerdem wurde die Koordinatenlinie u^1 aus Bequemlichkeit gerade gezeichnet. Der kontravariante Basisvektor $\vec{\boldsymbol{g}}^{\,1} = \operatorname{grad} u^1$ steht senkrecht auf dem kovarianten Basisvektor $\vec{\boldsymbol{g}}_2$ (und auf dem kovarianten Basisvektor $\vec{\boldsymbol{g}}_3$) und zeigt in die Richtung der größten Änderung von u^1. Die Richtung der größten Änderung ist die Richtung, in der die (gestrichelten) Niveaulinien (bzw. die Niveauflächen) am dichtesten beieinander liegen.

Damit wird deutlich, dass der Gradient und kontravariante Basisvektor $\vec{g}^1$ nur bei orthogonalen Koordinatensystemen wie beispielsweise dem Kugelkoordinatensystem nicht nur senkrecht steht auf den kovarianten Basisvektoren $\vec{g}_2$ und $\vec{g}_3$, sondern auch in die gleiche Richtung zeigt wie der kovariante Basisvektor $\vec{g}_1$. Das bedeutet

$$\textbf{allgemein}: \qquad \vec{\boldsymbol{g}}_k \nparallel \vec{\boldsymbol{g}}^{\,k}\,,$$

$$\textbf{in orthogonalen Koordinatensystemen}: \qquad \vec{\boldsymbol{g}}_k \upuparrows \vec{\boldsymbol{g}}^{\,k}\,.$$

Außerdem gilt

$$\textbf{allgemein}: \qquad \left|\vec{\boldsymbol{g}}_k\right| \neq \left|\vec{\boldsymbol{g}}^{\,k}\right|,$$

$$\textbf{für geradlinige orthogonale Koordinaten}: \qquad \left|\vec{\boldsymbol{g}}_k\right| = \left|\vec{\boldsymbol{g}}^{\,k}\right|.$$

So stimmen beispielsweise in dem teilweise krummlinigen aber orthogonalen Kugelkoordinatensystem nur die Längen der holonomen Basisvektoren bezüglich der (geraden) radialen Koordinate r überein, nämlich $\left|\vec{\boldsymbol{g}}_r\right| = \left|\vec{\boldsymbol{g}}^{\,r}\right| = 1$.

Mit seinen kovarianten Komponenten $\underset{(u)}{a}_k$ stellt sich dann der Vektor $\vec{a}$ (s. Abb. 5.1 b) wie folgt dar:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \underset{(u)}{a}_1 \cdot \vec{g}^1 + \underset{(u)}{a}_2 \cdot \vec{g}^2 + \underset{(u)}{a}_3 \cdot \vec{g}^3 \\
&= \underset{(u)}{a}_k \cdot \vec{g}^k \\
&= \underbrace{\underset{(u)}{a}_k \cdot \frac{\partial u^k}{\partial x^i}}\, \vec{e}^i \\
&= \quad \underset{(x)}{a}_i \cdot \vec{e}^i
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{(x)}{a}_i = \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\, \underset{(u)}{a}_k \qquad \Leftrightarrow \qquad \underset{(u)}{a}_k = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\, \underset{(x)}{a}_i\,. \tag{5.12}$$

Jetzt zeigen wir, dass sich die Komponenten des Gradienten $\vec{b}$ eines skalaren Feldes $\Phi(u^1, u^2, u^3)$ wie kovariante Vektorkomponenten transformieren. Für denselben Punkt $P(u^1, u^2, u^3) \equiv P(u^{1'}, u^{2'}, u^{3'})$ in den beiden verschiedenen Koordinatensystemen U und U' ist auch der Skalar Φ gleich dem Skalar Φ' (s. Abschn. 3.1) gemäß

$$\Phi(u^1, u^2, u^3) \equiv \Phi'(u^{1'}, u^{2'}, u^{3'}) \ ,$$

sodass man für die Transformation der Vektorkomponenten $b_k = \frac{\partial \Phi}{\partial u^k}$ des Gradienten von U nach U' folgendes erhält:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi'(u^{1'}, u^{2'}, u^{3'})}{\partial u^{k'}} &= \frac{\partial \Phi(u^1, u^2, u^3)}{\partial u^{k'}} \\
&= \frac{\partial \Phi(u^1, u^2, u^3)}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \\
&= \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \cdot \frac{\partial \Phi(u^1, u^2, u^3)}{\partial u^k} \\
\underset{(u')}{b}{}_{k'} &= \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \cdot \underset{(u)}{b}{}_k \ . \ \square
\end{aligned}$$

Wie wir sehen, ist der Gradient, genauer gesagt, sind die Komponenten des Gradienten eines skalaren Feldes kovariant.

Das Skalarprodukt

$$\vec{g}^k \cdot \vec{g}^l = \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \vec{e}^i \cdot \frac{\partial u^l}{\partial x^j} \vec{e}^j = \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j = \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} \delta_{ij} = \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^i} \equiv g^{kl} \ ,$$

$$\vec{g}^k \cdot \vec{g}^l = \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^i} \equiv g^{kl} \tag{5.13}$$

aus den kontravarianten Basisvektoren liefert die Komponenten g^{kl} des **inversen** bzw. **kontravarianten metrischen Tensors** des Koordinatensystems U (bezüglich X). In Matrixschreibweise und vereinfacht auf zwei Dimensionen ist der kontravariante metrische Tensor

$$\begin{aligned}
\left(g^{kl}\right) &= \left(\vec{g}^1 \, , \ \vec{g}^2\right)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\vec{g}^1 \, , \ \vec{g}^2\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \\
\left(g^{kl}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1}\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x^2}\frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^1}{\partial x^1}\frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x^2}\frac{\partial u^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1}\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial x^1}\frac{\partial u^2}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \ .
\end{aligned} \tag{5.14}$$

5.3.1 Erste alternative Herleitung der kontravarianten Basis

Nach: YouTube – VT I -04 Ko- und kontravariante Vektorbasen – Prof. Dr. Paul Wagner, Universität Wien.

Die kovariante Basis $\{\vec{\boldsymbol{g}}_i\}$ sei vorgegeben. Weiterhin sollen die kontravarianten Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}^{\,i}$ senkrecht auf den von den kovarianten Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}_i$ aufgespannten Ebenen stehen. Daraus ergeben sich die (**kommutativen**) Skalarprodukte wie beispielsweise

$$\vec{\boldsymbol{g}}^{\,3} \perp \vec{\boldsymbol{g}}_1, \vec{\boldsymbol{g}}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{g}}^{\,3} \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_1 = 0 \quad \wedge \quad \vec{\boldsymbol{g}}^{\,3} \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_2 = 0 \quad \wedge \quad \vec{\boldsymbol{g}}^{\,3} \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_3 \stackrel{!}{=} 1 \, .$$

In allgemeiner Form lautet also die **implizite Bedingung** für die kontravarianten Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}^{\,i}$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{g}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{g}}^{\,j} \; = \; \delta_i^{\;j} \; = \; g_i^{\;j} \; \widehat{=} \; \text{Einheitsmatrix } \mathbb{1}} \, . \tag{5.15}$$

Die $\delta_i^{\;j} = \delta^j_i$ sind die gemischten Komponenten $g_i^{\;j} = g^j_i$ eines Metriktensors. $g_i^{\;j} = g^j_i$ wird oft auch gemischter Metriktensor genannt. Weil man den Metriktensor auch als quadratische Matrix schreiben kann, gilt damit folgendes:

> Das Matrizenprodukt der Matrix der Komponenten des kovarianten Metriktensors mal der Matrix der Komponenten des kontravarianten Metriktensors ist gleich der Einheitsmatrix und damit symmetrisch, weil die darin enthaltenen Skalarprodukte der Basisvektoren kommutativ sind.

Zur Bestimmung der kontravarianten Basisvektoren machen wir ausgehend von den vorgegebenen kovarianten Basisvektoren und mit der „Koeffizientenmatrix“ A^{ij} den folgenden **Ansatz**:

$$\vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \; = \; A^{ij} \, \vec{\boldsymbol{g}}_j \, . \tag{5.16}$$

Ausformuliert ist (5.16)

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,1} \; &= \; A^{11} \, \vec{\boldsymbol{g}}_1 \, + \, A^{12} \, \vec{\boldsymbol{g}}_2 \, + \, A^{13} \, \vec{\boldsymbol{g}}_3 \, , \\ \vec{\boldsymbol{g}}^{\,2} \; &= \; A^{21} \, \vec{\boldsymbol{g}}_1 \, + \, A^{22} \, \vec{\boldsymbol{g}}_2 \, + \, A^{23} \, \vec{\boldsymbol{g}}_3 \, , \\ \vec{\boldsymbol{g}}^{\,3} \; &= \; A^{31} \, \vec{\boldsymbol{g}}_1 \, + \, A^{32} \, \vec{\boldsymbol{g}}_2 \, + \, A^{33} \, \vec{\boldsymbol{g}}_3 \, . \end{aligned}$$

Jetzt multiplizieren wir (5.16) mit $\vec{\boldsymbol{g}}^{\,k}$ und erhalten mit (5.15) sowie mit der Regel vom Austausch der Indizes

$$\vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \cdot \vec{\boldsymbol{g}}^{\,k} \; = \; g^{ik} \; = \; A^{ij} \vec{\boldsymbol{g}}_j \cdot \vec{\boldsymbol{g}}^{\,k} \; = \; A^{ij} \, \delta_j^{\;k} \; = \; A^{ik} \quad \Rightarrow$$

$$A^{ik} \; = \; g^{ik} \, .$$

Damit bekommt (5.16) die Form

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \; = \; g^{ij} \, \vec{\boldsymbol{g}}_j} \, , \tag{5.17}$$

womit wir das Problem gelöst hätten, vorausgesetzt wir können zeigen, dass g^{ij} die Inverse zu g_{ij} ist. Die Komponenten des kovarianten Metriktensors g_{ij} sind nämlich die leicht zu berechnenden Skalarprodukte der vorgegebenen kovarianten Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}_i$. Weiterhin lässt sich g_{ij} dann als quadratische Matrix $M = \big(g_{ij}\big)$ schreiben. Und zu jeder quadratischen Matrix M gibt es höchstens eine inverse Matrix M^{-1}, die auf der Grundlage von $M \cdot M^{-1} = \mathbb{1}$ bestimmt werden kann.

Also zeigen wir, dass g^{ij} tatsächlich die Inverse zu g_{ij} ist:

Analog zu (5.17) erhält man

$$\vec{\boldsymbol{g}}_k = g_{kl}\,\vec{\boldsymbol{g}}^{\,l} \tag{5.18}$$

und damit sowie mit (5.15) schließlich

$$\begin{aligned} \delta^i_{\ k} = \vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_k &= g^{ij}\,\vec{\boldsymbol{g}}_j \cdot g_{kl}\,\vec{\boldsymbol{g}}^{\,l} \\ &= g^{ij} g_{kl}\,\vec{\boldsymbol{g}}_j \cdot \vec{\boldsymbol{g}}^{\,l} = g^{ij} g_{kl}\,\delta_j^{\ l} = g^{ij} g_{kj} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\delta^i_{\ k} = g^{ij} g_{jk} = g^i_{\ k} \mathrel{\widehat{=}} \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad g^{ij} \ \text{invers zu} \ g_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \big(g^{ij}\big) = \big(g_{ij}\big)^{-1}\,. \ \square$$

Ist eine Vektorbasis vorgegeben, kann man aus ihr die andere, dazu inverse Vektorbasis berechnen.

Beispiel in der von $\vec{\boldsymbol{e}}_1$ und $\vec{\boldsymbol{e}}_2$ aufgespannten Ebene:

Vorgegeben sind die kovarianten Basisvektoren

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{g}}_1 &= \vec{\boldsymbol{e}}_1 & &\Rightarrow & |\vec{\boldsymbol{g}}_1| &= 1\,, \\ \vec{\boldsymbol{g}}_2 &= \vec{\boldsymbol{e}}_1 + \vec{\boldsymbol{e}}_2 & &\Rightarrow & |\vec{\boldsymbol{g}}_2| &= \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Darstellung der Komponenten des kovarianten Metriktensors als Matrix:

$$\big(g_{ij}\big) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Invertieren der Matrix $\big(g_{ij}\big)$ liefert

$$\big(g^{ij}\big) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie man sieht, sind $\big(g_{ij}\big)$ und $\big(g^{ij}\big)$ symmetrisch. Jetzt können wir die kontravarianten Basisvektoren angeben:

$$\vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} = g^{ij}\,\vec{\boldsymbol{g}}_j \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,1} &= g^{11}\vec{\boldsymbol{g}}_1 + g^{12}\vec{\boldsymbol{g}}_2 = 2\vec{\boldsymbol{g}}_1 - \vec{\boldsymbol{g}}_2 = 2\vec{\boldsymbol{e}}_1 - \vec{\boldsymbol{e}}_1 - \vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{e}}_1 - \vec{\boldsymbol{e}}_2\,, \\ \vec{\boldsymbol{g}}^{\,2} &= g^{21}\vec{\boldsymbol{g}}_1 + g^{22}\vec{\boldsymbol{g}}_2 = -\vec{\boldsymbol{g}}_1 + \vec{\boldsymbol{g}}_2 = -\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \vec{\boldsymbol{e}}_1 + \vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{e}}_2\,. \end{aligned}$$

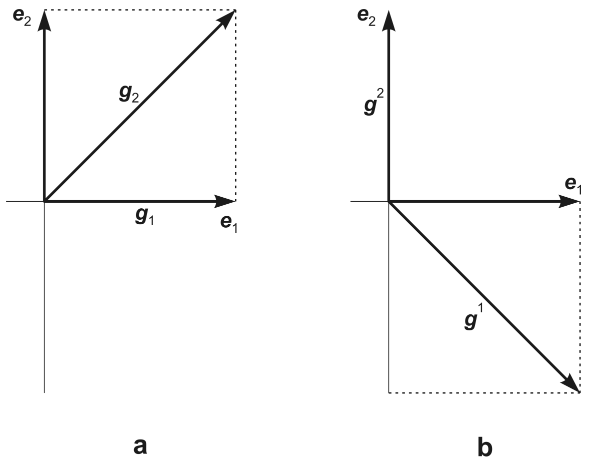


Abb. 5.3 Darstellung einer kovarianten Basis und der dazu gehörenden kontravarianten Basis in der von der kartesischen Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ aufgespannten Ebene:
a kovariante Basisvektoren: $\vec{g}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{g}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$,
b kontravariante Basisvektoren: $\vec{g}^{\,1} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{g}^{\,2} = \vec{e}_2$.
Man erkennt, dass $\vec{g}^{\,1}$ senkrecht auf $\vec{g}_2$ und dass $\vec{g}^{\,2}$ senkrecht auf $\vec{g}_1$ steht.

5.3.2 Zweite alternative Herleitung der kontravarianten Basis

Wir zeigen jetzt eine weitere alternative Herleitung[7] der kontravarianten Basis $\{\vec{g}^k\}$ im $\mathbb{R}^3$ und gehen wieder aus von der Darstellung des infinitesimalen Abstandsvektors $\mathrm{d}\vec{x}$ in der kovarianten Basis $\{\vec{g}_k\}$ entsprechend (5.5) bis (5.7):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{x} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \\ &= \vec{g}_1 \cdot \mathrm{d}u^1 + \vec{g}_2 \cdot \mathrm{d}u^2 + \vec{g}_3 \cdot \mathrm{d}u^3 \\ \\ \mathrm{d}\vec{x} &= \vec{g}_k \cdot \mathrm{d}u^k \ . \end{aligned}$$

Die kovarianten Basisvektoren sind also wieder

$$\vec{g}_k = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^k} = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\vec{e}_i \ .$$

Weil das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) aus den beiden kovarianten Basisvektoren $\vec{g}_l$ und $\vec{g}_m$ einen Vektor liefert, der senkrecht auf der von $\vec{g}_l$ und $\vec{g}_m$ aufgespannten Ebene steht, also allgemein nicht parallel zum dritten kovarianten Basisvektor $\vec{g}_k$ verläuft, können wir die kontravarianten Basisvektoren wie folgt definieren:

$$\vec{g}^{\,1} = \frac{\vec{g}_2 \times \vec{g}_3}{v} \ , \quad \vec{g}^{\,2} = \frac{\vec{g}_3 \times \vec{g}_1}{v} \ , \quad \vec{g}^{\,3} = \frac{\vec{g}_1 \times \vec{g}_2}{v} \ , \tag{5.19}$$

bzw.

$$\vec{g}^{\,k} = \frac{\vec{g}_l \times \vec{g}_m}{v} \quad (k \neq l \neq m \ \text{ bilden zyklische Vertauschungen}) \ .$$

[7] Henry Margenau und George Moseley Murphy, Die Mathematik für Physik und Chemie, Band I, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 2. Aufl., Leipzig, 1964, Abschnitt 5.16 Tensorbeziehungen in krummlinigen Koordinaten, Seite 242 bis Seite 246.

Hier ist v das Spatprodukt

$$v = \vec{g}_1 \cdot (\vec{g}_2 \times \vec{g}_3) = \vec{g}_2 \cdot (\vec{g}_3 \times \vec{g}_1) = \vec{g}_3 \cdot (\vec{g}_1 \times \vec{g}_2) = \left[\vec{g}_1\ \vec{g}_2\ \vec{g}_3\right] .$$

Wie wir sehen, gilt wieder

$$\vec{g}^k \cdot \vec{g}_l = \delta_l^k , \tag{5.20}$$

denn

$$(\vec{g}_l \times \vec{g}_m) \parallel \vec{g}^k \perp \vec{g}_l , \quad \vec{g}^k \cdot \vec{g}_k = \frac{\vec{g}_l \times \vec{g}_m}{v} \cdot \vec{g}_k = \frac{v}{v} = 1 .$$

Umgekehrt gilt aber auch

$$\vec{g}_1 = \frac{\vec{g}^2 \times \vec{g}^3}{\tilde{v}} , \quad \vec{g}_2 = \frac{\vec{g}^3 \times \vec{g}^1}{\tilde{v}} , \quad \vec{g}_3 = \frac{\vec{g}^1 \times \vec{g}^2}{\tilde{v}} , \tag{5.21}$$

mit

$$\tilde{v} = \left[\vec{g}^1\ \vec{g}^2\ \vec{g}^3\right] , \quad v \cdot \tilde{v} = 1 ,$$

was man z. B. durch Einsetzen von (5.19) in (5.21) und unter Verwendung von

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \vec{b}\left[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{d}\,\right] - \vec{a}\left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}\,\right]$$

zeigen kann. Die holonomen Basen $\{\vec{g}^k\}$ und $\{\vec{g}_k\}$ sind also im Sinne von (5.20) zueinander invers. Das heißt aber nicht, dass die Normen (Längen) der korrespondierenden ko- und kontravarianten Basisvektoren zueinander reziprok sein müssen, denn dies ist nur bei orthogonalen Koordinatensystemen der Fall.

Wenn wir berücksichtigen, dass Vektoren immer auch in der Standardbasis, also bezüglich der kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ dargestellt werden können, lässt sich diese alternative Herleitung der kontravarianten Basis auf n-dimensionale Räume ($n \geq 2$) verallgemeinern. Das n-dimensionale Vektor- bzw. Kreuzprodukt ist nämlich

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vec{e}_2 & a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n & a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

und das n-dimensionale „Spatprodukt“ ist

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1}) \cdot \vec{a}_n = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} . \tag{5.23}$$

Man entnimmt (5.22) und (5.23) sofort den gewohnten dreidimensionalen Fall.

5.4 Synopse: Holonome ko- und kontravariante Vektorbasen und Vektorkomponenten

Synopse
zur Entwicklung der holonomen ko- und kontravarianten Basis und der holonomen kontra- und kovarianten Vektorkomponenten

---

- **holonome kovariante Basis** $\{\vec{\boldsymbol{g}}_k\}$

Die kovarianten Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}_k$ sind Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien u^k von U. Die Basis $\{\vec{\boldsymbol{g}}_k\}$ spannt folglich einen sog. **Tangentialraum** auf.
Konstruktion durch **Orthogonalprojektion** der $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ auf die Koordinatenachse bzw. Koordinatenlinie u^k gemäß

$$\vec{\boldsymbol{g}}_k \;=\; \frac{\partial x^1}{\partial u^k}\,\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^k}\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^k}\,\vec{\boldsymbol{e}}_3 \;=\; \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\vec{\boldsymbol{e}}_i\ .$$

- **holonome kontravariante Vektorkomponenten** $\mathrm{d}u^k$

Konstruktion durch **Parallelprojektion** von $\vec{\boldsymbol{a}} = \mathrm{d}x^1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \mathrm{d}x^2\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \mathrm{d}x^3\vec{\boldsymbol{e}}_3$ auf die Koordinatenachse bzw. Koordinatenlinie u^k gemäß

$$\mathrm{d}u^k \;=\; \frac{\partial u^k}{\partial x^1}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial u^k}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial u^k}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^3 \;=\; \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i\ .$$

- **holonome kontravariante Basis** $\{\vec{\boldsymbol{g}}^{\,k}\}$

Die kontravarianten Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}^k$ entsprechen den Gradienten der Koordinatenfunktionen $u^k(x^1, x^2, x^3)$. Demzufolge stehen die $\vec{\boldsymbol{g}}^k$ senkrecht (normal) auf den von den Koordinatenlinien u^l $(l \neq k)$ aufgespannten Koordinatenflächen bzw. senkrecht auf den kovarianten Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}_l$ $(l \neq k)$ und zeigen in die Richtung der stärksten Änderung von u^k.
Konstruktion gemäß

$$\vec{\boldsymbol{g}}^k \;=\; \frac{\partial u^k}{\partial x^1}\,\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\partial u^k}{\partial x^2}\,\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\partial u^k}{\partial x^3}\,\vec{\boldsymbol{e}}_3 \;=\; \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\,\vec{\boldsymbol{e}}_i \;=\; \nabla u^k(\vec{\boldsymbol{x}})\ .$$

- **holonome kovariante Vektorkomponenten** $\mathrm{d}u_k$

Konstruktion durch **Orthogonalprojektion** von $\vec{\boldsymbol{a}} = \mathrm{d}x^1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + \mathrm{d}x^2\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \mathrm{d}x^3\vec{\boldsymbol{e}}_3$ auf die Koordinatenachse bzw. Koordinatenlinie u^k gemäß

$$\mathrm{d}u_k \;=\; \frac{\partial x^1}{\partial u^k}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^k}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^k}\,\mathrm{d}x^3 \;=\; \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\mathrm{d}x^i\ .$$

5.5 Die Symmetrie des metrischen Tensors

Jeder Metriktensor ist symmetrisch, weil seine Komponenten Skalarprodukte der Basisvektoren sind und weil das Skalarprodukt kommutativ ist.

Wir zeigen dies am Beispiel des kovarianten Metriktensors:

$$\begin{aligned}
\big(g_{ij}\big) &= \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{g}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{g}}_2 \\ \vec{\boldsymbol{g}}_3 \end{pmatrix} \big(\vec{\boldsymbol{g}}_1 \,|\, \vec{\boldsymbol{g}}_2 \,|\, \vec{\boldsymbol{g}}_3\big) \\
&= \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{g}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_1 & \vec{\boldsymbol{g}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_2 & \vec{\boldsymbol{g}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_3 \\ \vec{\boldsymbol{g}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_1 & \vec{\boldsymbol{g}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_2 & \vec{\boldsymbol{g}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_3 \\ \vec{\boldsymbol{g}}_3\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_1 & \vec{\boldsymbol{g}}_3\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_2 & \vec{\boldsymbol{g}}_3\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{g}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_1 & \vec{\boldsymbol{g}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_2 & \vec{\boldsymbol{g}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_3 \\ \vec{\boldsymbol{g}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_2 & \vec{\boldsymbol{g}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_2 & \vec{\boldsymbol{g}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_3 \\ \vec{\boldsymbol{g}}_1\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_3 & \vec{\boldsymbol{g}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_3 & \vec{\boldsymbol{g}}_3\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_3 \end{pmatrix} \qquad (5.24) \\
&= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Dargestellt in kartesischen Koordinaten und reduziert auf den $\mathbb{R}^2$ ergibt das

$$\begin{aligned}
\big(g_{ij}\big) &= \begin{pmatrix} \vec{\boldsymbol{g}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{g}}_2 \end{pmatrix} \big(\vec{\boldsymbol{g}}_1 \,|\, \vec{\boldsymbol{g}}_2\big) = \begin{pmatrix} a\vec{\boldsymbol{e}}_1 + b\vec{\boldsymbol{e}}_2 \\ c\vec{\boldsymbol{e}}_1 + d\vec{\boldsymbol{e}}_2 \end{pmatrix} \big(a\vec{\boldsymbol{e}}_1 + b\vec{\boldsymbol{e}}_2 \,|\, c\vec{\boldsymbol{e}}_1 + d\vec{\boldsymbol{e}}_2\big) \\
&= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ca+db & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Dabei erkennen wir:

Die Hauptdiagonalelemente jedes Metriktensors sind gleich dem Längenquadrat der Basisvektoren.

Weiterhin gilt ausgehend von (5.15) und mit (5.17) sowie mit (5.18)

$$\delta^i{}_k = \vec{\boldsymbol{g}}^i\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_k = g^{ij}\vec{\boldsymbol{g}}_j\cdot g_{kl}\vec{\boldsymbol{g}}^l = g^{ij}g_{kl}\,\underbrace{\vec{\boldsymbol{g}}_j\cdot\vec{\boldsymbol{g}}^l} = g^{ij}g_{kl}\,\delta_j{}^l = g^{ij}g_{kj} ,$$

$$\boxed{g^{ij}g_{jk} = \delta^i{}_k \mathrel{\widehat{=}} \mathbb{1} \quad\Rightarrow\quad g^{ij} \text{ invers zu } g_{jk}} . \qquad (5.25)$$

Kovarianter und kontravarianter Metriktensor sind zueinander invers.

5.6 Beziehungen zwischen ko- und kontravarianter Darstellung

Wir haben jetzt folgende Darstellungen des Vektors $\vec{a}$ in X und U gefunden:

$$\vec{a} = \vec{e}_i \underset{(x)}{a}^i = \vec{e}^{\,i} \underset{(x)}{a}_i = \vec{g}_k \underset{(u)}{a}^k = \vec{g}^{\,l} \underset{(u)}{a}_l \;.$$

Ihr entnehmen wir, dass im kartesischen Koordinatensystem X wegen

$$\nabla x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\,\vec{e}^{\,j} = \delta^i_j\,\vec{e}^{\,j} = \vec{e}^{\,i}$$

sowohl die ko- und kontravarianten Basisvektoren als auch gemäß $a^i = a_i$ die ko- und kontravarianten Vektorkomponenten identisch sind. Weiterhin können wir mit Hilfe der Gleichung

$$\vec{g}_k \underset{(u)}{a}^k = \vec{g}^{\,l} \underset{(u)}{a}_l \tag{5.26}$$

die Beziehungen zwischen ko- und kontravarianten Basisvektoren und zwischen ko- und kontravarianten Vektorkomponenten zeigen. Dabei verwenden wir das Skalarprodukt aus je einem kovarianten und einem kontravarianten Basisvektor von U,

$$\vec{g}_k \cdot \vec{g}^{\,l} = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\,\vec{e}_i \cdot \frac{\partial u^l}{\partial x^j}\,\vec{e}_j = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\frac{\partial u^l}{\partial x^j}\,\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\frac{\partial u^l}{\partial x^j}\,\delta_{ij} = \frac{\partial u^l}{\partial u^k} = \delta^l_k \;, \tag{5.27}$$

$$\vec{g}_k \cdot \vec{g}^{\,l} = g_k{}^l = \delta^l_k \;, \tag{5.28}$$

was man durch Einsetzen leicht überprüfen kann. Jeweils als Matrix betrachtet und entsprechend ihrer zueinander inversen Transformationsmatrizen $\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)$ und $\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^k}\right)$ sind ko- und kontravariante Basisvektoren folglich zueinander invers und liefern als Falk'sches Produkt die Einheitsmatrix wie folgt:

$$\left(g_k{}^l\right) \;=\; \left(\vec{g}^{\,1}\,,\;\vec{g}^{\,2}\,,\;\vec{g}^{\,3}\right)^{\mathrm{T}} \;\cdot\; \left(\vec{g}_1\,,\;\vec{g}_2\,,\;\vec{g}_3\right) \;=\; \mathbb{1}\;, \tag{5.29}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^1} & \frac{\partial u^3}{\partial x^2} & \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(g_k{}^l\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^1} + \frac{\partial u^1}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + \frac{\partial u^1}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^2} + \frac{\partial u^1}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^2} & \frac{\partial u^1}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^3} + \frac{\partial u^1}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^3} + \frac{\partial u^1}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^2} & \frac{\partial u^2}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^3} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^3} + \frac{\partial u^2}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} + \frac{\partial u^3}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^1} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial u^3}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^2} & \frac{\partial u^3}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^3} + \frac{\partial u^3}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^3} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^3} \end{pmatrix} . \tag{5.30}$$

Darin ergibt z. B.

$$\left(\vec{g}^{\,3}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \vec{g}_2 \;=\; \frac{\partial u^3}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^2} = \frac{\partial u^3}{\partial u^2} = 0$$

und

$$\left(\vec{g}^2\right)^{\mathrm{T}} \cdot \vec{g}_2 = \left(\frac{\partial u^2}{\partial x^1}\vec{e}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\vec{e}_2 + \frac{\partial u^2}{\partial x^3}\vec{e}_3\right) \cdot \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\vec{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\vec{e}_3\right) \tag{5.31}$$

$$= \frac{\partial u^2}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^2} = \frac{\partial u^2}{\partial u^2} = 1\,. \tag{5.32}$$

Kürzen in (5.32) lieferte nicht 1 sondern 3. Die hierbei verwendete Notation $\frac{\partial u^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial u^i}$ könnte zum Kürzen verleiten. „Wildes Kürzen“ von Differentialen ist aber sogar für Physiker verboten.[8] Tatsächlich handelt es sich in diesem Fall „gleichsam“ um eine totale Ableitung mit der folgenden Analogie:[9]

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Phi\big(x^1(u^2),\, x^2(u^2),\, x^3(u^2)\big)}{\mathrm{d}u^2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}u^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}u^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3}\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}u^2}\,, \\
\Phi \equiv u^2 \quad \Rightarrow & \\
\frac{\mathrm{d}u^2\big(x^1(u^2),\, x^2(u^2),\, x^3(u^2)\big)}{\mathrm{d}u^2} &= \frac{\partial u^2}{\partial x^1}\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}u^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}u^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^3}\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}u^2}\,, \qquad (5.33) \\
\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}u^2} &= \frac{1}{\mathrm{d}u^2}\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial u^2}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3\right) = 1\,.
\end{aligned}$$

Man kann hier also u^2 bzw. u^k im Matrixelement g_2^2 bzw. g_k^k als (skalaren) Parameter auffassen, auf dessen Funktion $u^k \equiv \Phi\big(x^i(u^k)\big)$ die

verallgemeinerte Kettenregel $\quad f = f\big(x(u,v)\,,\, y(u,v)\big) \;:\; \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$

angewandt wird mit den Ersetzungen $\;\Phi \leftrightarrow f,\;\; x^i \leftrightarrow x, y\;$ und $\;u^k \leftrightarrow u, v\,.$

Weil ${g_k}^l = \delta_k^l$ in Matrixschreibweise die Einheitsmatrix liefert, ist ${g_k}^l$ die Inverse zu sich selbst, sodass

$$\left({g_k}^l\right) = \left({g_k}^l\right)^{-1} = \left({g_l}^k\right) \quad \Rightarrow \quad {g_k}^l\, {g_l}^m = {g_k}^m = \delta_k^l\, \delta_l^m = \delta_k^m\,.$$

Unter Berücksichtigung von (5.10) (5.13) und (5.28) liefert das Skalarprodukt von (5.26) mit $\vec{g}^m$ bzw. mit $\vec{g}_m$ die Gleichungen für die Umwandlung von kovarianten in kontravariante Vektorkomponenten und umgekehrt wie folgt (siehe auch Heraufziehen (5.4) und Herunterziehen (5.3) von Indizes im Abschnitt 5.1):

$$\begin{aligned}
\vec{g}^m \cdot \vec{g}_k \underset{(u)}{a}{}^k = \delta_k^m \underset{(u)}{a}{}^k &= \underset{(u)}{a}{}^m \\
= \vec{g}^m \cdot \vec{g}^l \underset{(u)}{a}{}_l = \vec{g}^m \cdot \vec{a} &= \underset{(u)}{a}{}^m \qquad \Rightarrow \qquad g^{ml} \underset{(u)}{a}{}_l = \underset{(u)}{a}{}^m\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{g}_m \cdot \vec{g}^k \underset{(u)}{a}{}_k = \delta_m^k \underset{(u)}{a}{}_k &= \underset{(u)}{a}{}_m \\
= \vec{g}_m \cdot \vec{g}_l \underset{(u)}{a}{}^l = \vec{g}_m \cdot \vec{a} &= \underset{(u)}{a}{}_m \qquad \Rightarrow \qquad g_{mk} \underset{(u)}{a}{}^k = \underset{(u)}{a}{}_m\,.
\end{aligned}$$

[8] Aber manchmal ist es erlaubt. Wenn man z. B. mit Differentialen erweitert, darf man kürzen.

[9] Die hochgestellten Zahlen sind hier keine Potenzen sondern Indizes.

5.7 Funktional- bzw. Jacobi-Matrix

Bei den Veranschaulichungen in Matrixschreibweise werden wir uns in diesem Abschnitt vereinfachend auf zweidimensionale Darstellungen und demzufolge auf 2×2-Matrizen beschränken.

Die Matrix

$$(\vec{g}_1 \ , \ \vec{g}_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = J := J^l{}_m \tag{5.34}$$

heißt **Funktionalmatrix** oder auch **Jacobi-Matrix**. Ihre Spalten sind die kovarianten Basisvektoren $\vec{g}_k$ von U, geschrieben als Spaltenvektoren. Wie man an (5.29) erkennt, ist die Matrix

$$\left(\vec{g}^{\,1} \ , \ \vec{g}^{\,2}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} = J^{-1} := \left(J^{-1}\right)^k{}_l$$

die Inverse der Funktionalmatrix, sodass[10]

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = J^{-1} J = \mathbb{1} \quad \text{bzw.} \quad \left(J^{-1}\right)^k{}_l \, J^l{}_m = \delta^k_m \ .$$

Wenn die Funktionalmatrix und damit die kovariante Vektorbasis bekannt sind, lässt sich die kontravariante Vektorbasis z. B. mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens aus der Funktionalmatrix berechnen.

Im Folgenden werden wir die Transformation der Basisvektoren und der Vektorkomponenten vom kartesischen Koordinatensystem X nach einem beliebigen Koordinatensystem U in Matrixschreibweise veranschaulichen. Dabei ist wieder zu bedenken, dass im kartesischen Koordinatensystem für die Basisvektoren $\vec{e}^{\,i} \equiv \vec{e}_i$ und für die Vektorkomponenten $\underset{(x)}{a}{}^i \equiv \underset{(x)}{a}{}_i$ gilt.

> Man stellt fest, dass sich kontravariante Vektorkomponenten wie kontravariante Basisvektoren und kovariante Vektorkomponenten wie kovariante Basisvektoren transformieren:

[10] Für zueinander inverse Matrizen gilt:

$$A^{-1}A = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AA^{-1}A = \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = A^{-1}\mathbb{1}A \quad \Rightarrow \quad AA^{-1} = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}A = AA^{-1} \, .$$

Allgemein gilt aber:

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad AB \neq BA = \left(A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} .$$

Transformation $X \longrightarrow U$:

Transformation der **kontravarianten Vektorkomponenten**: $\frac{\partial u^k}{\partial x^i} \underset{(x)}{a^i} = \underset{(u)}{a^k}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{(x)}{a^1} \\ \underset{(x)}{a^2} \end{pmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underset{(x)}{a^1} \\ \underset{(x)}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{(u)}{a^1} \\ \underset{(u)}{a^2} \end{pmatrix} . \tag{5.35}$$

Transformation der **kovarianten Basis**: $\frac{\partial x^i}{\partial u^k} \vec{e}_i = \vec{g}_k$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{pmatrix} \cdot J = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 & \vec{g}_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} = J^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \end{pmatrix} .$$

Transformation der **kovarianten Vektorkomponenten**: $\frac{\partial x^i}{\partial u^k} \underset{(x)}{a_i} = \underset{(u)}{a_k}$

$$\begin{pmatrix} \underset{(x)}{a_1} & \underset{(x)}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{(x)}{a_1} & \underset{(x)}{a_2} \end{pmatrix} \cdot J = \begin{pmatrix} \underset{(u)}{a_1} & \underset{(u)}{a_2} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{(x)}{a_1} \\ \underset{(x)}{a_2} \end{pmatrix} = J^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \underset{(x)}{a_1} \\ \underset{(x)}{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{(u)}{a_1} \\ \underset{(u)}{a_2} \end{pmatrix} . \tag{5.36}$$

Transformation der **kontravarianten Basis**: $\frac{\partial u^k}{\partial x^i} \vec{e}^{\,i} = \vec{g}^{\,k}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}^{\,1} \\ \vec{e}^{\,2} \end{pmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}^{\,1} \\ \vec{e}^{\,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g}^{\,1} \\ \vec{g}^{\,2} \end{pmatrix} .$$

Abschließend zeigen wir den Zusammenhang zwischen der Funktionalmatrix und dem metrischen Tensor. Wenn man aus den Basisvektoren $\vec{g}_k$ als Spaltenvektoren eine Matrix bildet, erhalten wir die Matrix $\left(g_{kl}\right)$ des metrischen Tensors g_{kl} aus der Funktionalmatrix J bzw. aus (5.34) wie folgt:

$$J^{\mathrm{T}} J = \left(\vec{g}_1\ ,\ \vec{g}_2\ ,\ \vec{g}_3\right)^{\mathrm{T}} \left(\vec{g}_1\ ,\ \vec{g}_2\ ,\ \vec{g}_3\right) = \left(g_{kl}\right) .$$

Die Diagonalelemente g_{kk} dieser Matrix liefern die **metrischen Koeffizienten** $\sqrt{g_{(kk)}} = |\vec{g}_k|$, auch **Maßstabsfaktoren** genannt (vgl. Abschnitt 5.10). Wie man sieht, geben die metrischen Koeffizienten die Länge der jeweiligen Basisvektoren an.

5.8 Transformationsverhalten von Vektorkomponenten und Basen

Nach: YouTube – VT I -05 Anwendungen des Metriktensors in 2D und 3D inkl. Beispiele – Prof. Dr. Paul Wagner, Universität Wien.

Der Übergang von einer kovarianten Vektorbasis $\{\vec{\boldsymbol{g}}_j\}$ in eine andere kovariante Vektorbasis $\{\overline{\vec{\boldsymbol{g}}}_i\}$ erfolgt aufgrund der linearen Beziehung

$$\boxed{\overline{\vec{\boldsymbol{g}}}_i = \underline{A}_i{}^j\,\vec{\boldsymbol{g}}_j} \tag{5.37}$$

mit der Transformationsmatrix $\left(\underline{A}_i{}^j\right)$. Steht der Querstrich als Index unter dem A, so bezieht sich die Transformationsmatrix auf kovariante Basen. Folglich bezieht sich $\left(\bar{A}_i{}^j\right)$ auf kontravariante Basen. Ausgeschrieben zur Veranschaulichung ergibt (5.37)

$$\begin{aligned}
\overline{\vec{\boldsymbol{g}}}_1 &= \underline{A}_1{}^1\,\vec{\boldsymbol{g}}_1 + \underline{A}_1{}^2\,\vec{\boldsymbol{g}}_2 + \underline{A}_1{}^3\,\vec{\boldsymbol{g}}_3 = \underline{A}_1{}^j\,\vec{\boldsymbol{g}}_j\,,\\
\overline{\vec{\boldsymbol{g}}}_2 &= \underline{A}_2{}^1\,\vec{\boldsymbol{g}}_1 + \underline{A}_2{}^2\,\vec{\boldsymbol{g}}_2 + \underline{A}_2{}^3\,\vec{\boldsymbol{g}}_3 = \underline{A}_2{}^j\,\vec{\boldsymbol{g}}_j\,,\\
\overline{\vec{\boldsymbol{g}}}_3 &= \underline{A}_3{}^1\,\vec{\boldsymbol{g}}_1 + \underline{A}_3{}^2\,\vec{\boldsymbol{g}}_2 + \underline{A}_3{}^3\,\vec{\boldsymbol{g}}_3 = \underline{A}_3{}^j\,\vec{\boldsymbol{g}}_j\,.
\end{aligned}$$

Die Matrixelemente $\underline{A}_i{}^j$ sind die Komponenten eines Basisvektors $\overline{\vec{\boldsymbol{g}}}_i$ in Bezug auf alle ursprünglichen Basisvektoren $\vec{\boldsymbol{g}}_j$.

Die Elemente der Transformationsmatrizen werden immer so geschrieben, dass der erste Index links unten und der zweite Index rechts oben steht.

Für die Transformation der kontravarianten Basisvektoren erhält man analog

$$\boxed{\overline{\vec{\boldsymbol{g}}}^k = \bar{A}_l{}^k\,\vec{\boldsymbol{g}}^l} \tag{5.38}$$

Den Zusammenhang zwischen den Transformationsmatrizen $\left(\underline{A}_i{}^j\right)$ und $\left(\bar{A}_l{}^k\right)$ zeigen wir, indem wir (5.37) und (5.38) miteinander multiplizieren:

$$\begin{aligned}
\overline{\vec{\boldsymbol{g}}}_i \cdot \overline{\vec{\boldsymbol{g}}}^k = \delta_i{}^k = \underline{A}_i{}^j\,\vec{\boldsymbol{g}}_j \cdot \bar{A}_l{}^k\,\vec{\boldsymbol{g}}^l &= \underline{A}_i{}^j\,\bar{A}_l{}^k\,\underbrace{\vec{\boldsymbol{g}}_j \cdot \vec{\boldsymbol{g}}^l}\\
&= \underline{A}_i{}^j\,\bar{A}_l{}^k\;\delta_j{}^l = \underline{A}_i{}^j\,\bar{A}_j{}^k \quad\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{A}_i{}^j\,\bar{A}_j{}^k = \delta_i{}^k \quad\Leftrightarrow\quad \left(\underline{A}_i{}^j\right)\ \textbf{invers}\ \text{zu}\ \left(\bar{A}_l{}^k\right)}\,,$$

denn $\underline{A}_i{}^j\,\bar{A}_j{}^k$ entspricht einer Matrixmultiplikation.

Jetzt betrachten wir einen Vektor $\vec{\boldsymbol{v}}$ in seinen verschiedenen Darstellungen:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \underbrace{v^j \vec{\boldsymbol{g}}_j = \overline{v}^i \overline{\vec{\boldsymbol{g}}}_i}_{(\star)} = v_j \vec{\boldsymbol{g}}^j = \overline{v}_i \overline{\vec{\boldsymbol{g}}}^i .$$

Für die Transformation $(\star)$ schreiben wir mit (5.37)

$$v^j \vec{\boldsymbol{g}}_j = \overline{v}^i \overline{\vec{\boldsymbol{g}}}_i = \overline{v}^i \underline{A}_i{}^j \vec{\boldsymbol{g}}_j \quad \Rightarrow$$

$$v^j = \overline{v}^i \underline{A}_i{}^j . \tag{5.39}$$

Um die gesuchte Transformationsgleichung zu erhalten, multiplizieren wir (5.39) mit $\bar{A}_j{}^k$:

$$v^j \bar{A}_j{}^k = \overline{v}^i \underbrace{\underline{A}_i{}^j \bar{A}_j{}^k} = \overline{v}^i \delta_i{}^k = \overline{v}^k = \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{v}^k = \bar{A}_j{}^k v^j \qquad \widehat{=} \qquad \overline{\vec{\boldsymbol{g}}}^k = \bar{A}_j{}^k \vec{\boldsymbol{g}}^j} \, .$$

Analog dazu erhält man für die Transformation der kovarianten Vektorkomponenten

$$\boxed{\overline{v}_k = \underline{A}_k{}^j v_j \qquad \widehat{=} \qquad \overline{\vec{\boldsymbol{g}}}_k = \underline{A}_k{}^j \vec{\boldsymbol{g}}_j} \, .$$

Vektorkomponenten besitzen die gleiche Transformationsmatrix wie Basisvektoren, d. h.:

Kontravariante Vektorkomponenten transformieren sich wie kontravariante Basisvektoren und kovariante Vektorkomponenten transformieren sich wie kovariante Basisvektoren.

Wie transformiert sich das Skalarprodukt

$$\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \left\{ \begin{array}{l} v^i \vec{\boldsymbol{g}}_i \cdot w^j \vec{\boldsymbol{g}}_j = \vec{\boldsymbol{g}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_j v^i w^j = g_{ij} v^i w^j \\ v_i \vec{\boldsymbol{g}}^i \cdot w^j \vec{\boldsymbol{g}}_j = \vec{\boldsymbol{g}}^i \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_j v_i w^j = \delta_j{}^i v_i w^j \end{array} \right\} = v_j w^j \; ?$$

Wir bilden das Skalarprodukt aus den transformierten Vektoren $\overline{\vec{\boldsymbol{v}}}$ und $\overline{\vec{\boldsymbol{w}}}$ mit

$$\overline{v}_k = \underline{A}_k{}^j v_j \quad \text{und} \quad \overline{w}^k = \bar{A}_l{}^k w^l \;:$$

$$\overline{\vec{\boldsymbol{v}}} \cdot \overline{\vec{\boldsymbol{w}}} = \overline{v}_k \overline{w}^k = \underline{A}_k{}^j v_j \bar{A}_l{}^k w^l = v_j \underline{A}_k{}^j \bar{A}_l{}^k w^l = v_j \delta_l{}^j w^l = v_j w^j = \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \overline{\vec{\boldsymbol{v}}} \cdot \overline{\vec{\boldsymbol{w}}} \, . \; \square$$

Das **Skalarprodukt** (innere Produkt) bzw. ein Skalar ist **invariant** bei einem Basiswechsel oder im Fall einer Koordinatentransformation.

Anmerkung:
Bei einem Vektor spricht man nicht von „invariant“, weil sich seine Komponenten bei einem Basiswechsel ändern, auch wenn der Vektor dabei derselbe bleibt.

5.9 Die Invarianz des Skalarprodukts unter Koordinatentransformationen

Die Invarianz des Skalarprodukts unter Koordinatentransformationen ist eine Forderung, die erfüllt werden muss. Diese Invarianz wird ermöglicht durch die kreuzweise Paarung von kovarianten und kontravarianten Basen und Vektorkomponenten. In den Vorbemerkungen hatten wir mit (5.1) bereits das Skalarprodukt aus einem

$$\text{(kovarianten) Kovektor} \quad \vec{\boldsymbol{b}}^* := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad \text{(einzeilige Matrix bzw. Einsform)}$$

und einem

$$\text{(kontravarianten) Vektor} \quad \vec{\boldsymbol{a}} := \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} \quad \text{(einspaltige Matrix)}$$

eingeführt. Weiterhin beziehen wir uns im Folgenden auf den Abschnitt 5.7 und beschränken uns vereinfachend wieder auf die zweidimensionale Darstellung. Zur Veranschaulichung der Invarianz des Skalarprodukts $\vec{b}^* \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}^*$ bzw.

$$\begin{pmatrix} b_1 \,,\, b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = b_1 a^1 + b_2 a^2 = a^1 b_1 + a^2 b_2 = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} b_1 \,,\, b_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

benutzen wir den Übergang von einem 2-dimensionalen Koordinatensystem X zu einem anderen 2-dimensionalen Koordinatensystem U. Der kovariante Kovektor $\vec{\boldsymbol{b}}^*$ transformiert sich gemäß

$$\begin{pmatrix} \underset{(u)}{b}_1 & \underset{(u)}{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{(x)}{b}_1 & \underset{(x)}{b}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{(x)}{b}_1 & \underset{(x)}{b}_2 \end{pmatrix} J$$

und der kontravariante Vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$ gemäß

$$\begin{pmatrix} \underset{(u)}{a}^1 \\ \underset{(u)}{a}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underset{(x)}{a}^1 \\ \underset{(x)}{a}^2 \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \underset{(x)}{a}^1 \\ \underset{(x)}{a}^2 \end{pmatrix} .$$

Die Bildung des Skalarprodukts unter Verwendung dieser beiden Transformationsgleichungen beweist schließlich die **Invarianz des Skalarprodukts** unter Koordinatentransformationen:

$$\begin{pmatrix} \underset{(u)}{b}_1 & \underset{(u)}{b}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underset{(u)}{a}^1 \\ \underset{(u)}{a}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{(x)}{b}_1 & \underset{(x)}{b}_2 \end{pmatrix} \underbrace{J \cdot J^{-1}}_{\mathbb{1}} \begin{pmatrix} \underset{(x)}{a}^1 \\ \underset{(x)}{a}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{(x)}{b}_1 & \underset{(x)}{b}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underset{(x)}{a}^1 \\ \underset{(x)}{a}^2 \end{pmatrix} . \quad \square$$

Im Tensorkalkül ist dies

$$\underset{(u)}{b}_k \, \underset{(u)}{a}^k = \underset{(x)}{b}_j \, J^j{}_k \left(J^{-1}\right)^k{}_l \, \underset{(x)}{a}^l = \underset{(x)}{b}_j \, \delta^j_l \, \underset{(x)}{a}^l = \underset{(x)}{b}_j \, \underset{(x)}{a}^j .$$

5.10 Einführung normierter (physikalischer) Basisvektoren

Siehe hierzu den Abschnitt 5.5 und insbesondere die Gleichung (5.24).

Achtung!
Indizes, die nicht als Summationsindizes im Sinne der Einstein'schen Summenkonvention gelten sollen, werden in Klammern gesetzt. Sie laufen ggf. nur mit.

Für die Normierung der Basisvektoren benötigen wir ihre Länge (ihren Betrag, ihre Norm)

$$\begin{aligned} |\vec{g}_k| &= \sqrt{\vec{g}_{(k)} \cdot \vec{g}_{(k)}} = \sqrt{g_{(kk)}} \ , \\ |\vec{g}^k| &= \sqrt{\vec{g}^{(k)} \cdot \vec{g}^{(k)}} = \sqrt{g^{(kk)}} \ . \end{aligned}$$

Hierbei sind $\sqrt{g_{(kk)}}$ und $\sqrt{g^{(kk)}}$ die **metrischen Koeffizienten**, auch **Maßstabsfaktoren** genannt, und $\vec{g}_{(k)} \cdot \vec{g}_{(k)}$ bzw. $\vec{g}^{(k)} \cdot \vec{g}^{(k)}$ sind die Skalarprodukte aus den Spaltenvektoren $\vec{g}_k$ bzw. $\vec{g}^k$ mit sich selbst:

$$\vec{g}_{(k)} \cdot \vec{g}_{(k)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^{(k)}} \vec{e}_i \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^{(k)}} \vec{e}_i \ , \quad \vec{g}^{(k)} \cdot \vec{g}^{(k)} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x^i} \vec{e}^{\,i} \cdot \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x^i} \vec{e}^{\,i} \ .$$

In der Literatur wird oft h_k statt $|\vec{\boldsymbol{g}}_k|$ bzw. h^k statt $|\vec{\boldsymbol{g}}^k|$ geschrieben. Aus den kovarianten Basisvektoren

$$\vec{g}_k = \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k}$$

in U erhalten wir die kovarianten normierten Basisvektoren (bzw. kovarianten Einheits-Basisvektoren oder kovarianten **physikalischen Basisvektoren**) $\vec{e}_{u^k}$ durch die Normierung

$$\vec{e}_{u^k} = \frac{1}{\sqrt{g_{(kk)}}} \vec{g}_k \quad \Leftrightarrow \quad \vec{g}_k = \sqrt{g_{(kk)}} \, \vec{e}_{u^k} \ ,$$

sodass

$$\vec{a} = \underset{(u)}{a}^k \cdot \vec{g}_k = \underbrace{\underset{(u)}{a}^k \sqrt{g_{(kk)}}}_{\underset{(u)}{\tilde{a}}^k} \cdot \vec{e}_{u^k}$$

und

$$\underset{(u)}{\tilde{a}}^k = \sqrt{g_{(kk)}} \, \underset{(u)}{a}^k \ .$$

Die $\underset{(u)}{\tilde{a}}^k$ sind die zu den normierten kovarianten Basisvektoren gehörenden kontravarianten Vektorkomponenten. Wir wollen sie als physikalische kontravariante Vektorkomponenten bezeichnen. Die physikalischen kovarianten Komponenten von $\vec{a}$ ergeben sich dazu analog:

$$\vec{e}^{\,u^k} = \frac{1}{\sqrt{g^{(kk)}}} \vec{g}^k \quad \Leftrightarrow \quad \vec{g}^k = \sqrt{g^{(kk)}} \, \vec{e}^{\,u^k} \ ,$$

$$\vec{a} = \underset{(u)}{a}_k \cdot \vec{g}^k = \underbrace{\underset{(u)}{a}_k \sqrt{g^{(kk)}}}_{\underset{(u)}{\tilde{a}}_k} \cdot \vec{e}^{\,u^k} \ ,$$

$$\underset{(u)}{\tilde{a}}_{k} = \sqrt{g^{(kk)}}\ \underset{(u)}{a}_{k}\ .$$

Diese Normierungen liefern unter Beachtung von

$$\boldsymbol{\vec{g}}_k \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\vec{g}}^l \;=\; g_k{}^l \;=\; \delta^l_k \qquad (5.27)$$

das Skalarprodukt

$$\vec{g}_k \cdot \vec{g}^l \;=\; \left|\vec{g}_{(k)}\right| \vec{e}_{u^k} \cdot \left|\vec{g}^{(l)}\right| \vec{e}^{u^l} \;=\; \underbrace{\left|\vec{g}_{(k)}\right| \left|\vec{g}^{(l)}\right|}_{>0}\ \vec{e}_{u^k} \cdot \vec{e}^{u^l} \;=\; \delta^l_k \tag{5.40}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} k = l & \Rightarrow \quad 0 \;<\; \vec{e}_{u^{(k)}} \cdot \vec{e}^{u^{(k)}} \;=\; \dfrac{1}{\left|\vec{g}_{(k)}\right| \left|\vec{g}^{(k)}\right|} \;\leq\; 1\ , \\[2ex] k \neq l & \Rightarrow \quad \vec{e}_{u^k} \cdot \vec{e}^{u^l} \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_{u^k} \perp \vec{e}^{u^l}\ .\ \square \end{cases}$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass die Basisvektoren $\vec{g}_k$ und $\vec{g}^k$ nur in orthogonalen Koordinatensystemen die gleiche Richtung haben, im Allgemeinen jedoch nicht. Folglich haben auch die zugehörigen normierten Basisvektoren $\vec{e}_{u^k}$ und $\vec{e}^{u^k}$ allgemein nicht die gleiche Richtung.

> Die wirklichen Komponenten eines Vektors sind die aus dessen Parallelprojektion auf die Koordinaten resultierenden
> **kontravarianten physikalischen Vektorkomponenten**.

5.11 Das Verhalten von Basisvektoren und Vektorkomponenten in orthogonalen Koordinatensystemen

Nur in **orthogonalen Koordinatensystemen** verlaufen $\vec{e}_{u^k}$ und $\vec{e}^{u^k}$ mit der gleichen Orientierung parallel zueinander (vgl. Abschn. 5.3), sodass in diesem und nur in diesem Fall

$$\vec{e}_{u^{(k)}} \cdot \vec{e}^{u^{(k)}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{g}_{(k)}\right| \left|\vec{g}^{(k)}\right| = 1$$

gilt. Daraus schließen wir, dass *nur* in orthogonalen Koordinatensystemen die Beträge bzw. **Längen** der einander entsprechenden ko- und kontravarianten holonomen Basisvektoren reziprok zueinander sind gemäß

$$\boxed{\vec{g}_k \parallel \vec{g}^k \quad \Leftrightarrow \quad \left|\vec{g}_k\right| = \frac{1}{\left|\vec{g}^k\right|}} \; .$$

Speziell für orthogonale Koordinatensysteme (z. B. das Kugelkoordinatensystem) gilt also:

$$\vec{e}_{u^k} \equiv \vec{e}^{u^k} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\left|\vec{g}_{(k)}\right|}\,\vec{g}_k = \frac{1}{\left|\vec{g}^{(k)}\right|}\,\vec{g}^k = \left|\vec{g}_{(k)}\right|\vec{g}^k \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\vec{g}_k \; = \; \left|\vec{g}_{(k)}\right|^2 \vec{g}^k \; = \; g_{(kk)}\,\vec{g}^k \quad \Leftrightarrow \quad \vec{g}^k \; = \; \frac{1}{\left|\vec{g}_{(k)}\right|^2}\,\vec{g}_k \; = \; \frac{1}{g_{(kk)}}\,\vec{g}_k} \; .$$

Daraus folgt für die holonomen Komponenten von $\vec{a}$ in orthogonalen Koordinatensystemen

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \underset{(u)}{a^k}\left|\vec{g}_{(k)}\right| \cdot \vec{e}_{u^k} \; &= \; \underset{(u)}{a_k}\,\frac{1}{\left|\vec{g}_{(k)}\right|} \cdot \vec{e}^{u^k} \\
\Rightarrow \quad \underset{(u)}{a^k}\left|\vec{g}_{(k)}\right| \; &= \; \frac{1}{\left|\vec{g}_{(k)}\right|}\,\underset{(u)}{a_k} \\
\Leftrightarrow \quad \underset{(u)}{a^k} \; &= \; \frac{1}{\left|\vec{g}_{(k)}\right|^2}\,\underset{(u)}{a_k} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{(u)}{a_k} \; = \; \left|\vec{g}_{(k)}\right|^2 \underset{(u)}{a^k} \, ,
\end{aligned}$$

$$\boxed{\underset{(u)}{a^k} \; = \; \frac{1}{g_{(kk)}}\,\underset{(u)}{a_k} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{(u)}{a_k} = g_{(kk)}\,\underset{(u)}{a^k}} \; .$$

Die $g_{(kk)}$ sind die Hauptdiagonalelemente der Matrix $\left(g_{kl}\right)$ des kovarianten metrischen Tensors und geben mit $\sqrt{g_{(kk)}}$ die Länge der holonomen kovarianten Basisvektoren $\vec{g}_k$ an.

5.12 Herauf- und Herunterziehen von Indizes

Das mühelose Herauf- und Herunterziehen von Indizes geht auf die Invarianz der Länge des (infinitesimalen) Abstandsvektors zurück und damit im Zusammenhang auf den glücklichen Umstand, dass ko- und zugehörige kontravariante Metriktensoren symmetrisch und zueinander invers sind.

Bei der Veranschaulichung des Herauf- und Herunterziehens von Indizes gehen wir aus von der Darstellung eines Vektors (Tensors erster Stufe) $\vec{\boldsymbol{v}}$ in der kovarianten holonomen Basis $\{\vec{\boldsymbol{g}}_i\}$ und in der kontravarianten holonomen Basis $\{\vec{\boldsymbol{g}}^{\,i}\}$:

$$\vec{\boldsymbol{v}} \;=\; v^i \vec{\boldsymbol{g}}_i \;=\; v_i\, \vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \;. \tag{5.41}$$

Weiterhin verwenden wir die Basisvektor-Skalarprodukte

$$\vec{\boldsymbol{g}}_i \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}_j = g_{ij} \;, \qquad \vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,j} = g^{ij} \;, \qquad \vec{\boldsymbol{g}}_i \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,j} = g_i^{\;j} = \delta_i^j \;,$$

wobei wir berücksichtigen, dass das Skalarprodukt kommutativ ist und folglich der Metriktensor symmetrisch ist :

$$g_{ij} = g_{ji} \;, \qquad g^{ij} = g^{ji} \;, \qquad g_i^{\;j} = g^j_{\;i} = \delta_i^j \;.$$

- Herauf- und Herunterziehen eines Index am Beispiel eines Vektors $\vec{\boldsymbol{a}} = a^i \vec{\boldsymbol{g}}_i = a_i\, \vec{\boldsymbol{g}}^{\,i}$:

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} a^i\, \vec{\boldsymbol{g}}_i \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}_j & = & a^i\, g_{ij} & = & a_i\, \vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}_j & = & a_i\, g^i_{\;j} & = & a_i\, \delta^i_j & = & a_j \\ a_i\, \vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,j} & = & a_i\, g^{ij} & = & a^i\, \vec{\boldsymbol{g}}_i \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,j} & = & a^i\, g_i^{\;j} & = & a^i\, \delta_i^j & = & a^j \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\; a^i\, g_{ij} = a_j \;, \qquad a_i\, g^{ij} = a^j \;} \;.$$

Diese Vorgehensweise lässt sich auf Tensoren höherer Stufe übertragen, was wir am einfachen Beispiel eines Tensors T^{ij} mit der Komponentenmatrix $\left(T^{ij}\right)$ zeigen wollen. Betrachten wir nämlich das Tensorprodukt (dyadische Produkt) T aus zwei Vektoren $\vec{\boldsymbol{a}} = a^i\, \vec{\boldsymbol{g}}_i$ und $\vec{\boldsymbol{b}} = b^j\, \vec{\boldsymbol{g}}_j$, so ist jedes Element der Matrix

$$T \;=\; \vec{\boldsymbol{a}} \otimes \vec{\boldsymbol{b}} \;=\; a^i\, \vec{\boldsymbol{g}}_i \otimes b^j\, \vec{\boldsymbol{g}}_j \;=\; a^i b^j\, \vec{\boldsymbol{g}}_i \otimes \vec{\boldsymbol{g}}_j \;=\; T^{ij}\, \vec{\boldsymbol{g}}_i \vec{\boldsymbol{g}}_j$$

eine Linearkombination aus einer Metriktensorkomponente $\vec{\boldsymbol{g}}_i \vec{\boldsymbol{g}}_j = g_{ij}$ und dem zugehörigen Koeffizienten bzw. der zugehörigen Tensorkomponente $a^i b^j = T^{ij}$. Auf diese Weise lassen sich kovariante, kontravariante und gemischte Tensoren höherer Stufe konstruieren. Damit und unter Berücksichtigung von (5.41) ergeben sich die folgenden Entwicklungsmöglichkeiten für T :

$$T \;=\; T^{ij}\, \vec{\boldsymbol{g}}_i \vec{\boldsymbol{g}}_j \;=\; T^i_{\;j}\, \vec{\boldsymbol{g}}_i \vec{\boldsymbol{g}}^{\,j} \;=\; T_i^{\;j}\, \vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \vec{\boldsymbol{g}}_j \;=\; T_{ij}\, \vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,j} \;. \tag{5.42}$$

(5.42) wird jetzt von rechts mit $\vec{\boldsymbol{g}}^{\,k}$ skalar multipliziert:

$$T \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,k} \;=\; T^{ij}\, \vec{\boldsymbol{g}}_i \vec{\boldsymbol{g}}_j \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,k} \;=\; T^i_{\;j}\, \vec{\boldsymbol{g}}_i \vec{\boldsymbol{g}}^{\,j} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,k} \;=\; T_i^{\;j}\, \vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \vec{\boldsymbol{g}}_j \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,k} \;=\; T_{ij}\, \vec{\boldsymbol{g}}^{\,i} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,j} \boldsymbol{\cdot} \vec{\boldsymbol{g}}^{\,k} \;. \tag{5.43}$$

Aus (5.43) erhält man der Reihe nach und schließlich durch Vergleich

$$\underbrace{T^{ij}\,\vec{\boldsymbol{g}}_i\,\delta_j^k \;=\; T^i{}_j\,\vec{\boldsymbol{g}}_i\,g^{jk}}\;=\;\underbrace{T_i{}^j\,\vec{\boldsymbol{g}}^i\,\delta_j^k \;=\; T_{ij}\,\vec{\boldsymbol{g}}^i\,g^{jk}} \qquad \Rightarrow$$

$$T^{ik} \;=\; T^i{}_j\,g^{jk} \qquad , \qquad T_i{}^k \;=\; T_{ij}\,g^{jk}\ .$$

Analog und nach dem gleichen Prinzip lassen sich die Indizes eines Tensors beliebig herauf- oder herunterziehen. Beispielsweise werden dann die Indizes von T_{mn} wie folgt heraufgezogen:

$$g^{im}g^{jn}\,T_{mn} \;=\; g^{im}\,T_m{}^j \;=\; g^{jn}\,T^i{}_n \;=\; T^{ij}\ .$$

Wenn wir in einer Tensorgleichung den einen Index eines Summationsindexpaares herauf- und den anderen herunterziehen, bleibt die Gleichung erfüllt.

So gilt für das Skalarprodukt λ aus den Vektoren (Tensoren erster Stufe) $\vec{\boldsymbol{a}}$ und $\vec{\boldsymbol{b}}$:

$$\begin{aligned}
\lambda = \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} \;&=\; a^i\,\vec{\boldsymbol{g}}_i\cdot b^j\,\vec{\boldsymbol{g}}_j \;=\; a^ib^j\,\vec{\boldsymbol{g}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_j \;=\; a^ib^j\,g_{ij} \;=\; a^ib_i \;=\; a_jb^j\\
&=\; a_i\,\vec{\boldsymbol{g}}^i\cdot b_j\,\vec{\boldsymbol{g}}^j \;=\; a_ib_j\,\vec{\boldsymbol{g}}^i\cdot\vec{\boldsymbol{g}}^j \;=\; a_ib_j\,g^{ij} \;=\; a_ib^i \;=\; a^jb_j\\
&=\; a^i\,\vec{\boldsymbol{g}}_i\cdot b_j\,\vec{\boldsymbol{g}}^j \;=\; a^ib_j\,\vec{\boldsymbol{g}}_i\cdot\vec{\boldsymbol{g}}^j \;=\; a^ib_j\,\delta_i^j \;=\; a^ib_i \;=\; a^jb_j\\
&=\; a_i\,\vec{\boldsymbol{g}}^i\cdot b^j\,\vec{\boldsymbol{g}}_j \;=\; a_ib^j\,\vec{\boldsymbol{g}}^i\cdot\vec{\boldsymbol{g}}_j \;=\; a_ib^j\,\delta_j^i \;=\; a_ib^i \;=\; a_jb^j \quad .
\end{aligned}$$

Diese Vorgehensweise ergibt bei Anwendung beispielsweise auf ein Produkt aus einem Tensor erster Stufe und einem Tensor vierter Stufe

$$a_l\,R^{li}{}_{jk} \;=\; a^l\,R_l{}^i{}_{jk}\ .$$

5.13 Zusammenfassung

- „Man spricht von einem kontravarianten Vektor …, wenn die Komponenten kontravariant und die Basisvektoren kovariant sind. Analog spricht man von einem kovarianten Vektor, wenn die Komponenten kovariant und die Basisvektoren kontravariant sind. … Diese kreuzweise Paarung (kontra-ko bzw. ko-kontra) sorgt dafür,“[11] dass das Skalarprodukt (die Länge) des Vektors $\vec{a}$ „unter Koordinatentransformation invariant ist, da die Transformationen von Komponenten und Basisvektoren invers zueinander sind und sich gegenseitig aufheben.“[1]

- Für den infinitesimalen Abstandsvektor $\mathrm{d}\vec{x}$ gelten also die beiden Darstellungen

$$\mathrm{d}\vec{x} = \mathrm{d}u^k\,\vec{g}_k = \mathrm{d}u_k\,\vec{g}^k\ . \tag{5.44}$$

  Durch skalare Multiplikation mit den Basisvektoren erhalten wir die Transformationsbeziehungen zwischen den beiden Darstellungen der infinitesimalen Abstandsvektoren und damit auch der Vektorkomponenten wie folgt:

$$\mathrm{d}\vec{x}\cdot\vec{g}^l = \mathrm{d}u^k\,\underbrace{\vec{g}_k\cdot\vec{g}^l}_{=\delta_k^l} = \mathrm{d}u_k\,\underbrace{\vec{g}^k\cdot\vec{g}^l}_{=g^{kl}} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}u^l = \mathrm{d}u_k\,g^{kl} \quad \Rightarrow \quad a^l = a_k\,g^{kl} = g^{lk}\,a_k\ ,$$

$$\mathrm{d}\vec{x}\cdot\vec{g}_l = \mathrm{d}u^k\,\underbrace{\vec{g}_k\cdot\vec{g}_l}_{=g_{kl}} = \mathrm{d}u_k\,\underbrace{\vec{g}^k\cdot\vec{g}_l}_{=\delta_l^k} \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}u_l = \mathrm{d}u^k\,g_{kl} \quad \Rightarrow \quad a_l = a^k\,g_{kl} = g_{lk}\,a^k\ .$$

- Das infinitesimale Abstandsquadrat ist damit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\vec{x}\cdot\mathrm{d}\vec{x}\\
&= \mathrm{d}u^k\,\vec{g}_k\cdot\mathrm{d}u^l\,\vec{g}_l = \mathrm{d}u_k\,\vec{g}^k\cdot\mathrm{d}u_l\,\vec{g}^l\\
&= \underbrace{\vec{g}_k\cdot\vec{g}_l}_{=g_{kl}}\,\mathrm{d}u^k\,\mathrm{d}u^l = \underbrace{\vec{g}^k\cdot\vec{g}^l}_{=g^{kl}}\,\mathrm{d}u_k\,\mathrm{d}u_l\ ,\\
\mathrm{d}s^2 &= g_{kl}\cdot\mathrm{d}u^k\,\mathrm{d}u^l = g^{kl}\cdot\mathrm{d}u_k\,\mathrm{d}u_l\ ,
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = \left(\mathrm{d}\vec{x}\right)^2 \;=\; \mathrm{d}u^k\,\mathrm{d}u_k = \mathrm{d}u_k\,\mathrm{d}u^k}\ .$$

- Analog zum infinitesimalen Abstandsvektor lassen sich Vektoren gemäß

$$\vec{a} = \underset{(u)}{a}^1\,\vec{g}_1 + \underset{(u)}{a}^2\,\vec{g}_2 + \underset{(u)}{a}^3\,\vec{g}_3 = \underset{(u)}{a}_1\,\vec{g}^1 + \underset{(u)}{a}_2\,\vec{g}^2 + \underset{(u)}{a}_3\,\vec{g}^3$$

  in kontravariante Komponenten in der kovarianten Basis oder in kovariante Komponenten in der kontravarianten Basis zerlegen. Die Vektoren selbst ändern

[11] Zitiert aus: http://de.wikipedia.org/wiki/Krummlinige_Koordinaten, Seite 3 und Seite 4.

sich dabei aber nicht. Demzufolge ändern sich auch ihr Längen- bzw. Betragsquadrate nicht. Das Betragsquadrat und damit die Länge eines Vektors sind also unabhängig von der Darstellungsform. Speziell in kartesischen Koordinatensystemen ist das Betragsquadrat eines Vektors $\vec{a}$, also das Skalarprodukt des Vektors $\vec{a}$ mit sich selbst

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) = a_1\,a_1 + a_2\,a_2 + a_3\,a_3\ .$$

Analog dazu schreiben wir allgemein, d. h. für das Betragsquadrat eines Vektors $\vec{a}$ in einem beliebigen Koordinatensystem U

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{a} &= \left(\underset{(u)}{a}^1\,\vec{g}_1 + \underset{(u)}{a}^2\,\vec{g}_2 + \underset{(u)}{a}^3\,\vec{g}_3\right)\cdot\left(\underset{(u)}{a}_1\,\vec{g}^1 + \underset{(u)}{a}_2\,\vec{g}^2 + \underset{(u)}{a}_3\,\vec{g}^3\right)\\ &= \underset{(u)}{a}^1\,\underset{(u)}{a}_1 + \underset{(u)}{a}^2\,\underset{(u)}{a}_2 + \underset{(u)}{a}^3\,\underset{(u)}{a}_3\ ,\end{aligned}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \underset{(u)}{a}^k\,\underset{(u)}{a}_k\ .$$

Diese Vorgehensweise ist deshalb so bequem, weil wir hier (analog zum kartesischen Koordinatensystem mit $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij}$) die Gleichung (5.28) $\vec{g}_k\cdot\vec{g}^l = \delta_k^l$ für beliebige Koordinatensysteme verwenden können. In verallgemeinerter Form ist folglich das Betragsquadrat des Vektors $\vec{a}$, d. h. das Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit sich selbst, unter Berücksichtigung des metrischen Tensors (5.10) bzw. (5.13) definiert durch

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{a} &:= \vec{g}^k\,\underset{(u)}{a}_k\cdot\vec{g}^l\,\underset{(u)}{a}_l = \vec{g}^k\!\cdot\!\vec{g}^l\,\underset{(u)}{a}_l\,\underset{(u)}{a}_k = g^{kl}\,\underset{(u)}{a}_l\,\underset{(u)}{a}_k = \underset{(u)}{a}^k\,\underset{(u)}{a}_k\\ &= \vec{g}_k\,\underset{(u)}{a}^k\cdot\vec{g}_l\,\underset{(u)}{a}^l = \vec{g}_k\!\cdot\!\vec{g}_l\,\underset{(u)}{a}^l\,\underset{(u)}{a}^k = g_{kl}\,\underset{(u)}{a}^l\,\underset{(u)}{a}^k = \underset{(u)}{a}_k\,\underset{(u)}{a}^k\\ &= \vec{g}_k\,\underset{(u)}{a}^k\cdot\vec{g}^l\,\underset{(u)}{a}_l = \vec{g}_k\!\cdot\!\vec{g}^l\,\underset{(u)}{a}_l\,\underset{(u)}{a}^k = \delta_k^l\,\underset{(u)}{a}_l\,\underset{(u)}{a}^k = \underset{(u)}{a}_k\,\underset{(u)}{a}^k\ .\end{aligned} \tag{5.45}$$

- Kurz zusammengefasst und in Analogie zu (5.44) gelten allgemein auch für Vektoren die beiden Darstellungen

  $$\vec{a} = a^k\,\vec{g}_k = a_k\,\vec{g}^k$$

  mit

  $$a^k = g^{kl}\,a_l\ ,\quad a_k = g_{kl}\,a^l\ .$$

  Das Skalarprodukt aus $\vec{a}$ und dem kontravarianten Basisvektor $\vec{g}^k$ liefert die kontravariante Vektorkomponente a^k von $\vec{a}$ gemäß[12]

  $$\vec{a}\cdot\vec{g}^k = a^l\,\vec{g}_l\cdot\vec{g}^k = a^l\cdot\delta_l^k = a^k\ .$$

[12] Bei der orthogonalen Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf die Gerade, auf der ein Basisvektor liegt, bilden diese Gerade und die Projektionslinie in Projektionsrichtung auf die Gerade einen rechten Winkel.

Das Skalarprodukt aus $\vec{a}$ und dem kovarianten Basisvektor $\vec{g}_k$ liefert in analoger Weise die kovariante Vektorkomponte a_k von $\vec{a}$ gemäß

$$\vec{a} \cdot \vec{g}_k = a_l \, \vec{g}^{\,l} \cdot \vec{g}_k = a_l \cdot \delta^l_k = a_k \; .$$

Damit erhalten wir für einen Vektor $\vec{a}$ die alternative Notation

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\vec{a} \cdot \vec{g}^{\,k}\right)}_{a^k} \, \vec{g}_k = \underbrace{\left(\vec{a} \cdot \vec{g}_k\right)}_{a_k} \, \vec{g}^{\,k} \; .$$

- **Achtung!**
Indizes, die nicht als Summationsindizes im Sinne der Einstein'schen Summenkonvention gelten sollen, werden in Klammern gesetzt oder mit einem Stern indiziert (gesternt). Sie laufen ggf. nur mit.

  Führen wir statt der holonomen Basisvektoren $\vec{g}_k$ bzw. $\vec{g}^{\,k}$ die zugehörigen physikalischen Basisvektoren (Einheits-Basisvektoren) $\vec{e}_{u^k}$ bzw. $\vec{e}^{\,u^k}$ ein, so müssen die Vektorkomponenten zur Darstellung von $\vec{a}$ entsprechend angepasst werden. Wir indizieren die dann resultierenden physikalischen Vektorkomponenten mit einer Tilde. Mit

$$\vec{e}_{u^k} = \frac{\vec{g}_k}{|\vec{g}_{(k)}|} = \frac{\vec{g}_k}{\sqrt{\vec{g}_{(k)} \cdot \vec{g}_{(k)}}} = \frac{\vec{g}_k}{\sqrt{g_{(kk)}}}$$

  gilt für $\vec{a}$ in der kovarianten Einheitsbasis $\{\vec{e}_{u^k}\}$

$$\vec{a} = a^k \, \vec{g}_k = \tilde{a}^k \, \vec{e}_{u^k} = \tilde{a}^k \, \frac{\vec{g}_k}{\sqrt{g_{(kk)}}} \qquad \Rightarrow$$

$$a^k = \frac{\tilde{a}^k}{\sqrt{g_{(kk)}}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{a}^k = \sqrt{g_{(kk)}} \; a^k \; .$$

  Und mit

$$\vec{e}^{\,u^k} = \frac{\vec{g}^{\,k}}{|\vec{g}^{\,(k)}|} = \frac{\vec{g}^{\,k}}{\sqrt{\vec{g}^{\,(k)} \cdot \vec{g}^{\,(k)}}} = \frac{\vec{g}^{\,k}}{\sqrt{g^{(kk)}}}$$

  gilt für $\vec{a}$ in der kovarianten Einheitsbasis $\{\vec{e}_{u^k}\}$

$$\vec{a} = a_k \, \vec{g}^{\,k} = \tilde{a}_k \, \vec{e}^{\,u^k} = \tilde{a}_k \, \frac{\vec{g}^{\,k}}{\sqrt{g^{(kk)}}} \qquad \Rightarrow$$

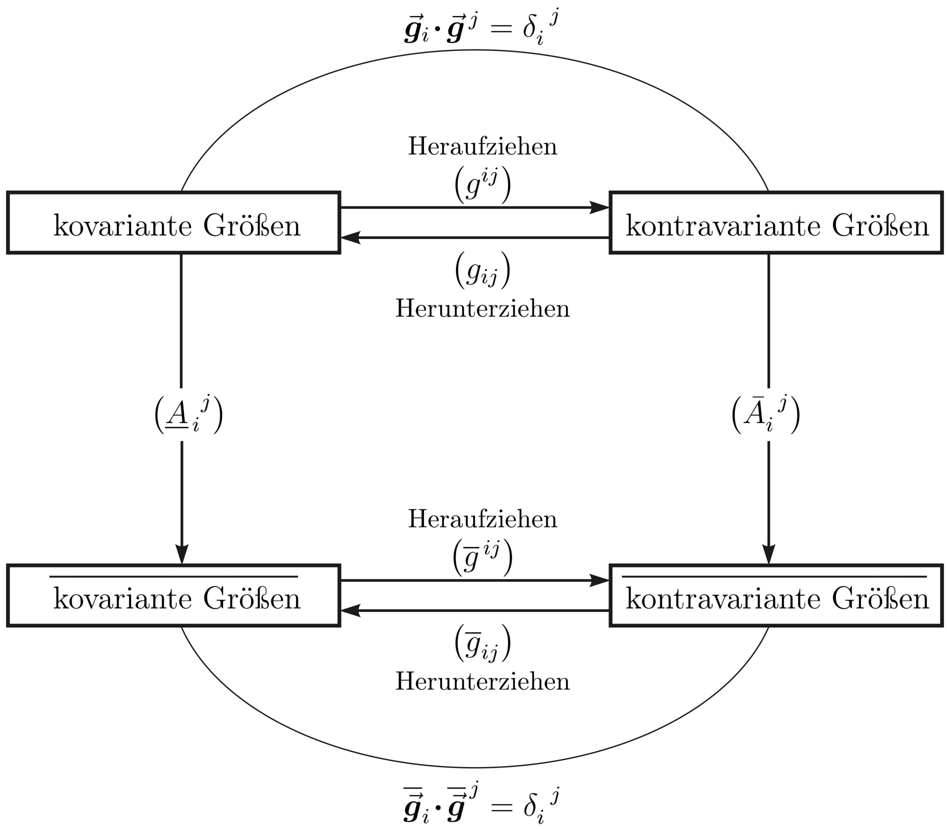
$$a_k = \frac{\tilde{a}_k}{\sqrt{g^{(kk)}}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{a}_k = \sqrt{g^{(kk)}} \; a_k \; .$$

- Nur in orthogonalen Koordinatensystemen besteht zwischen der Norm der holonomen kovarianten Basisvektoren $\vec{g}_k$ und der Norm der holonomen kontravarianten Basisvektoren $\vec{g}^{\,k}$ die reziproke Beziehung

$$\left|\vec{g}_k\right| \; = \; \frac{1}{\left|\vec{g}^{\,k}\right|} \; .$$

- Der metrische Tensor ist symmetrisch. Im speziellen Fall, dass alle Koordinatenlinien stets senkrecht aufeinander stehen (orthogonale und orthogonal-krummlinige Koordinatensysteme wie z. B. das Kugelkoordinatensystem) liefert der metrische Tensor eine Diagonalmatrix. Anders gesagt, wenn alle Cross-Terme, z. B. g_{13} oder g^{32}, gleich Null sind, stehen die zugehörigen Koordinatenlinien senkrecht aufeinander. In der Konsequenz daraus ergibt der metrische Tensor des kartesischen Koordinatensystems (orthogonal-geradliniges Koordinatensystem) die Einheitsmatrix.

- **Synopse: Transformation ko- und kontravarianter Größen**



$\left(\underline{A}_i^{\ j}\right)$ ist die Transformationsmatrix bezüglich der kovarianten Größen.
$\left(\bar{A}_i^{\ j}\right)$ ist die Transformationsmatrix bezüglich der kontravarianten Größen.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\left(g_{ij}\right) &\quad \text{invers zu} \quad \left(g^{ij}\right) \ , \\
\left(\overline{g}_{ij}\right) &\quad \text{invers zu} \quad \left(\overline{g}^{\,ij}\right) \ , \\
\left(\underline{A}_i^{\ j}\right) &\quad \text{invers zu} \quad \left(\bar{A}_i^{\ j}\right) \ .
\end{aligned}
$$

- **Die Indexstellung bei Transposition von Tensoren der Stufe 2**

  Die Komponenten von Tensoren der Stufe 2 lassen sich als Matrix schreiben.

  Entspricht beispielsweise der $(1,1)$-Tensor $A^i{}_j$ der Matrix A und der $(1,1)$-Tensor $B^i{}_j$ der Matrix B, so gilt für das Falck'sche Produkt der Matrizen A und B und in Analogie dazu für das innere Produkt der entsprechenden Tensorkomponenten

  $$A \cdot B \;=\; C \quad \longrightarrow \quad A^i{}_j\, B^j{}_k \;=\; C^i{}_k\,.$$

  Der Index j ist hier der (stumme) Summationsindex. Jetzt transponieren wir diese Gleichungen:

  $$\begin{aligned} (A \cdot B)^{\mathrm{T}} &= B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} \;=\; C^{\mathrm{T}} \quad \longrightarrow \\ \left(A^i{}_j\, B^j{}_k\right)^{\mathrm{T}} &= \left(B^j{}_k\right)^{\mathrm{T}} \left(A^i{}_j\right)^{\mathrm{T}} \\ &= B_k{}^j\, A_j{}^i \;=\; C_k{}^i\,. \end{aligned}$$

  Bezüglich der Indexposition bei Transposition von $(1,1)$-Tensoren können wir somit folgendes feststellen:

  $$A^i{}_j \xrightarrow{\text{Transposition}} A_j{}^i\,.$$

  Allgemein gilt demzufolge: Bei der Transposition eines Tensors der Stufe 2 wechseln dessen Indizes ihre horizontale Reihenfolge.

  Weil Tensoren in Komponentendarstellung bzw. Indexschreibweise weder Zeilen noch Spalten besitzen, kann man sie im Grunde genommen nicht transponieren. Im Zusammenhang damit steht auch die Tatsache, dass man die Reihenfolge der Faktoren beim inneren Tensorprodukt in Komponentendarstellung vertauschen darf – im Gegensatz zur Falck'schen Matrixmultiplikation, die nicht kommutativ ist:

  $$B^j{}_k\, A^i{}_j \;=\; A^i{}_j\, B^j{}_k \;=\; C^i{}_k\,, \quad \text{aber} \quad B \cdot A \;\neq\; A \cdot B \;=\; C\,.$$

  Vertauscht man bei Tensoren der Stufe 2 in Komponentendarstellung die beiden Indizes in der Horizontalen, geschieht das in Analogie zum Wechsel zwischen Zeilen- und Spaltenindex in der Matrixdarstellung. Auf diese Weise kann man zeigen, ob ein Tensor symmetrisch oder antisymmetrisch ist:

  $$\begin{aligned} T_{ij} &= T_{ji} \quad \Rightarrow \text{ symmetrisch}\,, \\ -T_{ij} &= T_{ji} \quad \Rightarrow \text{ antisymmetrisch}\,. \end{aligned}$$

5.14 Der metrische Tensor (Metriktensor)

Wir werden jetzt „zu Fuß“ und vereinfacht auf drei Dimensionen den metrischen Tensor g_{kl} herleiten. Es gelte:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^1}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \ ,\\
\mathrm{d}x^2 &= \frac{\partial x^2}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^2}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \ ,\\
\mathrm{d}x^3 &= \frac{\partial x^3}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \ ,
\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{d}s\right)^2 &= \left(\mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(\mathrm{d}x^3\right)^2 \\[1em]
&= \quad \frac{\partial x^1}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1\,\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^1}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1\,\frac{\partial x^1}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^1}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1\,\frac{\partial x^1}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \\
&\quad + \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2\,\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2\,\frac{\partial x^1}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2\,\frac{\partial x^1}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \\
&\quad + \frac{\partial x^1}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3\,\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^1}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3\,\frac{\partial x^1}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^1}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3\,\frac{\partial x^1}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \\[1em]
&\quad + \frac{\partial x^2}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1\,\frac{\partial x^2}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1\,\frac{\partial x^2}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^2}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1\,\frac{\partial x^2}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \\
&\quad + \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2\,\frac{\partial x^2}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2\,\frac{\partial x^2}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2\,\frac{\partial x^2}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \\
&\quad + \frac{\partial x^2}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3\,\frac{\partial x^2}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3\,\frac{\partial x^2}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^2}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3\,\frac{\partial x^2}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \\[1em]
&\quad + \frac{\partial x^3}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1\,\frac{\partial x^3}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^3}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1\,\frac{\partial x^3}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1\,\frac{\partial x^3}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \\
&\quad + \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2\,\frac{\partial x^3}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2\,\frac{\partial x^3}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2\,\frac{\partial x^3}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \\
&\quad + \frac{\partial x^3}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3\,\frac{\partial x^3}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 + \frac{\partial x^3}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3\,\frac{\partial x^3}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3\,\frac{\partial x^3}{\partial u^3}\,\mathrm{d}u^3 \ .
\end{aligned}$$

Die Zusammenfassung der Terme liefert

$$\left(\mathrm{d}s\right)^2 = \tag{5.46}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^1}+\frac{\partial x^2}{\partial u^1}\frac{\partial x^2}{\partial u^1}+\frac{\partial x^3}{\partial u^1}\frac{\partial x^3}{\partial u^1}\right)}_{g_{11}}\ \mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^1$$
$$+\ \underbrace{\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^2}+\frac{\partial x^2}{\partial u^1}\frac{\partial x^2}{\partial u^2}+\frac{\partial x^3}{\partial u^1}\frac{\partial x^3}{\partial u^2}\right)}_{g_{12}}\ \mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2$$
$$+\ \underbrace{\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\frac{\partial x^1}{\partial u^3}+\frac{\partial x^2}{\partial u^1}\frac{\partial x^2}{\partial u^3}+\frac{\partial x^3}{\partial u^1}\frac{\partial x^3}{\partial u^3}\right)}_{g_{13}}\ \mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^3$$
$$+\ \underbrace{\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}\frac{\partial x^1}{\partial u^1}+\frac{\partial x^2}{\partial u^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^1}+\frac{\partial x^3}{\partial u^2}\frac{\partial x^3}{\partial u^1}\right)}_{g_{21}}\ \mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^1$$
$$+\ \underbrace{\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}\frac{\partial x^1}{\partial u^2}+\frac{\partial x^2}{\partial u^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^2}+\frac{\partial x^3}{\partial u^2}\frac{\partial x^3}{\partial u^2}\right)}_{g_{22}}\ \mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^2$$
$$+\ \underbrace{\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^2}\frac{\partial x^1}{\partial u^3}+\frac{\partial x^2}{\partial u^2}\frac{\partial x^2}{\partial u^3}+\frac{\partial x^3}{\partial u^2}\frac{\partial x^3}{\partial u^3}\right)}_{g_{23}}\ \mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3$$
$$+\ \underbrace{\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^3}\frac{\partial x^1}{\partial u^1}+\frac{\partial x^2}{\partial u^3}\frac{\partial x^2}{\partial u^1}+\frac{\partial x^3}{\partial u^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^1}\right)}_{g_{31}}\ \mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^1$$
$$+\ \underbrace{\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^3}\frac{\partial x^1}{\partial u^2}+\frac{\partial x^2}{\partial u^3}\frac{\partial x^2}{\partial u^2}+\frac{\partial x^3}{\partial u^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^2}\right)}_{g_{32}}\ \mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^2$$
$$+\ \underbrace{\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^3}\frac{\partial x^1}{\partial u^3}+\frac{\partial x^2}{\partial u^3}\frac{\partial x^2}{\partial u^3}+\frac{\partial x^3}{\partial u^3}\frac{\partial x^3}{\partial u^3}\right)}_{g_{33}}\ \mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^3\ ,$$

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{d}s\right)^2 \quad = \quad & g_{11}\ \mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^1 + g_{12}\ \mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 + g_{13}\ \mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^3 \\ & + g_{21}\ \mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^1 + g_{22}\ \mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^2 + g_{23}\ \mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 \\ & + g_{31}\ \mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^1 + g_{32}\ \mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^2 + g_{33}\ \mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^3\ .\end{aligned}\tag{5.47}$$

Mit $\mathrm{d}u^k\,\mathrm{d}u^l = \mathrm{d}u^l\,\mathrm{d}u^k$ können wir jetzt (5.47) als Matrizengleichung schreiben:

$$
\begin{aligned}
\left(\mathrm{d}s\right)^2 &= \left[\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}u^1 \\ \mathrm{d}u^2 \\ \mathrm{d}u^3 \end{pmatrix}\right]^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}u^1 \\ \mathrm{d}u^2 \\ \mathrm{d}u^3 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11}\,\mathrm{d}u^1 & + & g_{12}\,\mathrm{d}u^2 & + & g_{13}\,\mathrm{d}u^3 \\ g_{21}\,\mathrm{d}u^1 & + & g_{22}\,\mathrm{d}u^2 & + & g_{23}\,\mathrm{d}u^3 \\ g_{31}\,\mathrm{d}u^1 & + & g_{32}\,\mathrm{d}u^2 & + & g_{33}\,\mathrm{d}u^3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}}_{\sum\limits_{l=1}^{3} g_{kl}\,\mathrm{d}u^l \text{ für } k = 1,\ 2,\ 3} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}u^1 \\ \mathrm{d}u^2 \\ \mathrm{d}u^3 \end{pmatrix} \\
&= \quad g_{11}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^1 + g_{12}\,\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^1 + g_{13}\,\mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^1 \\
&\quad + g_{21}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2 + g_{22}\,\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^2 + g_{23}\,\mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^2 \\
&\quad + g_{31}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^3 + g_{32}\,\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3 + g_{33}\,\mathrm{d}u^3\mathrm{d}u^3 \\
&= \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{l=1}^{3} g_{kl}\,\mathrm{d}u^l\right)\mathrm{d}u^k \\
\left(\mathrm{d}s\right)^2 &= g_{kl}\,\mathrm{d}u^k\,\mathrm{d}u^l\ . \qquad (5.48)
\end{aligned}
$$

In (5.48) sind die Indizes k und l stumm, weil sie bei der Summation verschwinden. $\mathrm{d}s$ ist also indexfrei, ein Skalar, weil über alle Indizes summiert wird. Der metrische Tensor g_{kl} ist in Matrixschreibweise

$$
\left(g_{kl}\right) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}\ .
$$

Man erhält den metrischen Tensor $g = \left(g_{kl}\right) := g_{kl}$ ganz einfach aus der Jakobimatrix gemäß

$$
J^{\mathrm{T}} \cdot J = g \quad \text{bzw.} \quad \left(\vec{g}_k\right)^{\mathrm{T}} \cdot \vec{g}_l = g_{kl}\ .
$$

Im Abschnitt 5.6 hatten wir dargestellt, dass das Falk'sche Produkt aus kovariantem und kontravariantem metrischen Tensor in Marixschreibweise die Einheitsmatrix liefert und demzufolge sowohl symmetrisch als auch seine eigene Inverse ist:

$$
\boxed{\quad g_k{}^m = g_k^m = \delta_k^m \quad}\ .
$$

Bei symmetrischen Tensoren braucht man die übereinander stehenden Indizes nicht horizontal versetzt zu schreiben. Aus (5.46) können wir entnehmen, dass der metrische

Tensor g wegen $\frac{\partial a}{\partial b}\frac{\partial a}{\partial c} = \frac{\partial a}{\partial c}\frac{\partial a}{\partial b}$ **symmetrisch** ist, sodass

$$\boxed{g_{kl} = \left(g_{kl}\right)^{\mathrm{T}} = g_{lk} \quad \text{bzw.} \quad g^{kl} = \left(g^{kl}\right)^{\mathrm{T}} = g^{lk}} \; .$$

Beispielsweise ist

$$\vec{g}_2 \cdot \vec{g}_3 = \vec{g}_3 \cdot \vec{g}_2 = \frac{\partial x^1\, \partial x^1}{\partial u^2\, \partial u^3} + \frac{\partial x^2\, \partial x^2}{\partial u^2\, \partial u^3} + \frac{\partial x^3\, \partial x^3}{\partial u^2\, \partial u^3} = g_{23} = g_{32} \; .$$

Analog gilt für den kontravarianten metrischen Tensor z. B.

$$\vec{g}^2 \cdot \vec{g}^1 = \vec{g}^1 \cdot \vec{g}^2 = \frac{\partial u^2\, \partial u^1}{\partial x^1\, \partial x^1} + \frac{\partial u^2\, \partial u^1}{\partial x^2\, \partial x^2} + \frac{\partial u^2\, \partial u^1}{\partial x^3\, \partial x^3} = g^{21} = g^{12} \; .$$

Weiterhin ist der kontravariante metrische Tensor g^{kl} die **Inverse** zum (kovarianten) metrischen Tensor g_{kl}, sodass

$$\boxed{\begin{array}{rcl} g^{kl} & = & \left(g_{kl}\right)^{-1} \\ g_{kl}\, g^{lm} & = & g_k{}^m \; = \; \delta_k^m \end{array}} \; . \tag{5.49}$$

Oft benötigt werden der ko- und der kontravariante Metriktensor des ebenen (orthogonalen) Polarkoordinatensystems:

$$\left(g_{ij}\right) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \; , \qquad \left(g^{ij}\right) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \; ,$$

der ko- und kontravariante Metriktensor des (orthogonalen) Kugelkoordinatensystems:

$$\left(g_{ij}\right) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix} \; , \qquad \left(g^{ij}\right) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \end{pmatrix}$$

sowie der ko- und kontravariante Metriktensor der Kugeloberfläche als 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ mit $r = R = \mathrm{const}$:

$$\left(g_{ij}\right) \; = \; \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix} \; , \qquad \left(g^{ij}\right) \; = \; \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2\vartheta} \end{pmatrix} \; .$$

5.15 Beispiel

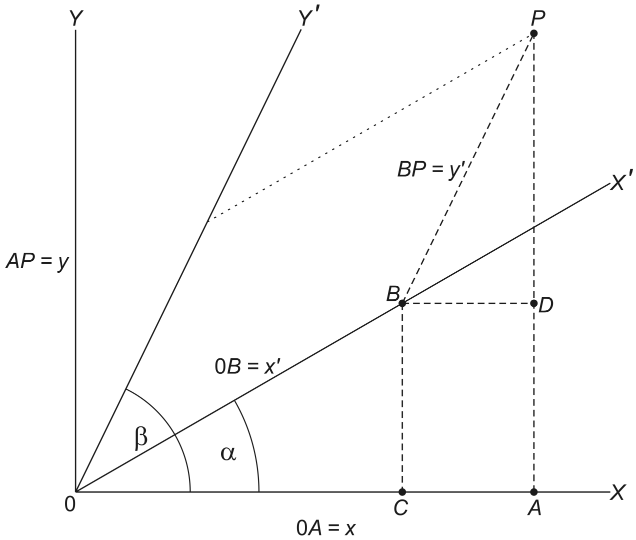


Abb. 5.4 Transformation eines rechtwinkligen in ein schiefwinkliges Koordinatensystem.

$$\left.\begin{aligned} x &= OA = OC + CA = OC + BD \\ y &= PA = PD + DA = PD + BC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x\left(x', y'\right) &= \overbrace{x' \cos\alpha}^{OC} + \overbrace{y' \cos\beta}^{BD} \\ y\left(x', y'\right) &= \underbrace{x' \sin\alpha}_{BC} + \underbrace{y' \sin\beta}_{PD} \end{aligned}$$

(Abbildung und Legende nach Wilhelm Bauer und Erich v. Hanxleiden, Lehrbuch der Mathematik für Realanstalten, Oberstufe der Geometrie, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1913, Seite 261, Abbildung 51.)

Als einfaches Beispiel wählen wir ein schiefwinklig-geradliniges Koordinatensystem in der Ebene, d. h. in zwei Dimensionen (s. Abb. 5.4). Auf der Grundlage von Abb. 5.5 resultieren die Koordinaten-Transformationsgleichungen und -Rücktranformationsgleichungen in unserer Notation durch Lösen des inhomogenen Gleichungssystems aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen mittels Äquivalenzumformung und entsprechenden Einsetzens wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} &\qquad x^i(u^k) \\ x^1 &= \cos\alpha \cdot u^1 + \cos\beta \cdot u^2 \\ x^2 &= \sin\alpha \cdot u^1 + \sin\beta \cdot u^2 \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} &\qquad u^k(x^i) \\ u^1 &= \frac{\sin\beta \cdot x^1 - \cos\beta \cdot x^2}{\cos\alpha\,\sin\beta - \cos\beta\,\sin\alpha} \\ u^2 &= \frac{-\sin\alpha \cdot x^1 + \cos\alpha \cdot x^2}{\cos\alpha\,\sin\beta - \cos\beta\,\sin\alpha} \end{aligned}\right.$$

Absichtlich nicht symmetrisch zur x- und y-Achse seien die Winkel

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha = 30° \quad &\Rightarrow \quad \cos 30° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,, \quad \sin 30° = 0,50\,, \\ \beta = 64° \quad &\Rightarrow \quad \cos 64° \approx 0,44\,, \quad \sin 64° \approx 0,90\,. \end{aligned}}$$

Symmetrisch gewählte Winkel wären z. B. $\alpha = 30°$ und $\beta = 60°$.

5.15.1 Berechnung der holonomen Basisvektoren

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial u^1}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^1}\,\vec{e}_2 = \cos\alpha \cdot \vec{e}_1 + \sin\alpha \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \ , \\
\vec{g}_2 &= \frac{\partial x^1}{\partial u^2}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^2}\,\vec{e}_2 = \cos\beta \cdot \vec{e}_1 + \sin\beta \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{g}^{\,1} &= \frac{\partial u^1}{\partial x^1}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^2}\,\vec{e}_2 = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha\,\sin\beta - \cos\beta\,\sin\alpha}\,\vec{e}_1 + \frac{-\cos\beta}{\cos\alpha\,\sin\beta - \cos\beta\,\sin\alpha}\,\vec{e}_2 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sin\beta}{\cos\alpha\,\sin\beta - \sin\alpha\,\cos\beta} \\ \frac{-\cos\beta}{\cos\alpha\,\sin\beta - \sin\alpha\,\cos\beta} \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{g}^{\,2} &= \frac{\partial u^2}{\partial x^1}\,\vec{e}_1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\,\vec{e}_2 = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha\,\sin\beta - \cos\beta\,\sin\alpha}\,\vec{e}_1 + \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha\,\sin\beta - \cos\beta\,\sin\alpha}\,\vec{e}_2 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha\,\sin\beta - \sin\alpha\,\cos\beta} \\ \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha\,\sin\beta - \sin\alpha\,\cos\beta} \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0,50 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ |\vec{g}_1| = 1 \ , \qquad \vec{g}^{\,1} \approx \begin{pmatrix} 1,61 \\ -0,78 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ |\vec{g}^{\,1}| \approx 1,79 \ , \\
\vec{g}_2 &\approx \begin{pmatrix} 0,44 \\ 0,90 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ |\vec{g}_2| = 1 \ , \qquad \vec{g}^{\,2} \approx \begin{pmatrix} -0,89 \\ 1,55 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ |\vec{g}^{\,2}| \approx 1,79 \ .
\end{aligned}$$

Wie wir sehen, verhalten sich die Längen der entsprechenden holonomen ko- und kontravarianten Basisvektoren, also $|\vec{g}_1|$, $|\vec{g}^{\,1}|$ und $|\vec{g}_2|$, $|\vec{g}^{\,2}|$, nicht reziprok zueinander. Dies ist nur bei orthogonalen Koordinatensystemen der Fall. Der Vollständigkeit halber zeigen wir noch die Beziehung

$$\vec{g}_k \cdot \vec{g}^{\,l} = \delta_k^l$$

zwischen ko- und kontravarianten Basisvektoren für unser Beispiel:

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 \cdot \vec{g}^{\,1} = 1 &\approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,61 \\ -0,78 \end{pmatrix} \ , \\
\vec{g}_1 \cdot \vec{g}^{\,2} = 0 &\approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,89 \\ 1,55 \end{pmatrix} \ , \\
\vec{g}_2 \cdot \vec{g}^{\,1} = 0 &\approx \begin{pmatrix} 0,44 \\ 0,90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,61 \\ -0,78 \end{pmatrix} \ , \\
\vec{g}_2 \cdot \vec{g}^{\,2} = 1 &\approx \begin{pmatrix} 0,44 \\ 0,90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,89 \\ 1,55 \end{pmatrix} \ .
\end{aligned}$$

5.15.2 Berechnung der Jacobi-Matrix

Jacobi-Matrix:

$$J = \left(\vec{g}_1\,,\,\vec{g}_2\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0{,}44 \\ 0{,}50 & 0{,}90 \end{pmatrix}\ .$$

Inverse Jacobi-Matrix:

$$\begin{aligned} J^{-1} = \left(\vec{g}^{\,1}\,,\,\vec{g}^{\,2}\right)^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\alpha\,\sin\beta - \sin\alpha\,\cos\beta} \begin{pmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 1{,}61 & -0{,}78 \\ -0{,}89 & 1{,}55 \end{pmatrix}\ . \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass $J^{-1}J = \mathbb{1}$ gilt.

5.15.3 Berechnung des metrischen Tensors

Der metrische Tensor in Matrixschreibweise ist

$$\big(g_{kl}\big) = \begin{pmatrix} \vec{g}_1\cdot\vec{g}_1 & \vec{g}_1\cdot\vec{g}_2 \\ \vec{g}_2\cdot\vec{g}_1 & \vec{g}_2\cdot\vec{g}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha+\cos^2\alpha & \cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta \\ \cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta & \sin^2\beta+\cos^2\beta \end{pmatrix}$$

$$\big(g_{kl}\big) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}83 \\ 0{,}83 & 1 \end{pmatrix} .$$

Der inverse metrische Tensor in Matrixschreibweise ist

$$\big(g^{kl}\big) = \begin{pmatrix} \vec{g}^{\,1}\cdot\vec{g}^{\,1} & \vec{g}^{\,1}\cdot\vec{g}^{\,2} \\ \vec{g}^{\,2}\cdot\vec{g}^{\,1} & \vec{g}^{\,2}\cdot\vec{g}^{\,2} \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{(\cos\alpha\,\sin\beta-\sin\alpha\,\cos\beta)^2} \begin{pmatrix} \sin^2\beta+\cos^2\beta & -\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta \\ -\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\big(g^{kl}\big) \approx \begin{pmatrix} 3{,}20 & -2{,}65 \\ -2{,}65 & 3{,}20 \end{pmatrix} .$$

Unter Verwendung der Additionstheoreme, mit $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma = 1$ sowie mit

$$\sin^2(\alpha-\beta) = \Big\{\sin\big[-(\beta-\alpha)\big]\Big\}^2 = \Big\{-\sin(\beta-\alpha)\Big\}^2 = \sin^2(\beta-\alpha)$$

lässt sich leicht zeigen, dass

$$\big(g_{kl}\big)\,\big(g^{lm}\big) =$$

$$= \frac{1}{(\cos\alpha\,\sin\beta-\sin\alpha\,\cos\beta)^2}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \begin{matrix} +(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\beta+\cos^2\beta) \\ -(\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta)^2 \end{matrix} & \begin{matrix} -(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta) \\ +(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta) \end{matrix} \\ \\ \begin{matrix} +(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta) \\ -(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta) \end{matrix} & \begin{matrix} -(\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta)^2 \\ +(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\beta+\cos^2\beta) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{1}\ .\ \square$$

Unabhängig vom Koordinatensystem sind sowohl der kovariante metrische Tensor g_{kl} als auch der dazu inverse kontravariante metrische Tensor g^{kl} symmetrisch.

5.15.4 Darstellung eines Ortsvektors in der kovarianten Basis

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wollen wir aus Gründen der Bequemlichkeit statt eines ungebundenen Vektors den kartesischen (gebundenen) Ortsvektor $\vec{r} = \binom{4}{3}$ mit der Länge 5 benutzen (s. Abb. 5.5). Wir dürfen dann nämlich auf das Δ verzichten und schreiben für die Vektorkomponenten z. B.

$$x^i \text{ statt } \Delta x^i \equiv \underset{(x)}{a^i} \quad \text{und} \quad u^k \text{ statt } \Delta u^k \equiv \underset{(u)}{a^k}\,.$$

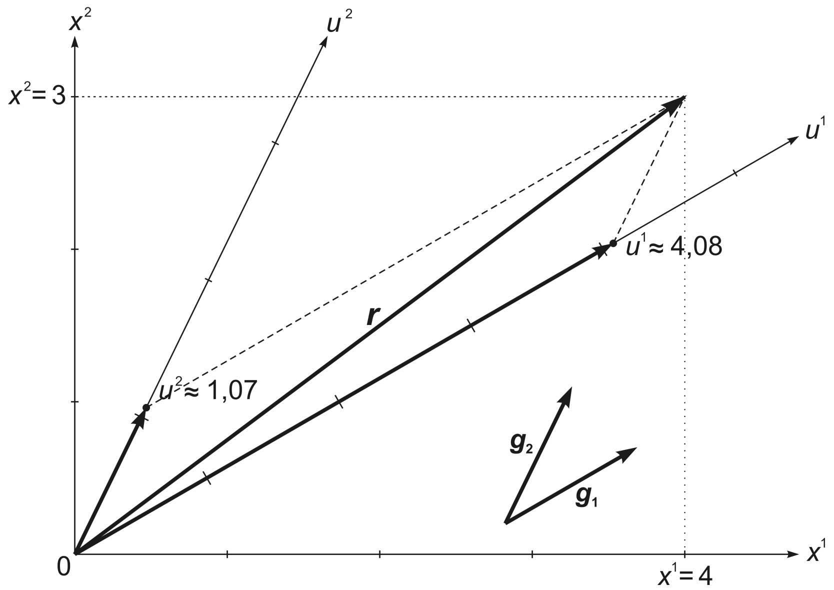


Abb. 5.5 Zerlegung des Ortsvektors $\vec{r}$ durch Parallelprojektion auf die Achsen des schiefwinklig-geradlinigen Koordinatensystems U in seine holonomen kontravarianten Vektorkomponenten u^1 und u^2 bzw. Darstellung von $\vec{r}$ in der zugehörigen holonomen kovarianten Vektorbasis $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$, also durch die Vektorkomponentensumme

$$u^1 \cdot \vec{g}_1 + u^2 \cdot \vec{g}_2 \approx 4,08 \cdot \binom{\sqrt{3}/2}{0{,}50} + 1,07 \cdot \binom{0{,}44}{0{,}90} \approx \binom{4}{3} = \vec{r}.$$

Die Länge der Vektorkomponenten in der kovarianten Basis ist

$$u^1 \cdot |\vec{g}_1| \approx 4,08 \cdot 1 = 4,08\,,$$
$$u^2 \cdot |\vec{g}_2| \approx 1,07 \cdot 1 = 1,07\,.$$

Zur Darstellung des Ortsvektors

$$\boxed{\vec{r} = x^1\,\vec{e}_1 + x^2\,\vec{e}_2 = 4\,\vec{e}_1 + 3\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{r}| = 5}$$

transformieren wir die gegebenen kartesischen Vektorkomponenten $\underset{(x)}{a^i} \equiv x^i$ gemäß (5.8) und (5.35) von X nach U in die entsprechenden kontravarianten Vektorkomponenten $\underset{(u)}{a^k} \equiv u^k$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4,08 \\ 1,07 \end{pmatrix}\,.$$

5.15.5 Darstellung eines Ortsvektors in der kontravarianten Basis

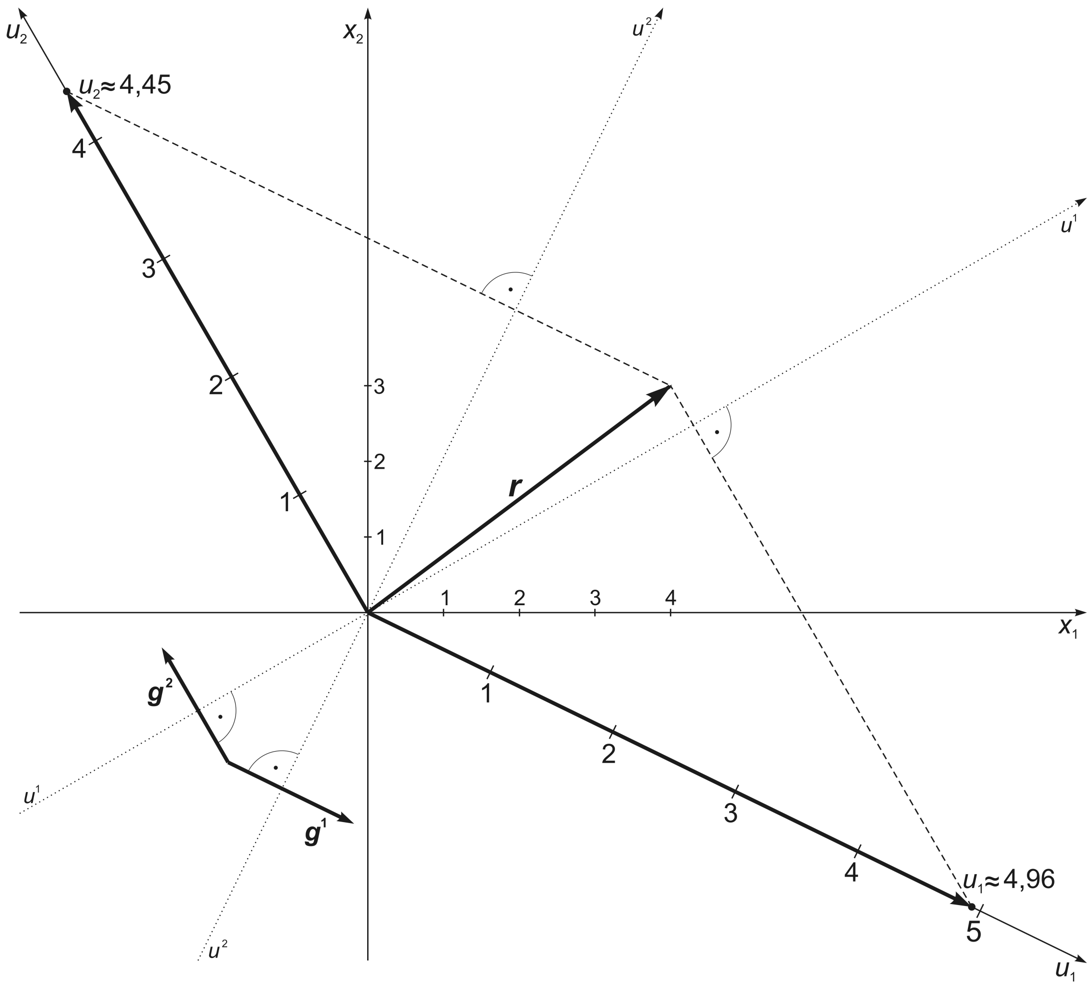


Abb. 5.6 **Achtung**! Aus Platzgründen wurde für diese Abbildung ein anderer Maßstab gewählt als für die Abbildung 5.5, sodass der Ortsvektor $\vec{r}$ hier im Vergleich nur halb so lang dargestellt ist.
Zerlegung des Ortsvektors $\vec{r}$ durch orthogonale Projektion auf die Achsen des schiefwinklig-geradlinigen Koordinatensystems U in seine holonomen kovarianten Vektorkomponenten u_1 und u_2 bzw. Darstellung von $\vec{r}$ in der zugehörigen holonomen kontravarianten Vektorbasis $\{\vec{g}^{\,1},\, \vec{g}^{\,2}\}$, also durch die Vektorkomponentensumme

$$u_1 \cdot \vec{g}^{\,1} + u_2 \cdot \vec{g}^{\,2} \approx 4,96 \cdot \binom{1{,}61}{-0{,}78} + 4,45 \cdot \binom{-0{,}89}{1{,}55} \approx \binom{4}{3} = \vec{r}\,.$$

Die Länge der Vektorkomponenten in der kontravarianten Basis ist

$$u_1 \cdot |\vec{g}^{\,1}| \approx 4,96 \cdot 1,79 \approx 8,88\,,$$
$$u_2 \cdot |\vec{g}^{\,2}| \approx 4,45 \cdot 1,79 \approx 7,96\,.$$

Zum besseren Vergleich mit der Vektordarstellung in der kovarianten Basis benutzen wir wieder den kartesischen Ortsvektor $\vec{r} = \binom{4}{3}$ und transformieren jetzt die gegebenen kartesischen Vektorkomponenten $\underset{(x)}{a_i} \equiv x_i$ gemäß (5.12) und (5.36) von X nach U

in die entsprechenden kovarianten Vektorkomponenten $\underset{(u)}{a}_k \equiv u_k$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = J^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4,96 \\ 4,45 \end{pmatrix} .$$

Wir überprüfen unser Ergebnis mit (5.45), denn das Skalarprodukt aus den ko- und kontravarianten Komponenten des Vektors $\vec{r}$ ist gleich dem Normquadrat bzw. Längenquadrat von $\vec{r}$ und muss demzufolge 25 ergeben:

$$|\vec{r}\,|^2 = g_{kl}\, u^l u^k = u_k u^k = u_1 u^1 + u_2 u^2 \approx 4,96 \cdot 4,08 + 4,45 \cdot 1,07 \approx 25 \ . \ \square$$

Quellen

- YouTube: Vorlesungsreihe von Prof. Dr. Paul Wagner, Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung I, Fakultät für Physik, Universität Wien
- Cornelius C. Noack, Tensoranalysis – eine Einführung, Universität Bremen, Institut für Theoretische Physik, 2001 (ist aus dem Internet herunterzuladen)
- Henry Margenau und George Moseley Murphy, Die Mathematik für Physik und Chemie, Band I, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 2. Aufl., Leipzig, 1964, Abschnitt 5.16 Tensorbeziehungen in krummlinigen Koordinaten, Seite 242 bis Seite 246
- http://de.wikipedia.org/wiki/Krummlinige_Koordinaten
- Wolfgang H. Müller, Grundlagen der Kontinuumstheorie I / Tensoranalysis, Technische Universität Berlin (ist aus dem Internet herunterzuladen)
- http://de.wikibooks.org/wiki/Einführung_in_die_Tensorrechnung:_Kontravariante_und_kovariante_örtliche_Basissysteme
- http://de.wikibooks.org/wiki/Einführung_in_die_Tensorrechnung:_Lösungen_A
- http://walter.bislins.ch/physik/index.asp?page=Allgemeine+Relativit%E4tstheorie
- http://www.ifm.tu-berlin.de/fileadmin/fg49/lehre1314/Kontinuumsphysik/Dreyer-Tensoranalysis.pdf
- Christian B. Lang und Norbert Pucker, Mathematische Methoden in der Physik, Hochschultaschenbuch, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1998, Seite 340 bis Seite 347
- *Weiterführend und sehr anschaulich:*
  Michael Ruhrländer, Aufstieg zu den Einsteingleichungen – Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, Pro Business, Berlin, 2014

6 Levi-Civita-Symbol, Pseudotensoren, vektorielles Produkt

6.1 Definition des epsilon-Tensors

Definition des kovarianten ε-Tensors 3. Stufe im 3-dimensionalen Raum:

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} \; := \; \underset{+}{\sqrt{g}} \cdot \varepsilon(i,j,k) \quad \text{für} \quad g > 0} \; .$$

$\underset{+}{\sqrt{g}}$ ist die positive Wurzel aus $g := \det\big(g_{ij}\big)$.
$\varepsilon(i,j,k)$ ist das **Levi-Civita-Symbol**, das wie folgt definiert ist:

$$\varepsilon(i,j,k) \; = \; \begin{cases} +1 \;, & \text{falls } (i,j,k) \text{ gerade Permutationen von } (1,2,3) \;, \\ -1 \;, & \text{falls } (i,j,k) \text{ ungerade Permutationen von } (1,2,3) \;, \\ \;\;0 \;, & \text{sonst bzw. falls mindestens zwei Indizes gleich sind} \;. \end{cases} \tag{6.1}$$

Der ε-Tensor ist vollständig antisymmetrisch, d. h er ist in allen seinen drei Indizes antisymmetrisch:

$$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{132} \;, \quad \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} \;, \quad \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{321} \;.$$

Definition des kontravarianten ε-Tensors 3. Stufe im 3-dimensionalen Raum:

$$\boxed{\varepsilon^{ijk} \; := \; \frac{1}{\underset{+}{\sqrt{g}}} \cdot \varepsilon(i,j,k) \quad \text{für} \quad g > 0} \; ,$$

denn die Inverse von $\big(g_{ij}\big)$ ist $\big(g^{ij}\big)$ und die Determinante einer inversen Matrix ist gleich dem Kehrwert der Determinante der zugehörigen ursprünglichen Matrix, sodass mit

$$\det\big(g_{ij}\big) = g \quad \Rightarrow \quad \det\big(g^{ij}\big) = \frac{1}{g}$$

und mit (6.6) folgendes gilt:

$$\varepsilon^{lmn} \; = \; g^{li}g^{mj}g^{nk}\,\varepsilon_{ijk} \; = \; g^{li}g^{mj}g^{nk} \cdot \underset{+}{\sqrt{g}} \cdot \varepsilon(i,j,k) \; = \; \underset{+}{\sqrt{g}} \cdot \underbrace{g^{li}g^{mj}g^{nk}\,\varepsilon(i,j,k)}_{\text{siehe (6.6)}}$$

$$= \; \underset{+}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{g}\,\varepsilon(l,m,n) \; = \; \frac{1}{\underset{+}{\sqrt{g}}} \cdot \varepsilon(l,m,n) \quad \text{für} \;\; g > 0 \;. \;\; \square$$

6.2 Darstellung von Determinanten mit dem Levi-Civita-Symbol

Mit dem Levi-Civita-Symbol lassen sich die Determinanten von quadratischen Matrizen darstellen. Besteht eine Matrix V aus den (kontravarianten) Spaltenvektoren $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}$, $\vec{\boldsymbol{w}}$, dann erhalten wir ihre Determinante beispielsweise durch Entwicklung nach der 1. Spalte wie folgt:

$$\det V \;=\; \det\Big(\vec{\boldsymbol{u}}\big|\vec{\boldsymbol{v}}\big|\vec{\boldsymbol{w}}\Big) \;=\; \det\begin{pmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{pmatrix} \;=\; \left\{\begin{array}{l} +\,u^{\mathbf{1}}v^{\mathbf{2}}w^{\mathbf{3}} - u^{\mathbf{1}}v^{\mathbf{3}}w^{\mathbf{2}} \,+ \\ +\,u^{\mathbf{2}}v^{\mathbf{3}}w^{\mathbf{1}} - u^{\mathbf{2}}v^{\mathbf{1}}w^{\mathbf{3}} \,+ \\ +\,u^{\mathbf{3}}v^{\mathbf{1}}w^{\mathbf{2}} - u^{\mathbf{3}}v^{\mathbf{2}}w^{\mathbf{1}} \;\;, \end{array}\right.$$

$$\det V \;=\; u^1v^2w^3 - u^1v^3w^2 + u^2v^3w^1 - u^2v^1w^3 + u^3v^1w^2 - u^3v^2w^1 \;,$$

$$\det\Big(\vec{\boldsymbol{u}}\big|\vec{\boldsymbol{v}}\big|\vec{\boldsymbol{w}}\Big) \;=\; u^i\, v^j\, w^k\, \varepsilon(i,j,k) \;, \tag{6.2}$$

was man durch sukzessives Einsetzen von $\{1,2,3\}$ für die Indizes i, j und k und anschließendes Aufsummieren der Glieder $u^i\, v^j\, w^k$ unter Beachtung von (6.1) verifizieren kann. Es verbleiben wegen (6.1) nur $3! = 6$ Summanden, 3 mit positivem und 3 mit negativem Vorzeichen. Völlig analog dazu ist die Entwicklung der Determinante der Matrix $A = \big(A^{rs}\big)$ nach der 1. Spalte, wobei wir hier die Matrixelemente nicht nur mit den Zeilen- sondern auch mit den Spaltenindizes versehen:

$$\begin{aligned} \det\big(A^{rs}\big) \;&=\; \det\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} \\ &=\; \left\{\begin{array}{l} +\,A^{11}\cdot\big(A^{22}\,A^{33} - A^{32}\,A^{23}\big) \\ -\,A^{21}\cdot\big(A^{12}\,A^{33} - A^{32}\,A^{13}\big) \\ +\,A^{31}\cdot\big(A^{12}\,A^{23} - A^{22}\,A^{13}\big) \end{array}\right. \\ &=\; \left\{\begin{array}{l} +\,A^{\mathbf{11}}\,A^{\mathbf{22}}\,A^{\mathbf{33}} \;-\; A^{\mathbf{11}}\,A^{\mathbf{32}}\,A^{\mathbf{23}} \;+ \\ +\,A^{\mathbf{21}}\,A^{\mathbf{32}}\,A^{\mathbf{13}} \;-\; A^{\mathbf{21}}\,A^{\mathbf{12}}\,A^{\mathbf{33}} \;+ \\ +\,A^{\mathbf{31}}\,A^{\mathbf{12}}\,A^{\mathbf{23}} \;-\; A^{\mathbf{31}}\,A^{\mathbf{22}}\,A^{\mathbf{13}} \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\det\big(A^{rs}\big) \;=\; A^{11}A^{22}A^{33} - A^{11}A^{32}A^{23} + A^{21}A^{32}A^{13} - A^{21}A^{12}A^{33} + A^{31}A^{12}A^{23} - A^{31}A^{22}A^{13} \;.$$

Mit dem Levi-Civita-Symbol vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\det\big(A^{rs}\big) \;:=\; A^{i1}\,A^{j2}\,A^{k3}\;\varepsilon(i,j,k) \;. \tag{6.3}$$

Weil sich die Determinante durch Spiegelung der zugehörigen Matrix an der Hauptdiagonalen (durch Stürzen oder durch Transponieren) gemäß

$$\det A \;=\; \det\big(A^{rs}\big) \;=\; \det A^{\mathrm{T}} \;=\; \det\big(A^{sr}\big) \tag{6.4}$$

nicht ändert, gilt ebenfalls

$$\det\big(A^{rs}\big) \;:=\; A^{1i}\,A^{2j}\,A^{3k}\;\varepsilon(i,j,k) \;. \tag{6.5}$$

Die Verallgemeinerung auf Determinanten von $n \times n$-Matrizen lautet

$$\det A^{(n\times n)} := \varepsilon(j_1,\dots,j_n)\,A^{1\,j_1}\cdots A^{n\,j_n} \quad \text{für} \begin{cases} \varepsilon(1,2,\dots,n) & = 1\,, \\ \varepsilon(i,j,\dots,l,\dots,m,\dots) & = -\varepsilon(i,j,\dots,m,\dots,l,\dots)\,, \\ \varepsilon(i,j,\dots,k,\dots,k,\dots) & = 0\,. \end{cases}$$

Während in (6.2) die Buchstaben u, v, w den Spaltenindizes $1,2,3$ entsprechen, wurden die Matrixelemente in (6.3) und (6.5) sowohl mit dem Zeilen- als auch mit dem Spaltenindex versehen.

Was passiert jetzt mit der Determinante, wenn wir in (6.3) z. B. die Spaltenindizes $1,2,3$ permutieren oder wenn ein Spalten- oder ein Zeilenindex mehrfach auftritt? Betrachten wir zunächst den Fall, dass der Spaltenindex 2 und damit die 2. Spalte doppelt auftritt: $\quad l=2,\ m=2,\ n=3\ :$

$$\det\begin{pmatrix} A^{12} & A^{12} & A^{13} \\ A^{22} & A^{22} & A^{23} \\ A^{32} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix} =$$

$$= A^{12}A^{22}A^{33} - A^{12}A^{32}A^{23} + A^{22}A^{32}A^{13} - A^{22}A^{12}A^{33} + A^{32}A^{12}A^{23} - A^{32}A^{22}A^{13} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(i,j,k)\;A^{i2}\,A^{j2}\,A^{k3} \;=\; 0 \quad \text{entsprechend} \quad \varepsilon(2,2,3) = 0\,.$$

Jetzt vertauschen wir den Spaltenindex 1 mit dem Spaltenindex 2, also die erste mit der zweiten Spalte,
d. h. $\quad l=2,\ m=1,\ n=3\ :$

$$\det\begin{pmatrix} A^{12} & A^{11} & A^{13} \\ A^{22} & A^{21} & A^{23} \\ A^{32} & A^{31} & A^{33} \end{pmatrix} =$$

$$= A^{12}A^{21}A^{33} - A^{12}A^{31}A^{23} + A^{22}A^{31}A^{13} - A^{22}A^{11}A^{33} + A^{32}A^{11}A^{23} - A^{32}A^{21}A^{13} = -\det\big(A^{rs}\big)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon(i,j,k)\;A^{i2}\,A^{j1}\,A^{k3} \;=\; -\det\big(A^{rs}\big) \quad \text{entsprechend} \quad \varepsilon(2,1,3) = -1\,.$$

Wir sehen, dass nach den Regeln der Determinantenrechnung eine Determinante verschwindet, wenn zwei Reihen (2 Zeilen- oder 2 Spaltenindizes) übereinstimmen, und dass sich das Vorzeichen einer Determinante umkehrt, wenn zwei parallele Reihen miteinander (2 Zeilenindizes miteinander oder 2 Spaltenindizes miteinander) vertauscht werden. Genau dieser Sachverhalt wird aber durch das Levi-Civita-Symbol zum Ausdruck gebracht, sodass wir mit

$$\begin{array}{rcl} l=1,\ m=2,\ n=3 & \Rightarrow & (+1)\cdot\det\big(A^{rs}\big)\,, \\ l=1,\ m=3,\ n=2 & \Rightarrow & (-1)\cdot\det\big(A^{rs}\big)\,, \\ l=2,\ m=3,\ n=1 & \Rightarrow & (+1)\cdot\det\big(A^{rs}\big)\,, \\ l=2,\ m=1,\ n=3 & \Rightarrow & (-1)\cdot\det\big(A^{rs}\big)\,, \\ l=3,\ m=1,\ n=2 & \Rightarrow & (+1)\cdot\det\big(A^{rs}\big)\,, \\ l=3,\ m=2,\ n=1 & \Rightarrow & (-1)\cdot\det\big(A^{rs}\big)\,, \\ \text{sonst} & \Rightarrow & 0 \end{array}$$

schließlich für die Matrix $A = \big(A^{rs}\big)$

$$\boxed{\varepsilon(i,j,k)\, A^{il} A^{jm} A^{kn} \;=\; \varepsilon(i,j,k)\, A^{li} A^{mj} A^{nk} \;=\; \varepsilon(l,m,n)\det A} \tag{6.6}$$

erhalten.

Abschließend zeigen wir noch, was

$$\varepsilon(i,j,k)\, A^{il} A^{jm} A^{kn}\, \varepsilon(l,m,n)$$

ergibt, und beginnen zunächst mit dem 2-dimensionalen Fall, also mit einer (2×2)-Matrix $\big(A^{rs}\big)$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(i,j)\, A^{il} A^{jm}\, \varepsilon(l,m) &= \varepsilon(i,j)\big(A^{i1}A^{j2} - A^{i2}A^{j1}\big) \\
&= \underbrace{\varepsilon(i,j)\, A^{i1}A^{j2}} - \underbrace{\varepsilon(i,j)\, A^{i2}A^{j1}} \\
&= \big(A^{11}A^{22} - A^{21}A^{12}\big) - \big(A^{12}A^{21} - A^{22}A^{11}\big) \\
&= 2\,\big(A^{11}A^{22} - A^{21}A^{12}\big) \\
\varepsilon(i,j)\, A^{il} A^{jm}\, \varepsilon(l,m) &= 2 \cdot \det\big(A^{rs}\big)\ .
\end{aligned}$$

Im 3-dimensionalen Fall, also für eine (3×3)-Matrix $\big(A^{rs}\big)$ gilt analog dazu

$$\begin{aligned}
\varepsilon(i,j,k)\, A^{il} A^{jm} A^{kn}\, \varepsilon(l,m,n) = \varepsilon(i,j,k)\Big(&+A^{i1}A^{j2}A^{k3} + A^{i2}A^{j3}A^{k1} + A^{i3}A^{j1}A^{k2} \\
&- A^{i1}A^{j3}A^{k2} - A^{i2}A^{j1}A^{k3} - A^{i3}A^{j2}A^{k1}\Big) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= &+\varepsilon(i,j,k)\, A^{i1}A^{j2}A^{k3} + \varepsilon(i,j,k)\, A^{i2}A^{j3}A^{k1} + \varepsilon(i,j,k)\, A^{i3}A^{j1}A^{k2} \\
&- \varepsilon(i,j,k)\, A^{i1}A^{j3}A^{k2} - \varepsilon(i,j,k)\, A^{i2}A^{j1}A^{k3} - \varepsilon(i,j,k)\, A^{i3}A^{j2}A^{k1}\ .
\end{aligned}$$

Dabei liefern die drei Summanden mit positivem Vorzeichen $+\det\big(A^{rs}\big)$ und die drei Summanden mit negativem Vorzeichen liefern $-\det\big(A^{rs}\big)$ wie beispielsweise

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(i,j,k)\, A^{i2}A^{j3}A^{k1} = \\
&+A^{12}A^{23}A^{31} + A^{22}A^{33}A^{11} + A^{32}A^{13}A^{21} - A^{12}A^{33}A^{21} - A^{22}A^{13}A^{31} - A^{32}A^{23}A^{11} \;= \\
&+A^{11}A^{22}A^{33} + A^{21}A^{32}A^{13} + A^{31}A^{12}A^{23} - A^{11}A^{32}A^{23} - A^{21}A^{12}A^{33} - A^{31}A^{22}A^{13} \;= \\
&+\det\big(A^{rs}\big)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(i,j,k)\, A^{i1}A^{j3}A^{k2} = \\
&+A^{11}A^{23}A^{32} + A^{21}A^{33}A^{12} + A^{31}A^{13}A^{22} - A^{11}A^{33}A^{22} - A^{21}A^{13}A^{32} - A^{31}A^{23}A^{12} \;= \\
&-A^{11}A^{22}A^{33} - A^{21}A^{32}A^{13} - A^{31}A^{12}A^{23} + A^{11}A^{32}A^{23} + A^{21}A^{12}A^{33} + A^{31}A^{22}A^{13} \;= \\
&-\det\big(A^{rs}\big)\ .
\end{aligned}$$

Daraus resultiert

$$\varepsilon(i,j,k)\,A^{il}A^{jm}A^{kn}\,\varepsilon(l,m,n) \;=\; 3\cdot\Big[+\det\big(A^{rs}\big)\Big] - 3\cdot\Big[-\det\big(A^{rs}\big)\Big]\;,$$

$$\boxed{\varepsilon(i,j,k)\,A^{il}A^{jm}A^{kn}\,\varepsilon(l,m,n) \;=\; 6\cdot\det\big(A^{rs}\big)}\;.$$

Durch Anwendung der Beziehung (6.8) kommen wir zum gleichen Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(i,j,k)\,A^{il}A^{jm}A^{kn}\,\varepsilon(l,m,n) \;&=\; \varepsilon(i,j,k)\,\varepsilon(l,m,n)\,A^{il}A^{jm}A^{kn}\\
&=\; \begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix} A^{il}A^{jm}A^{kn} \;=
\end{aligned}$$

$$= \Big(+\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{il}\delta_{km}\delta_{jn}+\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{in}-\delta_{jl}\delta_{im}\delta_{kn}+\delta_{kl}\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{in}\Big)A^{il}A^{jm}A^{kn}\;,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(i,j,k)\,A^{il}A^{jm}A^{kn}\,\varepsilon(l,m,n) \;=\; &+\;\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}\;A^{il}A^{jm}A^{kn} \;-\; \delta_{il}\delta_{km}\delta_{jn}\;A^{il}A^{jm}A^{kn}\;+\\
&+\;\delta_{jl}\delta_{km}\delta_{in}\;A^{il}A^{jm}A^{kn} \;-\; \delta_{jl}\delta_{im}\delta_{kn}\;A^{il}A^{jm}A^{kn}\;+\\
&+\;\delta_{kl}\delta_{im}\delta_{jn}\;A^{il}A^{jm}A^{kn} \;-\; \delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{in}\;A^{il}A^{jm}A^{kn}\;.
\end{aligned}$$

Nach Auflösung der Klammer erhalten wir also zunächst 3 Summanden mit positivem und 3 Summanden mit negativem Vorzeichen, d. h. insgesamt 6 Summanden. Jeder dieser 6 Summanden liefert dann erneut jeweils nur $3! = 6$ Summanden, weil im Fall doppelt auftretender Indizes die Determinante verschwindet. Wir zeigen dies am Beispiel des zweiten Summanden:

$$-\;\delta_{il}\delta_{km}\delta_{jn}\;A^{il}A^{jm}A^{kn} \;=$$

$$-\underbrace{\overbrace{A^{11}A^{23}A^{32}}^{i,j,k\,=\,1,2,3}}_{l,m,n\,=\,1,3,2} - \underbrace{\overbrace{A^{11}A^{32}A^{23}}^{i,j,k\,=\,1,3,2}}_{l,m,n\,=\,1,2,3} - \underbrace{\overbrace{A^{22}A^{31}A^{13}}^{i,j,k\,=\,2,3,1}}_{l,m,n\,=\,2,1,3} - \underbrace{\overbrace{A^{22}A^{13}A^{31}}^{i,j,k\,=\,2,1,3}}_{l,m,n\,=\,2,3,1} - \underbrace{\overbrace{A^{33}A^{12}A^{21}}^{i,j,k\,=\,3,1,2}}_{l,m,n\,=\,3,2,1} - \underbrace{\overbrace{A^{33}A^{21}A^{12}}^{i,j,k\,=\,3,2,1}}_{l,m,n\,=\,3,1,2}\;.$$

Insgesamt resultieren also $6\cdot 6 = 36$ Summanden, 18 mit positivem und 18 mit negativem Vorzeichen. Wenn wir diese 36 Summanden mit etwas Geduld entsprechend sortieren, erkennen wir wie erwartet

$$\varepsilon(i,j,k)\,A^{il}A^{jm}A^{kn}\,\varepsilon(l,m,n) \;=\; 6\cdot\det\big(A^{rs}\big)\;.\;\square$$

6.3 Zum ε-Tensor in der Orthonormalbasis

Die in diesem Abschnitt für die Orthonormalbasis erzielten Ergebnisse gelten völlig analog auch für beliebige Basen, wenn man die kovarianten Indizes tiefstellt und die kontravarianten Indizes hochstellt und die Faktoren $\underset{+}{\sqrt{g}}$ bzw. $\frac{1}{\underset{+}{\sqrt{g}}}$ berücksichtigt.

Im Fall einer Orthonormalbasis ist „kovariant gleich kontravariant“, sodass für den Metriktensor folgendes gilt:

$$\big(g_{ij}\big) = \big(\delta_{ij}\big) = \big(g^{ij}\big) = \big(\delta^{ij}\big) = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \det\big(g_{ij}\big) = \det\big(g^{ij}\big) = 1 \quad \Rightarrow \quad \underset{+}{\sqrt{g}} = 1 \; .$$

In der dreidimensionalen Orthonormalbasis wie z. B. der Standardbasis ist also der ε-Tensor gleich dem Levi-Civita-Symbol:

$$\varepsilon_{ijk} \;=\; \varepsilon(i,j,k) \; .$$

Außerdem brauchen wir in der Orthonormalbasis zwischen ko- und kontravarianten Indizes nicht zu unterscheiden und setzen deshalb aus Bequemlichkeit alle Indizes unten. Für das Levi-Civita-Symbol erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} &= +1 \quad \text{bei} \quad ijk = 123 \; , \\
\varepsilon_{ijk} &= -1 \quad \text{bei} \quad ijk = 132 \; , \\
\varepsilon_{ijk} &= +1 \quad \text{bei} \quad ijk = 231 \; , \\
\varepsilon_{ijk} &= -1 \quad \text{bei} \quad ijk = 213 \; , \\
\varepsilon_{ijk} &= +1 \quad \text{bei} \quad ijk = 312 \; , \\
\varepsilon_{ijk} &= -1 \quad \text{bei} \quad ijk = 321 \; .
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Die daraus folgende äquivalente Darstellung von ε_{ijk} mit Kronecker-Symbolen und Determinanten ist

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} \;&=\; \delta_{i1}\delta_{j2}\delta_{k3} - \delta_{i1}\delta_{j3}\delta_{k2} + \delta_{i2}\delta_{j3}\delta_{k1} - \delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{k3} + \delta_{i3}\delta_{j1}\delta_{k2} - \delta_{i3}\delta_{j2}\delta_{k1} \\
&=\; \delta_{i1}\big(\delta_{j2}\delta_{k3} - \delta_{j3}\delta_{k2}\big) + \delta_{i2}\big(\delta_{j3}\delta_{k1} - \delta_{j1}\delta_{k3}\big) + \delta_{i3}\big(\delta_{j1}\delta_{k2} - \delta_{j2}\delta_{k1}\big) \\
&=\; \delta_{i1}\begin{vmatrix} \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} + \delta_{i2}\begin{vmatrix} \delta_{j3} & \delta_{j1} \\ \delta_{k3} & \delta_{k1} \end{vmatrix} + \delta_{i3}\begin{vmatrix} \delta_{j1} & \delta_{j2} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ijk} \;=\; \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix} = \;\cdots\; .$$

Von besonderer Bedeutung ist das Tensorprodukt

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} \;=\; \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}} \; . \tag{6.8}$$

Beweis:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1n} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2n} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3n} \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1n} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2n} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3n} \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{i1}\delta_{1l} + \delta_{i2}\delta_{2l} + \delta_{i3}\delta_{3l} & \delta_{i1}\delta_{1m} + \delta_{i2}\delta_{2m} + \delta_{i3}\delta_{3m} & \delta_{i1}\delta_{1n} + \delta_{i2}\delta_{2n} + \delta_{i3}\delta_{3n} \\ \delta_{j1}\delta_{1l} + \delta_{j2}\delta_{2l} + \delta_{j3}\delta_{3l} & \delta_{j1}\delta_{1m} + \delta_{j2}\delta_{2m} + \delta_{j3}\delta_{3m} & \delta_{j1}\delta_{1n} + \delta_{j2}\delta_{2n} + \delta_{j3}\delta_{3n} \\ \delta_{k1}\delta_{1l} + \delta_{k2}\delta_{2l} + \delta_{k3}\delta_{3l} & \delta_{k1}\delta_{1m} + \delta_{k2}\delta_{2m} + \delta_{k3}\delta_{3m} & \delta_{k1}\delta_{1n} + \delta_{k2}\delta_{2n} + \delta_{k3}\delta_{3n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{ir}\,\delta_{rl} & \delta_{ir}\,\delta_{rm} & \delta_{ir}\,\delta_{rn} \\ \delta_{jr}\,\delta_{rl} & \delta_{jr}\,\delta_{rm} & \delta_{jr}\,\delta_{rn} \\ \delta_{kr}\,\delta_{rl} & \delta_{kr}\,\delta_{rm} & \delta_{kr}\,\delta_{rn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} . \;\square$$

Dabei wurden zunächst die beiden Levi-Civita-Symbole ε_{ijk} und ε_{lmn} geschickt durch zwei Determinanten ersetzt. Auf deren Produkt wurde dann das Multiplikationstheorem angewandt. Die neun Elemente der resultierenden Determinante sind dreigliedrige Summanden. Diese konnten mit Hilfe der Summenkonvention vereinfacht dargestellt werden. Die Summation (Überschiebung) der Elemente über den Index r führte schließlich zum Ergebnis.

Überschiebung zweier Levi-Civita-Symbole in *einem* Index,

d. h., wir setzen $k = n = t$ und summieren über t:

$$\varepsilon_{ijt}\,\varepsilon_{lmt} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}_{(k=n=t)} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{it} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jt} \\ \delta_{tl} & \delta_{tm} & \delta_{tt} \end{vmatrix}$$

$$= +\delta_{tl} \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{it} \\ \delta_{jm} & \delta_{jt} \end{vmatrix} - \delta_{tm} \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{it} \\ \delta_{jl} & \delta_{jt} \end{vmatrix} + \delta_{tt} \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix}$$

$$= + \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{il} \\ \delta_{jm} & \delta_{jl} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix}$$

$$= \big(-1 - 1 + 3 \big) \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} ,$$

$$\boxed{\varepsilon_{ijt}\,\varepsilon_{lmt} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}} \;. \tag{6.9}$$

Dabei wurden zunächst in (6.8) die Indizes k und n durch den Summationsindex t ersetzt. Die resultierende Determinante wurde dann nach der 3. Zeile entwickelt. Daraufhin wurde über $t = 1, 2, 3$ summiert, wobei $\delta_{tt} = 3$ die Spur ist. Abschließend mussten nur noch die Spalten in der ersten (2×2) -Determinante vertauscht werden.

Überschiebung zweier Levi-Civita-Symbole in *zwei* Indizes,

d. h., wir setzen $j = m = s$, $k = n = t$ und gehen aus von (6.9) :

$$\varepsilon_{ist}\, \varepsilon_{lst} \;=\; \delta_{il}\, \delta_{ss} - \delta_{is}\, \delta_{sl} \;=\; \delta_{il} \cdot 3 - \delta_{il} \;=\; (3-1)\, \delta_{il} \;,$$

$$\boxed{\varepsilon_{ist}\, \varepsilon_{lst} \;=\; 2\, \delta_{il}} \;. \tag{6.10}$$

Wenn $i \neq l$ ist, dann wird mindestens eines der beiden Levi-Civita-Symbole im Produkt gleich Null und somit das Produkt $\varepsilon_{ist}\, \varepsilon_{lst}$ ebenfalls gleich Null, weil immer über gleiche Summationsindizes $1, 2, 3$ summiert wird und deshalb in mindestens einem der beiden Levi-Civita-Symbole ein Index doppelt auftritt. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
i = l = 1 \;:&\qquad \varepsilon_{123}\, \varepsilon_{123} + \varepsilon_{132}\, \varepsilon_{132} \;=\; 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \;=\; 2 \cdot 1 \;, \\
i = l = 2 \;:&\qquad \varepsilon_{231}\, \varepsilon_{231} + \varepsilon_{213}\, \varepsilon_{213} \;=\; 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \;=\; 2 \cdot 1 \;, \\
i = l = 3 \;:&\qquad \varepsilon_{312}\, \varepsilon_{312} + \varepsilon_{321}\, \varepsilon_{321} \;=\; 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \;=\; 2 \cdot 1 \;.
\end{aligned}$$

Überschiebung zweier Levi-Civita-Symbole in allen *drei* Indizes,

d. h., wir setzen $i = l = r$, $j = m = s$, $k = n = t$ und gehen aus von (6.10) :

$$\boxed{\varepsilon_{rst}\, \varepsilon_{rst} \;=\; 2\, \delta_{rr} \;=\; 2 \cdot 3 \;=\; 6} \;.$$

Diese Summe lässt sich leicht aufschreiben, weil nur die $3! = 6$ Permutationen der Indizes $1, 2, 3$ einen Wert $\varepsilon_{rst} \neq 0$ ergeben:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rst}\, \varepsilon_{rst} \;&=\; \varepsilon_{123}\varepsilon_{123} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{132} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{213} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{312} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{321} \\
&=\; 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \;=\; 6 \;.
\end{aligned}$$

6.4 Was ist ein Pseudotensor?

- Transformationsverhalten von $\underset{+}{\sqrt{g}}$:

Aus der Transformationsgleichung

$$\overline{g}_{ij} \;=\; \underline{A}_i{}^k\,\underline{A}_j{}^l\,g_{kl}$$

erhalten wir mit dem Multiplikationstheorem $\det A \cdot \det B = \det(AB)$ bezüglich des Matrizenprodukts AB sowie mit $\big(\underline{A}_i{}^k\big) = \big(\underline{A}_j{}^l\big)$

$$\underbrace{\det\big(\overline{g}_{ij}\big)}_{\overline{g}} \;=\; \det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\cdot\det\big(\underline{A}_j{}^l\big)\cdot\det\big(g_{kl}\big) \;=\; \Big[\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\Big]^2\cdot\underbrace{\det\big(g_{kl}\big)}_{g}\;. \tag{6.11}$$

$\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)$ ist die sog. **Transformationsdeterminante**. Wir ziehen die positive Wurzel aus (6.11) und berücksichtigen dabei die Beziehung $|a| = \operatorname{sgn}(a)\cdot a$:

$$\underset{+}{\sqrt{\overline{g}}} \;=\; \big|\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\big|\cdot\underset{+}{\sqrt{g}} \qquad\Rightarrow$$

$$\boxed{\underset{+}{\sqrt{\overline{g}}} \;=\; \operatorname{sgn}\big[\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\big]\cdot\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\cdot\underset{+}{\sqrt{g}} \quad\text{mit}\quad \operatorname{sgn}\big[\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\big] = \pm 1}\;.$$

- Transformation der Komponente ε_{123} :

Dabei berücksichtigen wir, dass die Komponente ε_{123} des epsilon-Tensors dem Levi-Civita-Symbol $\varepsilon(1,2,3) = 1$ *entspricht* und dass sich das Levi-Civita-Symbol unter Transformation nicht ändert:

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}_{123} \;&=\; \underset{+}{\sqrt{\overline{g}}}\cdot 1\\ &=\; \operatorname{sgn}\big[\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\big]\cdot\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\cdot\underset{+}{\sqrt{g}}\;.\end{aligned}$$

Mit der Determinanten-Definition (in der ausgehend von (6.5) für gemischte Tensoren bzw. auch für nicht-orthonormale Vektorbasen verallgemeinerten Form)

$$\det\big(\underline{A}_i{}^k\big) \;=\; \underline{A}_1{}^l\,\underline{A}_2{}^m\underline{A}_3{}^n\cdot\varepsilon(l,m,n)$$

resultiert daraus

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}_{123} \;&=\; \operatorname{sgn}\big[\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\big]\cdot\underline{A}_1{}^l\,\underline{A}_2{}^m\underline{A}_3{}^n\cdot\varepsilon(l,m,n)\cdot\underset{+}{\sqrt{g}}\\ &=\; \operatorname{sgn}\big[\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\big]\cdot\underline{A}_1{}^l\,\underline{A}_2{}^m\underline{A}_3{}^n\cdot\underbrace{\underset{+}{\sqrt{g}}\cdot\varepsilon(l,m,n)}_{=\,\varepsilon_{lmn}}\end{aligned}$$

$$\overline{\varepsilon}_{123} \;=\; \operatorname{sgn}\big[\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\big]\cdot\underline{A}_1{}^l\,\underline{A}_2{}^m\underline{A}_3{}^n\cdot\varepsilon_{lmn} \qquad\Rightarrow$$

- Transformation der Komponente ε_{lmn} , d. h.
  Transformation des epsilon-Tensors (in allgemeiner Form) :

$$\boxed{\overline{\varepsilon}_{ijk} \;=\; \operatorname{sgn}\big[\det\big(\underline{A}_i{}^k\big)\big]\cdot\underline{A}_i{}^l\,\underline{A}_j{}^m\underline{A}_k{}^n\cdot\varepsilon_{lmn}}\;.$$

Wir stellen fest:
ε_{ijk} zeigt bis auf das Vorzeichen der Transformationsdeterminante das Transformationsverhalten eines kovarianten Tensors 3. Stufe. Eine derartige Größe nennt man **Pseudotensor**.

Im Gegensatz zu Tensoren transformieren sich Pseudotensoren mit dem zusätzlichen Vorzeichen der Transformationsdeterminante. Pseudotensoren 1. Stufe (Pseudovektoren oder Axialvektoren) wie beispielsweise der Winkelgeschwindigkeitsvektor, sind invariant unter Raumspiegelung, d. h. sie kehren bei Raumspiegelung ihre Orientierung um. Im Gegensatz dazu kehren (echte) Vektoren, auch polare Vektoren oder Polarvektoren genannt, wie beispielsweise der Schwerkraftvektor unter Raumspiegelung ihr Vorzeichen um, d. h. ihre Orientierung bleibt stets erhalten.

Wir veranschaulichen dies an zwei einfachen Beispielen:

- Die Matrix für die Raumspiegelung von ko- und kontravarianten Basisvektoren im $\mathbb{R}^3$ ist

$$\left(\bar{A}_i{}^j\right) = \left(\underline{A}_i{}^j\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1} \quad \Rightarrow$$

$$\det\left(\underline{A}_i{}^j\right) = -1\ , \quad \operatorname{sgn}\Big[\det\left(\underline{A}_i{}^j\right)\Big] = -1\ .$$

- Spiegelungstransformation der kontravarianten Basisvektoren:

$$\overline{\vec{\boldsymbol{g}}}^{\,i} = \bar{A}_j{}^i\, \vec{\boldsymbol{g}}^{\,j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{\vec{\boldsymbol{g}}}^{\,1} = (-1)\cdot \vec{\boldsymbol{g}}^{\,1} = \ -\vec{\boldsymbol{g}}^{\,1}\ , \\ \overline{\vec{\boldsymbol{g}}}^{\,2} = (-1)\cdot \vec{\boldsymbol{g}}^{\,2} = \ -\vec{\boldsymbol{g}}^{\,2}\ , \\ \overline{\vec{\boldsymbol{g}}}^{\,3} = (-1)\cdot \vec{\boldsymbol{g}}^{\,3} = \ -\vec{\boldsymbol{g}}^{\,3}\ . \end{cases}$$

  Nach Raumspiegelung zeigt jeder Basisvektor genau in die entgegengesetzte Richtung.

- Spiegelungstransformation der kovarianten Komponenten eines polaren Vektors $\vec{\boldsymbol{p}}$:

$$\overline{p}_i = \underline{A}_i{}^j\, p_j = (-1)\cdot p_i \quad \Rightarrow \quad \overline{\vec{\boldsymbol{p}}} = -\vec{\boldsymbol{p}}\ .$$

  Zeigt ein polarer Vektor in der ungespiegelten Basis beispielsweise in die positive Richtung, dann zeigt er nach Raumspiegelung, also dann bezüglich der gespiegelten Basis, in die negative Richtung. Das aber bedeutet, dass ein polarer Vektor trotz Spiegeltransformation bezüglich der ursprünglichen, ungespiegelten Basis seine Orientierung nicht ändert.

- Spiegelungstransformation der kovarianten Komponenten eines axialen Vektors $\vec{\boldsymbol{L}}$, d. h. eines Pseudotensors 1. Sufe:

$$\overline{L}_i = \operatorname{sgn}\Big[\det\left(\underline{A}_i{}^j\right)\Big]\, \underline{A}_i{}^j\, L_j = (-1)\cdot(-1)\cdot L_i \quad \Rightarrow \quad \overline{\vec{\boldsymbol{L}}} = \vec{\boldsymbol{L}}\ .$$

  Zeigt ein axialer Vektor in der ungespiegelten Basis beispielsweise in die positive Richtung, dann zeigt er nach Raumspiegelung, also dann bezüglich der gespiegelten Basis, ebenfalls in die positive Richtung. Das aber bedeutet, dass ein axialer Vektor unter Spiegeltransformation bezüglich der ursprünglichen, ungespiegelten Basis seine Orientierung umkehrt.

- Dieses Resultat stimmt überein mit dem, was aus der linearen Algebra bereits bekannt ist:

  Transformationen mit Transformationsdeterminante > 0 überführen Rechtssysteme in Rechtssysteme und Linkssysteme in Linkssysteme.

  Transformationen mit Transformationsdeterminante < 0 überführen Rechtssysteme in Linkssysteme und Linkssysteme in Rechtssysteme.

Wir zeigen die Überschiebung eines symmetrischen Tensors $S^{in} = S^{ni}$ mit einem antisymmetrischen Tensor $A^{in} = -A^{ni}$ und verwenden dabei die Indexumbenennungen $n \to i$ und $i \to n$, was an der betreffenden Stelle durch $i \leftrightarrow n$ angegeben wird:

$$A^{in}S_{in} \;=\; \underbrace{-A^{ni}}_{=A^{in}}\underbrace{S_{ni}}_{S_{in}} \overset{i\leftrightarrow n}{=} -A^{in}S_{in} \quad\Rightarrow\quad A^{in}S_{in} = 0 \; .$$

Daraus resultiert die folgende Regel:

Die Überschiebung einer symmetrischen Größe mit einer antisymmetrischen Größe ergibt Null.

Veranschaulichung an einem einfachen zweidimensionalen Beispiel:

Wir überschieben zunächst zwei Tensoren 2. Stufe, die weder symmetrisch noch antisymmetrisch sind:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \left(C_{ij}\right) \neq \left(C_{ji}\right) \neq \left(-\,C_{ji}\right) \; ,$$

$$\begin{pmatrix} D^{11} & D^{12} \\ D^{21} & D^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \left(D^{ij}\right) \neq \left(D^{ji}\right) \neq \left(-\,D^{ji}\right) \quad \Rightarrow$$

$$C_{ij}D^{ij} \;=\; C_{11}D^{11} + C_{12}D^{12} + C_{21}D^{21} + C_{22}D^{22} \;=\; 5 + 2 + 21 + 32 \;=\; 60 \; .$$

Jetzt überschieben wir einen antisymmetrischen Tensor 2. Stufe mit einem symmetrischen Tensor 2. Stufe:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \left(A_{ij}\right) = \left(-\,A_{ji}\right) \; ,$$

$$\begin{pmatrix} S^{11} & S^{12} \\ S^{21} & S^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \left(S^{ij}\right) = \left(S^{ji}\right) \quad \Rightarrow$$

$$A_{ij}S^{ij} \;=\; A_{11}S^{11} + A_{12}S^{12} + A_{21}S^{21} + A_{22}S^{22} \;=\; 0 + 5 - 5 + 0 \;=\; 0 \; . \; \square$$

6.5 Das vektorielle Produkt

Das vektorielle Produkt (Vektorprodukt, Kreuzprodukt) ist nur im 3-dimensionalen Raum definiert. Mit dem ε-Tensor lässt sich das vektorielle Produkt $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}}$ wie folgt darstellen:

$$\big(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big)_i \;=\; \varepsilon_{ijk}\, a^j\, b^k \;=\; v_i \quad \longleftrightarrow \quad \big(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big)^i \;=\; \varepsilon^{ijk}\, a_j\, b_k \;=\; v^i \;.$$

Die c_i sind die kovarianten und die c^i sind die kontravarianten Komponenten des vektoriellen Produkts. In der Orthonormalbasis gilt

$$\begin{aligned} \big(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big)_1 &= a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \;, \\ \big(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big)_2 &= a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \;, \\ \big(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big)_3 &= a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \;. \end{aligned}$$

Das Transformationsverhalten des vektoriellen Produkts
aus dem ε-Tensor (Pseudotensor $\widehat{=} -1$), aus polaren Vektoren (Tensoren $\widehat{=} +1$) und aus axialen Vektoren (Pseudotensoren $\widehat{=} -1$) lässt sich wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{array}{lcll} \vec{\boldsymbol{a}} \text{ und } \vec{\boldsymbol{b}} \text{ polar} & \Rightarrow & \big(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big) \text{ axial}\,, & \text{z. B. Drehimpuls } \vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}}\,. \\ \vec{\boldsymbol{a}} \text{ axial}\,,\ \vec{\boldsymbol{b}} \text{ polar} & \Rightarrow & \big(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big) \text{ polar}\,, & \text{z. B. Bahngeschwindigkeit } \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\omega} \times \vec{\boldsymbol{r}}\,. \\ \vec{\boldsymbol{a}} \text{ polar}\,,\ \vec{\boldsymbol{b}} \text{ axial} & \Rightarrow & \big(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big) \text{ polar}\,. & \\ \vec{\boldsymbol{a}} \text{ und } \vec{\boldsymbol{b}} \text{ axial} & \Rightarrow & \big(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big) \text{ axial}\,. & \end{array}$$

Bestimmung der Länge von $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$:

Dafür benutzen wir

$$|\vec{\boldsymbol{v}}|^2 = v_i\, v^i \quad \Rightarrow \quad |\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{v_i\, v^i} \quad :$$

$$\begin{aligned} \big|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big|^2 &= \big(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big)_i \big(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big)^i \;=\; v_i\, v^i \\ &= \varepsilon_{ijk}\, a^j b^k \;\, \varepsilon^{ilm}\, a_l b_m \\ &= \quad \underbrace{\varepsilon_{ijk}\; \varepsilon^{ilm}}_{\text{Überschiebung in } i} \quad a^j b^k \; a_l b_m \\ &= \big(\delta_j^{\;l} \delta_k^{\;m} - \delta_j^{\;m} \delta_k^{\;l}\big)\; a^j b^k \; a_l b_m \\ &= a^l b^m \; a_l b_m \;-\; a^m b^l \; a_l b_m \\ &= a^l a_l \; b^m b_m \;-\; a^m b_m \; a_l b^l \\ &= \big|\vec{\boldsymbol{a}}\big|^2 \, \big|\vec{\boldsymbol{b}}\big|^2 \;-\; \big(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}\big)^2 \\ &= \big|\vec{\boldsymbol{a}}\big|^2 \, \big|\vec{\boldsymbol{b}}\big|^2 \;-\; \big|\vec{\boldsymbol{a}}\big|^2 \, \big|\vec{\boldsymbol{b}}\big|^2 \cos^2 \sphericalangle\big(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}\big) \;=\; \big|\vec{\boldsymbol{a}}\big|^2 \, \big|\vec{\boldsymbol{b}}\big|^2 \Big[1 - \cos^2 \sphericalangle\big(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}\big)\Big] \\ &= \big|\vec{\boldsymbol{a}}\big|^2 \, \big|\vec{\boldsymbol{b}}\big|^2 \sin^2 \sphericalangle\big(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}\big) \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\;\big|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\big| \;=\; \big|\vec{\boldsymbol{a}}\big|\, \big|\vec{\boldsymbol{b}}\big| \, \sin \sphericalangle\big(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}\big)\;} \;.$$

Eigenschaften des vektoriellen Produkts :

- **Richtung**

  Der Vektor $\vec{\boldsymbol{c}}$ des vektoriellen Produkts $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}}$ steht immer senkrecht auf jedem der beiden Faktorvektoren $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ und damit senkrecht auf der Ebene, die von den beiden Faktorvektoren aufgespannt wird.

- **Länge**

  Die Länge $|\vec{\boldsymbol{c}}| = |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}|$ des Vektors des vektoriellen Produkts ist betragsmäßig gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Faktorvektoren aufgespannt wird.

- **Orientierung**

  Die Orientierung der Vektoren $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}$ folgt in dieser Reihenfolge der Orientierung der Basisvektoren. In einem Rechtssystem entspricht $\vec{\boldsymbol{a}}$ dem Daumen, $\vec{\boldsymbol{b}}$ dem Zeigefinger und $\vec{\boldsymbol{c}}$ dem Mittelfinger der rechten Hand – in einem Linkssystem analog der linken Hand.

- Das vektorielle Produkt ist **antikommutativ** :

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{a}}\right)_i &= \varepsilon_{ijk}\, b^j a^k \;=\; \varepsilon_{ijk}\, a^k\, b^j \\
&= -\,\varepsilon_{ikj}\, a^k\, b^j \\
\text{Indexumbenennung } j \leftrightarrow k \;\Rightarrow\quad &= -\,\varepsilon_{ijk}\, a^j\, b^k \;=\; -\left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right)_i ,
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right)_i \;=\; -\left(\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{a}}\right)_i} \; .
$$

  Daraus folgt $\quad \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{a}} = -\,\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{a}} \quad\Rightarrow\quad \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{0}\,.$

- **Assoziativgesetz** : $\quad n\left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right) \;=\; \left(n\vec{\boldsymbol{a}}\right) \times \vec{\boldsymbol{b}} \;=\; \vec{\boldsymbol{a}} \times \left(n\vec{\boldsymbol{b}}\right)\,.$

- **Distributivgesetz** : $\quad \vec{\boldsymbol{a}} \times \left(\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}\right) \;=\; \left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right) + \left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{c}}\right)\,.$

- **Spatprodukt** : $\quad \left[\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}\right] = \left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{c}} = \left(\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{a}} = \left(\vec{\boldsymbol{c}} \times \vec{\boldsymbol{a}}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{b}}\,.$

- **Entwicklungssatz** (Graßmann-Identität)

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{a}} \times \left(\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}\right) &= \left(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}\right)\vec{\boldsymbol{b}} - \left(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}\right)\vec{\boldsymbol{c}} \;\neq\; \left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right) \times \vec{\boldsymbol{c}}\,, \\
\left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right) \times \vec{\boldsymbol{c}} &= \left(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}\right)\vec{\boldsymbol{b}} - \left(\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}\right)\vec{\boldsymbol{a}}\,.
\end{aligned}
$$

- **Produkte mit vier Vektoren**

$$
\left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right)\cdot\left(\vec{\boldsymbol{c}} \times \vec{\boldsymbol{d}}\right) \;=\; \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}} & \vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}} \\ \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{d}} & \vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{d}} \end{vmatrix} \qquad \text{(Lagrange-Identität)}\,.
$$

$$
\left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right) \times \left(\vec{\boldsymbol{c}} \times \vec{\boldsymbol{d}}\right) \;=\; \vec{\boldsymbol{c}}\left[\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{d}}\right] - \vec{\boldsymbol{d}}\left[\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}\right] \;=\; \vec{\boldsymbol{b}}\left[\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{d}}\right] - \vec{\boldsymbol{a}}\left[\vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}, \vec{\boldsymbol{d}}\right].
$$

$$
\left[\left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right) \times \vec{\boldsymbol{c}}\right] \times \vec{\boldsymbol{d}} \;=\; \left(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{d}}\right) - \left(\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}\right)\left(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{d}}\right).
$$

Herleitung vektorieller Produkte mit drei und vier Vektoren

- **Spatprodukt**

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol a}\cdot\big(\vec{\boldsymbol b}\times\vec{\boldsymbol c}\big) &= a^i\big(\vec{\boldsymbol b}\times\vec{\boldsymbol c}\big)_i = a^i\,\varepsilon_{ijk}\,b^j c^k = \varepsilon_{ijk}\,a^i b^j c^k \\
&= \underset{+}{\sqrt{g}}\;\underbrace{\varepsilon(i,j,k)\,a^i b^j c^k} \\
&= \underset{+}{\sqrt{g}}\;\det\begin{pmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol a}\cdot\big(\vec{\boldsymbol b}\times\vec{\boldsymbol c}\big) &= \vec{\boldsymbol b}\cdot\big(\vec{\boldsymbol c}\times\vec{\boldsymbol a}\big) = \vec{\boldsymbol c}\cdot\big(\vec{\boldsymbol a}\times\vec{\boldsymbol b}\big) , \\
\varepsilon_{ijk}\,a^i b^j c^k &= \varepsilon_{jki}\,b^j c^k a^i = \varepsilon_{kij}\,c^k a^i b^j \;.
\end{aligned}
$$

- **Entwicklungssatz** (Graßmann-Identität)

$$
\begin{aligned}
\Big[\vec{\boldsymbol a}\times\big(\vec{\boldsymbol b}\times\vec{\boldsymbol c}\big)\Big]_i &= \varepsilon_{ijk}\,a^j\big(\vec{\boldsymbol b}\times\vec{\boldsymbol c}\big)^k \\
&= \varepsilon_{ijk}\,a^j\,\varepsilon^{klm}\,b_l c_m = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon^{klm}}\,a^j b_l c_m \\
&= \big(\delta_i{}^l\delta_j{}^m - \delta_i{}^m\delta_j{}^l\big)\,a^j b_l c_m \\
&= b_i\,a^m c_m - c_i\,a^l b_l \\
&= \Big[\big(\vec{\boldsymbol a}\cdot\vec{\boldsymbol c}\big)\,\vec{\boldsymbol b} - \big(\vec{\boldsymbol a}\cdot\vec{\boldsymbol b}\big)\,\vec{\boldsymbol c}\Big]_i \;.
\end{aligned}
$$

- **Lagrange-Identität**

$$
\begin{aligned}
\big(\vec{\boldsymbol a}\times\vec{\boldsymbol b}\big)\cdot\big(\vec{\boldsymbol c}\times\vec{\boldsymbol d}\big) &= \big(\vec{\boldsymbol a}\times\vec{\boldsymbol b}\big)_i\,\big(\vec{\boldsymbol c}\times\vec{\boldsymbol d}\big)^i \\
&= \varepsilon_{ijk}\,a^j b^k\,\varepsilon^{ilm}\,c_l d_m \\
&= \underbrace{\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon^{ilm}}\,a^j b^k\,c_l d_m \\
&= \big(\delta_j{}^l\delta_k{}^m - \delta_j{}^m\delta_k{}^l\big)\,a^j b^k\,c_l d_m \\
&= a^l b^m\,c_l d_m - a^m b^l\,c_l d_m = \big(\vec{\boldsymbol a}\cdot\vec{\boldsymbol c}\big)\big(\vec{\boldsymbol b}\cdot\vec{\boldsymbol d}\big) - \big(\vec{\boldsymbol a}\cdot\vec{\boldsymbol d}\big)\big(\vec{\boldsymbol b}\cdot\vec{\boldsymbol c}\big) \;.
\end{aligned}
$$

- $\big(\vec{\boldsymbol a}\times\vec{\boldsymbol b}\big)\times\big(\vec{\boldsymbol c}\times\vec{\boldsymbol d}\big)$:

$$
\begin{aligned}
&\Big[\big(\vec{\boldsymbol a}\times\vec{\boldsymbol b}\big)\times\big(\vec{\boldsymbol c}\times\vec{\boldsymbol d}\big)\Big]_i \\
&= \varepsilon_{ijk}\,\big(\vec{\boldsymbol a}\times\vec{\boldsymbol b}\big)^j\big(\vec{\boldsymbol c}\times\vec{\boldsymbol d}\big)^k \\
&= \varepsilon_{ijk}\;\varepsilon^{jlm}\,a_l b_m\;\varepsilon^{knr}\,c_n d_r \\
&= \varepsilon^{jlm}\,a_l b_m\,\underbrace{\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon^{knr}}\,c_n d_r \\
&= \varepsilon^{jlm}\,a_l b_m\,\big(\delta_i{}^n\delta_j{}^r - \delta_i{}^r\delta_j{}^n\big)\,c_n d_r \\
&= \varepsilon^{jlm}\,a_l b_m\,\big(c_i d_j - c_j d_i\big) = \varepsilon^{jlm}\,a_l b_m d_j\;c_i - \varepsilon^{jlm}\,a_l b_m c_j\;d_i \\
&= \big(\vec{\boldsymbol a}\times\vec{\boldsymbol b}\big)^j d_j\;c_i - \big(\vec{\boldsymbol a}\times\vec{\boldsymbol b}\big)^j c_j\;d_i \\
&= \Big[\big(\vec{\boldsymbol a}\times\vec{\boldsymbol b}\big)\cdot\vec{\boldsymbol d}\Big]\,c_i - \Big[\big(\vec{\boldsymbol a}\times\vec{\boldsymbol b}\big)\cdot\vec{\boldsymbol c}\Big]\,d_i \;.
\end{aligned}
$$

7 Grundlegendes zur SRT im Tensorkalkül

Quellen

Jörg Main, Spezielle Relativitätstheorie – Skript zur Vorlesung, 1. Institut für Theoretische Physik, Universität Stuttgart, 2011 (im www. erhältlich).

Nicolas Borghini, Vorlesungsskript – Spezielle Relativitätstheorie, Universität Bielefeld, 2017, `https://www.physik.uni-bielefeld.de/~borghini/Teaching/Theorie-II/SRT.pdf`.

Torsten Fließbach, Elektrodynamik – Lehrbuch zur Theoretischen Physik II, 4. Aufl., Elsevier, München, 2009, Kapitel 2 und Kapitel 4.

Michael Ruhrländer, Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, 1. Auflage, Pro BUSINESS, Berlin, 2014.

Dr. Ralph Hübner, Lorentztransformationen – Untersuchung einiger Eigenschaften, `http://kabinett.homepage.t-online.de/papers/so13/lorentz.pdf` .

Die Raum-Zeit-Geometrie,
`http://theory.gsi.de/\~vanhees/faq/cosmo/node4.html` .

Heinz Schade, Klaus Neemann, Tensoranalysis, 3. Auflage, Walter de Gruyter Verlag, Berlin, New York, 2009.

- **Notation**

  Zur Unterscheidung stellen wir die Größen in Matrixschreibweise fettgedruckt oder in runde Klammern gesetzt dar und indizieren die Inversen der Transformationen $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ bzw. $L^{\mu}{}_{\nu}$ wie folgt:

  $$\boldsymbol{\Lambda} \;\rightarrow\; \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \quad \overset{-1}{\longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \;\rightarrow\; \overset{-1}{\Lambda}{}^{\mu}{}_{\nu}$$

  Im *Allgemeinen* werden bei der Indizierung lateinische Kleinbuchstaben bevorzugt.

  In der SRT gilt bezüglich der Indizierung jedoch oft folgende Konvention:
  Indizes in Form griechischer Kleinbuchstaben beziehen sich auf die Raumzeit und laufen von 0 bis 3.
  Indizes in Form lateinischer Kleinbuchstaben (meistens i, j, k, l, m, n) beziehen sich auf den Ortsraum und laufen deshalb nur von 1 bis 3.

  Der Strichindex zur Kennzeichnung der Zugehörigkeit zu einem gestrichenen Koordinatensystem kann entweder direkt an der physikalischen Größe wie z. B. bei u'^{μ} oder am Buchstabenindex wie z. B. bei $u^{\alpha'}$ positioniert werden.

- In der SRT wird die **Standardkonfiguration**[1] zweier Inertialsysteme, der Koordinatensysteme S und S', durch folgende Bedingungen definiert:

  1. Die x-und x'-Achse fallen stets zusammen und besitzen dieselbe Orientierung.
  2. Die Ebenen $y' = 0$ bzw. $z' = 0$ fallen stets zusammen mit den Ebenen $y = 0$ bzw. $z = 0$.
  3. S' bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $v\,\vec{e}_x$ längs der x-Achse von S.
  4. Die Deckungsgleichheit von S und S' besteht zum Systemzeitpunkt $t = t' = 0$.

[1] Vgl. Eckhard Rebhan, Theoretische Physik: Relativitätstheorie und Kosmologie, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012, Seite 21 und Seite22.

- Der **Minkowski-Raum** ist ein (reeller) vierdimensionaler pseudoeuklidischer Vektorraum mit dem Minkowski-Skalarprodukt. Im Minkowski-Raum „lebt" die SRT. Der Minkowski-Raum wird oft auch durch $\mathbb{R}^{3+1}$ (3 Raumdimensionen + 1 Zeitdimenion) symbolisiert.

  Das Skalarprodukt im Minkowski-Raum ist nicht positiv definit sondern indefinit und wird deshalb Pseudoskalarprodukt oder **Minkowski-Produkt** genannt. Minkowski-Produkte[2]

$$\eta_{\mu\nu}\, a^\mu b^\nu = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 = a_0 b^0 - \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}\,, \tag{7.1}$$

  wie z. B. das Quadrat des Weltlinienelements

$$\eta_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}s^2\,, \tag{7.2}$$

  liefern für *alle* Lorentz-Transformationen (nicht nur für Boosts) lorentzinvariante Skalare, die **Lorentz-Skalare**. (Räumliche) Drehungen verändern weder die Zeitkomponenten wie beispielsweise a^0 bzw. a_0 von Vierervektoren noch ihr räumliches (Standard-)Skalarprodukt wie beispielsweise $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}$.

- **Zum Sprachgebrauch**

  Sprachlich leider nicht korrekt werden wir die Lorentz-Transformationsmatrizen selbst und auch ihre Darstellungen in „Indexschreibweise" als Lorentz-Transformationen bezeichnen, obwohl der Begriff Lorentz-Transformation den *Vorgang* der Transformation eines mathematisch-physikalischen Objekts beschreibt.

7.1 Zum Tensorkalkül für die SRT

- **Tensor-Definition**

  Ein $(m,\, n)$-Tensor ist eine multilineare Abbildung, die m Einsformen (Kovektoren) und n Vektoren in die reellen Zahlen abbildet. Die Komponenten eines $(m,\, n)$-Tensors besitzen m obere (kontravariante) und n untere (kovariante) Indizes. Tensoren zeichnen sich durch ein bestimmtes Transformationsverhalten bei einem Wechsel des Koordinatensystems aus. Z. B. transformiert sich ein $(1, 2)$-Tensor beim Wechsel vom ungestrichenen zum gestrichenen Koordinatensystem wie folgt:

$$T^{i'}{}_{j'k'} = \frac{\partial i'}{\partial i}\, \frac{\partial j}{\partial j'}\, \frac{\partial k}{\partial k'}\, T^{i}{}_{jk}\,. \tag{7.3}$$

  Mathematische Objekte, die sich nicht in dieser Weise transformieren, sind keine Tensoren. Vereinfacht gesagt gilt:

Tensor 0. Stufe	$\widehat{=}$	Skalar ,
Tensor 1. Stufe	$\widehat{=}$	Vektor (kontravariant) oder Kovektor (kovariant) ,
Tensor 2. Stufe	$\widehat{=}$	quadratische Matrix ,
Tensor 3. Stufe	$\widehat{=}$	kubisches Array oder „kubische Matrix" wie z. B. der total antisymmetrische Tensor ϵ_{ijk} (Levi-Civita-Symbol) ,
u.s.w.		

[2]Minkowski-Produkte gehören zu den Bilinearformen. Eine Bilinearform ist:
- eine Multilinearform mit zwei Argumenten,
- eine Funktion, die zwei Vektoren, den Argumenten, einen Skalarwert zuordnet,
- linear in ihren Argumenten.

- **Vierervektoren**
  Vierervektoren sind (kontravariante) Vektoren wie beispielsweise $\big(u^i\big)$ und (kovariante) Kovektoren wie beispielsweise $\big(u_i\big)$ im Minkowski-Raum, einem (reellen) vierdimensionalen pseudoeuklidischen Raum.

  Vierervektoren werden manchmal durch fettgedruckte Großbuchstaben wie z. B.

  $$\left.\begin{array}{lcl} u^i & \longrightarrow & \big(u^i\big) \\ u_i & \longrightarrow & \big(u_i\big) \end{array}\right\} =: \mathbf{U}\,.$$

  symbolisiert. Da Vierervektoren sowohl ko- als auch kontravariant dargestellt werden können, muss im Tensorkalkül darauf geachtet werden, welche dieser beiden Darstellungsformen gemäß der Rechenregeln für das Vierervektorsymbol (hier beispielsweise $\mathbf{U}$) zu verwenden ist.

  Das **Normquadrat** $\langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle := g_{ij} u^j u^i = u_i u^i = u^i u_i$ von Vierervektoren $\mathbf{U}$ ist **invariant unter Lorentz-Transformationen** und indefinit[3]. Vierervektoren sind Tensoren 1. Stufe und transformieren sich deshalb wie Tensoren.

  Analog zu gewöhnlichen Ortsvektoren $\vec{\boldsymbol{r}} = (x, y, z)$ sind die **Viererortsvektoren**[4] (auch kurz **Viererorte** genannt)

  $$\left.\begin{array}{lcl} x^i & \longrightarrow & \big(x^i\big) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \\ x_i & \longrightarrow & \big(x_i\big) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \end{array}\right\} =: \mathbf{X}\,.$$

- **Matrizen sind keine Tensoren**!

  Matrizen lassen sich nur dann als Tensoren darstellen, wenn sie quadratisch sind und wenn ihre Elemente das Transformationsverhalten von Tensoren besitzen.

- **Tensoren sind keine Matrizen**!

  Es ist aber manchmal hilfreich, Tensoren als Matrizen darzustellen. Dieser Übergang von der Tensor- zur Matrixdarstellung ist nur für Tensoren bis zur zweiten Stufe möglich.

  Im Gegensatz zur Matrizenrechnung betreffen dann Tensor-Rechenoperationen immer nur ein Element der zugehörigen Matrix. Weil man aber (einzelne) Elemente oder Komponenten nicht transponieren kann, lassen sich Tensoren „eigentlich“ nicht transponieren. Die den transponierten Matrixelementen entsprechenden Tensorkomponenten unterscheiden sich aber dadurch, dass die betreffenden Indizes in der Horizontalen vertauscht sind.

- Die Matrixmultiplikation (nach dem Falk'schen Schema) ist nicht kommutativ. Deshalb dürfen Matrizen bei der Multiplikation in ihrer Reihenfolge allgemein nicht vertauscht werden.

---

[3]Indefinit (unbestimmt) bedeutet in diesem Zusammenhang, dass das Längenquadrat auch negative Werte annehmen kann.

[4]Mit dem Ansatz von Minkowski, bei dem die Zeitkoordinate komplexer Natur ist, gilt für den Viererortsvektor $\mathbf{X} = (x, y, z, ict)$, für das (vierdimensionale) Raumzeitintervall bzw. die Viererverschiebung $\mathrm{d}\mathbf{X} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, ic\mathrm{d}t)$ und für das Quadrat des Weltlinienelements $\mathrm{d}s$

$$\langle \mathrm{d}\mathbf{X}, \mathrm{d}\mathbf{X} \rangle = \mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, ic\mathrm{d}t) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, ic\mathrm{d}t) = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2\,.$$

Wie man sieht, ist in dieser Notation statt := („definiert durch“) das Gleichheitszeichen zu verwenden.

Im Gegensatz dazu ist die Reihenfolge der verschiedenen Tensorkomponenten in Tensorgleichungen nicht relevant. Die mathematischen Operationen werden in der Komponentendarstellung nämlich allein durch die Wahl, die Stellung (hochgestellt oder tiefgestellt) und die Reihenfolge der Indizes „gesteuert“ und nicht wie bei der Matrizenrechnung auch noch durch die Anordnung der Elemente in Zeilen und Spalten. Man spricht deshalb manchmal auch von der **Indexschreibweise** wenn die Komponentendarstellung von Tensoren und Tensorgleichungen gemeint ist.

- Für das **äußere Tensorprodukt**, auch direktes Produkt oder bei einem Produkt aus einem Vektor und einem Kovektor dyadisches Produkt[5] genannt, kann man die Notationen

$$A_{kl} \otimes B^{n}{}_{m} = C^{\,n}{}_{klm} \quad \text{oder einfach} \quad A_{kl}\, B^{n}{}_{m} = C^{\,n}{}_{klm} \tag{7.4}$$

  verwenden.

- Tensoren zweiter Stufe lassen sich stets in Matrizenform schreiben. Umgekehrt transformieren sich die Elemente einer normalen Matrix nicht notwendig wie die Komponenten eines Tensors.

  Beispielsweise liefert das Tensorprodukt oder dyadische Produkt aus einem kontravarianten Tensor a^k der Stufe 1 („Vektor“) und einem kovarianten Tensor b_l der Stufe 1 („Kovektor“, „Einsform“) einen gemischten Tensor der Stufe 2 („Matrix“):

$$a^k\, b_l = C^k{}_l \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \cdot \Big(b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3\Big) = \begin{pmatrix} a^0b_0 & a^0b_1 & a^0b_2 & a^0b_3 \\ a^1b_0 & a^1b_1 & a^1b_2 & a^1b_3 \\ a^2b_0 & a^2b_1 & a^2b_2 & a^2b_3 \\ a^3b_0 & a^3b_1 & a^3b_2 & a^3b_3 \end{pmatrix} . \tag{7.5}$$

  Die 16 Komponenten $C^k{}_l$ transformieren sich dann mit $\dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\,\dfrac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} = A^{k'l}_{kl'}$ wie

$$A^{k'l}_{kl'}\, C^k{}_l \;=\; C^{k'}{}_{l'} \,.$$

- Die **Verjüngung bzw. Kontraktion** von (7.5) bezüglich der Indizes k und l ist

$$a^k\, b_k = C^k{}_k = a^1b_1 + a^2b_2 + \cdots \; = C^1{}_1 + C^2{}_2 + \cdots \; = c\,, \tag{7.6}$$

  also ein Tensor der Stufe 0, ein Skalar. Durch Verjüngung eines Tensors bezüglich *zweier* Indizes, d. h. durch Gleichsetzen zweier Indizes eines Tensors reduziert sich seine Stufe um 2. Auf diese Weise kann man Tensoren der Stufen ≥ 4 mehrfach nacheinander kontrahieren, sodass bei geraden Stufen am Ende ein Skalar resultiert.

  Die Verjüngung des Tensorprodukts aus einem kovarianten und einem kontravarianten Tensor der Stufe 1, d. h. die Verjüngung eines gemischten Tensors der Stufe 2 ist die Analogie zur Bildung des Skalarprodukts aus zwei Vektoren im euklidischen Raum.

[5] Dyade – Zusammenfassung zweier Einheiten. Das dyadische Produkt ist das Matrixprodukt C zweier Vektoren $\vec{\boldsymbol{a}}$ und $\vec{\boldsymbol{b}}$ gemäß $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}} = C$ bzw. in Komponentenschreibweise für kartesische Koordinaten: $a_i\, b_j = C_{ij}$.

- Schreibt man ${C^k}_l$ als Matrix $\left({C^k}_l\right)$, bekommt die Verjüngung (bezüglich der Indizes k und l) die Form

$$a^k\, b_k = {C^k}_k = \mathrm{Spur}\left\{\left({C^k}_l\right)\right\} = c\,. \tag{7.7}$$

- Das innere Produkt zweier Tensoren, auch Überschiebung oder Faltung genannt, erhält man, indem jeweils ein Index der beiden Faktoren gleichgesetzt und darüber summiert wird. Die Stufe des resultierenden **inneren Tensorprodukts** ist dann gegenüber der Summe der Stufen der Faktoren um 2 vermindert:

$$\underbrace{{A^i}_{jk}\, {B^{kl}}_m}_{\sum \text{Stufen}=6} \;=\; \underbrace{{C^{il}}_{jm}}_{\text{Stufe } 4}\,.$$

- Ein **kontravarianter Tensor** v^α erster Stufe[6], also ein Vektor, transformiert sich von S nach S' gemäß

$$v^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\, v^\alpha = {A^{\alpha'}}_\alpha\, v^\alpha \tag{7.8}$$

mit der Transformationsmatrix $\boldsymbol{A} = \left({A^{\alpha'}}_\alpha\right) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\right)$. Die Rücktransformation erfolgt mit $\boldsymbol{A}^{-1} = \left({A^\alpha}_{\alpha'}\right) = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\right)$ gemäß

$$v^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\, v^{\alpha'} = {A^\alpha}_{\alpha'}\, v^{\alpha'}\,. \tag{7.9}$$

- Ein **kovarianter Tensor** v_α erster Stufe, also ein Kovektor bzw. eine Einsform transformiert sich von S nach S' gemäß

$$v_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\, v_\alpha = {A_{\alpha'}}^\alpha\, v_\alpha \tag{7.10}$$

mit der Transformationsmatrix $\boldsymbol{A}^{-1}$. Die Rücktransformation erfolgt mit $\boldsymbol{A}$ gemäß

$$v_\alpha = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\, v_{\alpha'} = {A_\alpha}^{\alpha'}\, v_{\alpha'}\,. \tag{7.11}$$

- Der metrische Tensor[7], kurz Metrik-Tensor, wird in der SRT **Minkowski-Tensor** genannt und ist dort in Matrixschreibweise

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\,. \tag{7.12}$$

Daraus folgt in Tensor-Komponentenschreibweise

$$\eta^{\alpha\beta} = \eta^{\beta\alpha} = \eta_{\beta\alpha} = \eta_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad \eta^{\alpha\beta}\,\eta_{\beta\gamma} = {\eta^\alpha}_\gamma = \eta^\alpha_\gamma = \delta^\alpha_\gamma = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \gamma \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \gamma \end{cases} \tag{7.13}$$

bzw. als Matrix geschrieben die Einheitsmatrix $\left(\delta^\alpha_\gamma\right) = \mathbb{1}$. Wie man sieht, ist das Kronecker-Symbol $\delta^\alpha_\gamma = \eta^\alpha_\gamma$ ein symmetrischer Tensor, weshalb die Indizes übereinander geschrieben werden dürfen.

[6] Anstatt „n-ter Stufe“ sagt man auch „der Stufe n“.

[7] Allgemein wird der metrische Tensor mit $g_{\mu\nu}$ und der inverse metrische Tensor mit $g^{\mu\nu}$ bezeichnet, in der SRT jedoch meistens mit $\eta_{\mu\nu}$ bzw. mit $\eta^{\mu\nu}$.

- **Transponierte, isomere, symmetrische und antisymmetrische Tensoren**

  Transponieren (spiegeln, stürzen, indiziert durch T) im eigentlichen Wortsinn lassen sich in Analogie zu quadratischen Matrizen $\boldsymbol{A} = \big(A_{ij}\big)$ nur Tensoren 2. Stufe:
  in Matrixdarstellung: $\big(A_{ij}\big) \xrightarrow{\mathrm{T}} \big(A_{ij}\big)^{\mathrm{T}} = \big(A_{ji}\big)$,
  in Komponentendarstellung: $A_{ij} \xrightarrow{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}_{ij} = A_{ji}$.
  Dabei vertauschen die beiden Indizes ihre Reihenfolge in der Horizontalen. Allgemein sind Tensoren **isomer**, wenn sich ihre Komponenten nur in der Reihenfolge ihrer Indizes unterscheiden. Demzufolge besitzt ein Tensor n-ter Stufe $n!$ Isomere.

  Ein Tensor 2. Stufe heißt **symmetrisch**, wenn $A_{ij} = A_{ji} = A^{\mathrm{T}}_{ij}$.
  Ein Tensor 2. Stufe heißt **antisymmetrisch**, wenn $A_{ij} = -\,A_{ji} = -\,A^{\mathrm{T}}_{ij}$.
  Synonyme zu antisymmetrisch sind antimetrisch, schief symmetrisch und alternierend.

- **Inverse und orthogonale Tensoren**

  In Analogie zu quadratischen Matrizen wie beispielsweise $\boldsymbol{A} = \big(A^i{}_j\big)$ kann es zu Tensoren 2. Stufe inverse Tensoren geben entsprechend $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \mathbb{1}$ und können Tensoren 2. Stufe orthogonal sein entsprechend $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

  $A^{-1\,i}{}_j$ ist der **inverse** Tensor zu $A^i{}_j$ wenn $A^i{}_j\,A^{-1\,j}{}_k = \delta^i_k$. So ist beispielsweise der kontravariante Metriktensor g^{ij} die Inverse zum (kovarianten) Metriktensor g_{ij} gemäß $g_{ij}\,g^{jk} = \delta^k_i$.

  Der Tensor $A^i{}_j$ ist **orthogonal** wenn $A^{\mathrm{T}\,i}{}_j = A^j{}_i = A^{-1\,i}{}_j \;\;\Rightarrow\;\; A^i{}_j\,A^{\mathrm{T}\,j}{}_k = \delta^i_k$.

- Weil Tensorkomponenten reelle Zahlen sind, gelten in Komponentenschreibweise alle Rechenregeln für reelle Zahlen (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität). In Matrixschreibweise sind die Addition und die tensorielle Multiplikation assoziativ und distributiv, aber allgemein nicht kommutativ. So gilt beispielsweise für das dyadische Produkt $\vec{\boldsymbol{a}} \otimes \vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{A} \;\neq\; \vec{\boldsymbol{b}} \otimes \vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.
  Immer kommutativ ist die Multiplikation mit einem Skalar.

  Die Matrixdarstellung ist nur für Tensoren der Stufe 2 und der Stufe 1 (Zeilenvektoren, Spaltenvektoren) möglich. Bei der Übersetzung von Tensoren und Tensorgleichungen von der Komponenten- in die Matrixdarstellung muss berücksichtigt werden, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist. So gilt z. B. in Komponentenschreibweise $A^i{}_j B^j{}_k = B^j{}_k A^i{}_j = C^i{}_k$ und im Gegensatz dazu in Matrixschreibweise $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

  Beim **Übersetzen**[8] **einer Tensorgleichung** von der Komponentendarstellung in die Matrixdarstellung muss zuvor dafür gesorgt werden, dass die Indizes auf beiden Seiten der Gleichung in der gleichen Reihenfolge stehen, wie beispielsweise im Fall des Tensors 3. Stufe
  $$a_k b_i c_j + A_{kj} d_i = B_{ijk} \;\;\Rightarrow\;\; b_i c_j a_k + d_i A_{jk} = B_{ijk} \;\;\longrightarrow\;\; \vec{\boldsymbol{b}} \otimes \vec{\boldsymbol{c}} \otimes \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{d}} \otimes \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}\,.$$

[8] Vgl. Heinz Schade, Klaus Neemann, Tensoranalysis, 3. Auflage, Walter de Gruyter Verlag, Berlin, New York, 2009, Seite 61.

- **Signatur**

  Die Zuordnung der Vorzeichen in der „Minkowsi-Matrix" ist nicht beliebig, aber in bestimmter Weise Konvention und heißt Signatur. Die in der SRT übliche Signatur ist die sog. „West Coast Metric"

  $$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\big(+1,\,-1,\,-1,\,-1\big) \quad \text{oder} \quad \{+\,-\,-\,-\} \mathrel{\widehat{=}} (-2) \quad \text{mit} \quad p_{(+)} = 1\,,\; q_{(-)} = 3$$

  und mit der Dimension n des betrachteten Raumes gemäß

  $$n = p_{(+)} + q_{(-)} = 4\,.$$

  Die in der ART und in der Teilchenphysik bevorzugte Signatur ist die sog. „East Coast Metric"

  $$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\big(-1,\,+1,\,+1,\,+1\big) \quad \text{oder} \quad \{-\,+\,+\,+\} \mathrel{\widehat{=}} (+2) \quad \text{mit} \quad p_{(+)} = 3\,,\; q_{(-)} = 1\,.$$

Anmerkungen

∗ **Transponieren von Tensoren in Komponentenschreibweise**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{D} \\ \longrightarrow \quad A^i{}_j B^j{}_k = C^i{}_k \quad &\Rightarrow \quad B_k{}^j A_j{}^i = D_k{}^i = C^{\mathrm{T}i}{}_k\,. \end{aligned}$$

Für die Lorentz-Transformation $\boldsymbol{L}$ bedeutet das, auch wenn $\boldsymbol{L}$ kein Tensor sondern eine Transformationsmatrix ist,

$$\boldsymbol{L} \longrightarrow L^\mu{}_\nu \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \longrightarrow L_\nu{}^\mu\,.$$

∗ **Invertierten der Lorentz-Transformation in Komponentenschreibweise**

Mit $L^\mu{}_\nu \overset{\mathrm{T}}{\longleftrightarrow} L_\nu{}^\mu$ und unter Berücksichtigung der Symmetrie des metrischen Tensors $\boldsymbol{\eta}$ sind (7.19) und (7.42), d. h.

$$\boldsymbol{\eta L \eta}^{-1} = \boldsymbol{L}^{-1\mathrm{T}} \quad \overset{\mathrm{T}}{\Longleftrightarrow} \quad \boldsymbol{L}^{-1} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\,,$$

in Tensor-Komponentenschreibweise

$$\eta_{\varrho\mu}\, L^\mu{}_\nu\, \eta^{\nu\sigma} = \overset{-1}{L}_\varrho{}^\sigma \quad \overset{\mathrm{T}}{\Longleftrightarrow} \quad \overset{-1}{L}{}^\sigma{}_\varrho = \eta^{\sigma\nu}\, L_\nu{}^\mu\, \eta_{\mu\varrho}\,.$$

Nach den Umbenennungen $\varrho \to \mu$ (μ wird durch $\eta_{\varrho\mu}$ gesenkt) und $\sigma \to \nu$ (ν wird durch $\eta^{\nu\sigma}$ gehoben) sehen wir, dass in Komponentenschreibweise gilt:

$$L^\mu{}_\nu \quad \overset{-1\mathrm{T}}{\longleftrightarrow} \quad L_\mu{}^\nu \quad \overset{\mathrm{T}}{\longleftrightarrow} \quad L^\nu{}_\mu$$

$$\Rightarrow \quad L^\mu{}_\nu \quad \overset{-1}{\longleftrightarrow} \quad \overset{-1}{L}{}^\mu{}_\nu = L^\nu{}_\mu\,.\; \square$$

Wir schließen diesen Abschnitt ab mit einem Zitat, in Anführungszeichen gesetzt, zur Indizierung von Tensoren aus einem Vorlesungsskript von Prof. Peter Richter (1945–2015), Universität Bremen:

„$\boldsymbol{L}$ ist, wenn denn die Forderung an das Skalarprodukt erfüllt ist, die Matrix einer *Lorentz-Transformation.* ... Die ... (Pseudo-)Metrik ist dann gegeben durch den Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\nu\mu} \ , \qquad g^{-1}_{\mu\nu} =: g^{\mu\nu} \ , \tag{7.14}$$

mit $g_{\lambda\mu} g^{\mu\nu} = \delta^\nu_\lambda = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$. Als Matrizen sind $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ offenbar gleich. ... Als *Lorentz-Transformation* (LT) bezeichnet man lineare Abbildungen des x^ν-Raums (der Raum-Zeit), die dieses Skalarprodukt invariant lassen:

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu \qquad \text{mit} \qquad x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu \ . \tag{7.15}$$

Aus dieser Bedingung folgt, dass

$$L^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} L^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} = \delta^\tau_\rho \tag{7.16}$$

sein muss“, denn

$$x'_\nu x'^\nu = L^\mu{}_\rho g_{\mu\nu}\, x^\rho\, L^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau}\, x_\tau = \delta^\tau_\rho\, x^\rho x_\tau = x^\tau x_\tau = x_\nu x^\nu \ . \tag{7.17}$$

„Wenn wir $L^\mu{}_\nu$ als Matrix $\boldsymbol{L}$ schreiben und $L_\nu{}^\mu$ als transponierte Matrix $\boldsymbol{L}^t$ (die Reihenfolge von Zeilen- und Spaltenindex ist vertauscht, ohne dass oben und unten verändert wird), also

$$L^{t\mu}{}_\nu = L_\nu{}^\mu \ , \tag{7.18}$$

dann ist[9] (7.16) die Matrixgleichung

$$\boldsymbol{L}^t \boldsymbol{g} \boldsymbol{L} \boldsymbol{g}^{-1} = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{L}^t = \boldsymbol{g} \boldsymbol{L}^{-1} \boldsymbol{g}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{L}^{-1t} = \boldsymbol{g} \boldsymbol{L} \boldsymbol{g}^{-1} \ . \tag{7.19}$$

Die letzte Gleichung lautet wiederum in Komponenten (man beachte, dass $\boldsymbol{g}$ Indizes herunter- und $\boldsymbol{g}^{-1}$ Indizes heraufzieht)

$$\left(L^{-1t}\right)^\mu{}_\nu = L_\mu{}^\nu \ . \tag{7.20}$$

Während also die Transposition gemäß (7.18) die Indizes in der Horizontalen vertauscht, bewirkt die kombinierte Transposition und Inversion das Vertauschen von oben und unten. Die Matrix in (7.20) definiert aber die Transformation der kovarianten Vektoren, wie man durch Einsetzen in $x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu$ sofort bestätigt:

$$x'_\mu = L_\mu{}^\nu x_\nu \ . \tag{7.21}$$

Es ist nützlich, sich ein für allemal klarzumachen, wie sich die Matrizen $A^\mu{}_\nu$ und $A_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho} A^\rho{}_\sigma g^{\sigma\nu}$ zueinander verhalten:

$$A^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\ -a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{.“} \tag{7.22}$$

[9] Anmerkung von Reinhard Weiß: Dann ist (7.16) die Tensorgleichung $L_\rho{}^\mu g_{\mu\nu} L^\nu{}_\sigma g^{\sigma\tau} = \delta^\tau_\rho$ mit

$$L_\rho{}^\mu \to \boldsymbol{L}^t\,, \quad g_{\mu\nu} \to \boldsymbol{g}\,, \quad L^\nu{}_\sigma \to \boldsymbol{L}\,, \quad g^{\sigma\tau} \to \boldsymbol{g}^{-1}\,, \quad \delta^\tau_\rho \to \mathbf{1}\ .$$

7.2 Zum Minkowski-Produkt

- Das Skalarprodukt bzw. innere Produkt aus zwei Vierer-Vektoren **U** und **A** wird **Minkowski-Produkt** oder auch Lorentz-Pseudoskalarprodukt genannt und ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \big\langle \mathbf{U}, \mathbf{A} \big\rangle \;:=\; u^{\mu}\,\eta_{\mu\nu}\,a^{\nu} \;&=\; u_{\nu}\,a^{\nu} \;=\; u^{\mu}\,a_{\mu} \\ &=\; u_{\mu}\,a^{\mu} \;=\; u^{\nu}\,a_{\nu}\;. \end{aligned}$$

  Die Kombinationen $u_{\mu}\,a_{\mu}$ und $u^{\mu}\,a^{\mu}$ sind keine Minkowski-Produkte, denn sie nehmen in jedem Koordinatensystemen paarweise verschiedene Werte an, sind also nicht invariant unter Lorentz-Transformationen.

  Das Minkowski-Produkt ist kommutativ, denn es gilt

$$\begin{aligned} \big\langle \mathbf{U}, \mathbf{A} \big\rangle &:= u_{\mu}a^{\mu} = u^0a^0 - u^1a^1 - u^2a^2 - u^3a^3 = u^{\mu}a_{\mu} = \\ &= a^{\mu}u_{\mu} = a^0u^0 - a^1u^1 - a^2u^2 - a^3u^3 = a_{\mu}u^{\mu} =: \big\langle \mathbf{A}, \mathbf{U} \big\rangle\;. \end{aligned}$$

  Im speziellen Fall $\mathbf{U} = \mathbf{A}$ resultiert das **skalare Lorentz-Quadrat** wie z. B. $\mathrm{d}s^2$, das Quadrat des Weltlinienelements $\mathrm{d}s$.

- Der euklidische Raum ist ein nicht gekrümmter, d. h. ein flacher Raum mit dem infinitesimalen Abstandsquadrat (Quadrat des Linienelements) $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^{\,2}$ zwischen zwei Ortsraumpunkten $\vec{\boldsymbol{r}}$ und $\vec{\boldsymbol{r}} + \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$ gemäß

$$\begin{aligned} &\big\langle \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} \big\rangle = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^{\,2} = \mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^k \;\longrightarrow \\ &\qquad \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^{\,2} = \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^{\mathrm{T}}\!\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \big(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\big)\cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \boldsymbol{\cdot} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}\;, \\ &\qquad \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}^{\,2} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\;. \end{aligned}$$

- Der Minkowski-Raum (in der SRT) ist ein pseudoeuklidischer, unendlich ausgedehnter, flacher, homogener und isotroper Raum mit dem infinitesimalen Abstandsquadrat $\mathrm{d}s^2$ zwischen zwei Raumzeitpunkten bzw. Ereignissen. Dieses Abstandsquadrat ist das Quadrat des **Weltlinienelements** $\mathrm{d}s$ gemäß

$$\begin{aligned} &\big\langle \mathrm{d}\mathbf{X}, \mathrm{d}\mathbf{X} \big\rangle := \mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\nu}\mathrm{d}x^{\mu} = \mathrm{d}x_{\mu}\mathrm{d}\,x^{\mu} \;\longrightarrow \\ &\qquad \mathrm{d}s^2 = \Big[\boldsymbol{\eta}\cdot\big(\mathrm{d}x^{\nu}\big)\Big]^{\mathrm{T}}\!\cdot \big(\mathrm{d}x^{\mu}\big) = \big(c\,\mathrm{d}t, -\mathrm{d}x, -\mathrm{d}y, -\mathrm{d}z\big)\cdot \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}\;, \\ &\qquad \mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2\;. \end{aligned}$$

- **Das Minkowski-Produkt ist invariant unter Lorentz-Transformation**:

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{U}', \mathbf{A}' \right\rangle := u'_\mu \, a'^\mu &= \eta_{\mu\nu} \, L^\nu{}_\sigma \, u^\sigma \, L^\mu{}_\tau \, a^\tau \\ &= u^\sigma \, \underbrace{L_\sigma{}^\nu \eta_{\nu\mu} L^\mu{}_\tau} \, a^\tau \\ &= u^\sigma \, \eta'_{\sigma\tau} \, a^\tau = u_\tau \, a^\tau =: \left\langle \mathbf{U}, \mathbf{A} \right\rangle .\end{aligned}$$

  Hierbei ist $\qquad L_\sigma{}^\nu \eta_{\nu\mu} L^\mu{}_\tau = \eta'_{\sigma\tau} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\eta}'$

  die Pseudo-Orthogonalitätsrelation (7.55).

  In Analogie dazu zeigt sich am Weltlinienelement ds das **Minkowski-Postulat**

$$\left\langle \mathrm{d}\mathbf{X}', \mathrm{d}\mathbf{X}' \right\rangle := \mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}x'_\mu \mathrm{d}x'^\mu = \mathrm{d}x_\tau \mathrm{d}x^\tau = \mathrm{d}s^2 =: \left\langle \mathrm{d}\mathbf{X}, \mathrm{d}\mathbf{X} \right\rangle ,$$

  die Lorentz-Invarianz (des Quadrats) des Weltlinienelements.

- Das Skalarprodukt im euklidischen Raum ist positiv definit.
  Das Pseudoskalarprodukt im Minkowski-Raum, das Minkowski-Produkt, kann auch negative Werte annehmen und ist folglich nicht positiv definit sondern indefinit.

7.3 Zum metrischen Tensor (Metriktensor)

- Schreibweise allgemein: $g_{ik} \longrightarrow \boldsymbol{g}$.
- Der Metriktensor ist symmetrisch:

$$g_{ik} = g_{ki} \longrightarrow \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} . \tag{7.23}$$

- Der Metriktensor im eigentlichen Sinne ist kovariant. Der kontravariante Metriktensor ist die Inverse des (kovarianten) Metriktensors:

$$g^{ik} = g^{-1}_{ik} \Rightarrow g_{ik}\, g^{kj} = \delta^j_i \longrightarrow \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g}^{-1} = \mathbb{1} .$$

  In der SRT ist der Metriktensor die Inverse zu sich selbst:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} = \eta^{-1}_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \longrightarrow \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\eta}^{-1} . \tag{7.24}$$

  Und für den Metriktensor des kartesischen Koordinatensystems im euklidischen Raum gilt:

$$g_{ik} \equiv \text{Kronecker-delta}\, \delta_{ik} = \delta_{ki} = \delta^{ik} \longrightarrow \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{g}^{-1} = \mathbb{1} .$$

- **In der SRT** wird der Metriktensor auch **pseudometrischer Tensor** genannt. Zur Unterscheidung wird der Metriktensor in der SRT oft mit $\eta_{\mu\nu} \longrightarrow \boldsymbol{\eta}$ bezeichnet in der Signatur $\{+---\} \mathrel{\widehat{=}} (-2)$ $\big($sog. „West Coast Metric“ für die Orthogonale Gruppe bzw. Lorentz-Gruppe O(1,3)$\big)$:

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

- Der Metriktensor $\boldsymbol{\eta}$ beschreibt die Metrik des Minkowski-Raums, welcher definiert ist durch die Lorentz-Invarianz des Minkowski-Produkts bzw. des Weltlinienelements (sog. Minkowski-Postulat). Im Gegensatz zur ART ist der Metriktensor in der SRT **koordinatenunabhängig**, also auch unabhängig von der Relativgeschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}}$ und von Drehungen zwischen S und S'.[10]

- Bei Einbettung einer Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten u^i in einen euklidischen Raum mit kartesischen Koordinaten x^i liefert die Jacobi-Matrix J den Metriktensor g_{ik} als Matrix $\boldsymbol{g}$ wie folgt:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} & \frac{\partial x^3}{\partial u^3} \end{pmatrix} = \Big(\vec{\boldsymbol{g}}_1 \,,\, \vec{\boldsymbol{g}}_2 \,,\, \vec{\boldsymbol{g}}_3\Big) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{g} = J^{\mathrm{T}} J \longleftarrow g_{ik} = \vec{\boldsymbol{g}}_i^{\mathrm{T}} \cdot \vec{\boldsymbol{g}}_k = \frac{\partial x^l}{\partial u^i} \frac{\partial x^l}{\partial u^k} .$$

[10] Relativgeschwindigkeit und Drehung zwischen S und S' charakterisieren die Lorentz-Transformation und bestimmen in der geometrischen Darstellung der Koordinatensysteme die Lage und die Skalierung der Koordinatenachsen.

- Der Metriktensor ist invariant unter Lorentz-Transformationen:

$$\eta'_{\rho\tau} = \Lambda_\rho{}^\mu\,\eta_{\mu\nu}\,\Lambda^\nu{}_\tau = \eta_{\mu\nu} \quad\longrightarrow\quad \boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\eta}\;. \;\square$$

  Durch Multiplikation von links mit $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ und von rechts mit $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ resultiert daraus

$$\boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\;.$$

  Für die Lorentz-Transformation $\boldsymbol{L}$ in Standardkonfiguration gilt analog

$$\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\eta}\;.$$

  Dies ist die Pseudo-Orthogonalitätsrelation (7.55).

- $g_{ik} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{g}$ zieht Indizes herunter (aus kontra- wird kovariant).
  $g^{ik} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{g}^{-1}$ zieht Indizes herauf (aus ko- wird kontravariant).
  Dazu ein Beispiel im Minkowski-Raum mit der Metrik in der üblichen Signatur $\{+---\} \mathrel{\widehat{=}} (-2)$:

  kontravarianter Ortsvierervektor (Vektor) $\quad x^\mu := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

  kovarianter Ortsvierervektor (Kovektor) $\quad x_\mu := \big(x_0,\; x_1,\; x_2,\; x_3\big) = \big(ct, -x, -y, -z\big)$,

$$\eta_{\mu\nu}\,x^\nu = x_\mu \;\longrightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \big(ct, -x, -y, -z\big)^{\mathrm{T}}\,,$$

$$\eta^{\mu\nu}x_\nu = x_\nu\,\eta^{\nu\mu} = x^\mu \;\longrightarrow\; \big(ct, -x, -y, -z\big) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \big(ct,\; x,\; y,\; z\big) = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\,.$$

7.4 Zur Lorentz-Transformation

- Die **Lorentz-Transformationen**, vermittelt durch entsprechende Transformationsmatrizen $\boldsymbol{L}$, kann man auch als Drehungen um einen rein imaginären Winkel und deshalb als orthogonale Transformationen im Minkowski-Raum auffassen. Dies ist allerdings nur dann der Fall, wenn man für den Minkowski-Raum nicht die reelle Zeitkoordinate ct sondern die komplexe (imaginäre) Zeitkoordinate $\mathrm{i}ct$ verwendet. Nur dann steht die Zeit-Koordinatenachse senkrecht auf den Raum-Koordinatenachsen und die Lorentz-Transformationen entsprechen tatsächlich Drehungen des Koordinatensystems. Man spricht deshalb von **hyperbolischer Orthogonalität** oder von **Pseudo-Orthogonalität** der Lorentz-Transformationsmatrizen.

  Die oben verwendete Bezeichnung „orthogonal" für die Lorentz-Transformationen ist irreführend, denn sie besitzen im Allgemeinen nicht die für orthogonale Transformationsmatrizen $\boldsymbol{D}$ (z. B. Drehmatrizen) charakteristische Eigenschaft $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} = \mathbb{1}$. Allgemein sind die Lorentz-Transformationen $\boldsymbol{L}$ nämlich charakterisiert durch

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \neq \mathbb{1} \tag{7.25}$$

$$\text{Beispiel:} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2(1+\beta^2) & -2\beta\gamma^2 \\ -2\beta\gamma^2 & \gamma^2(1+\beta^2) \end{pmatrix} \neq \mathbb{1}$$

  bzw. durch die **Pseudo-Orthogonalitätsrelation**

$$\boxed{\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{L} \; = \; \boldsymbol{\eta}} \tag{7.26}$$

$$\text{Beispiel:} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & \beta\gamma^2-\beta\gamma^2 \\ \beta\gamma^2-\beta\gamma^2 & -\gamma^2(1-\beta^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

  Aus dieser Gleichung folgt

$$\underbrace{\boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}}\,\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{\eta} = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \tag{7.27}$$

$$\boxed{\boldsymbol{L}^{-1} \; = \; \boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}} \tag{7.28}$$

$$\text{Beispiel:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

  Unter Berücksichtigung der Symmetrie von $\boldsymbol{\eta}$ resultiert daraus schließlich

$$\boldsymbol{L}^{-1\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{\eta}^{-1\mathrm{T}} = \boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{\eta}^{-1} . \tag{7.29}$$

  Die Pseudo-Orthogonalität der Lorentz-Transformationsmatrizen im pseudoeuklidischen Raum entspricht der Orthogonalität der Drehmatrizen im euklidischen Raum. **Allgemein sind Lorentz-Transformationen alle linearen, eindeutigen Transformationen des $\mathbb{R}^4$, die das Minkowski-Produkt invariant lassen.**

- Die **spezielle Lorentz-Transformationsmatrix** $\left(L^{\mu}{}_{\nu}\right)(\vec{\boldsymbol{v}})$ für die Transformation kontravarianter Vierer-Größen von S nach S' **in Standardkonfiguration** ist

$$\boldsymbol{L} = \left(L_{\alpha}^{\alpha'}\right) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \boldsymbol{L} = 1\ . \tag{7.30}$$

Die dazu **inverse Lorentz-Transformationsmatrix** $\left(L^{\mu}{}_{\nu}\right)(-\vec{\boldsymbol{v}})$ für die Rücktransformation kontravarianter Vierer-Vektoren von S' nach S **in Standardkonfiguration** ist

$$\boldsymbol{L}^{-1} = \left(L_{\alpha'}^{\alpha}\right) = \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \boldsymbol{L}^{-1} = 1\ . \tag{7.31}$$

Wie allgemein üblich haben wir hierbei verwendet:

$$\beta = \frac{v}{c}\ , \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ . \tag{7.32}$$

„Die Indizes der Transformationsmatrix Λ_{β}^{α} können übereinander geschrieben werden, weil diese Größe kein Tensor ist. Um die Tensordefinition zu erfüllen, müsste Λ ja zuerst einmal in IS und IS' definiert sein; Λ ist jedoch eine Größe, die dem Übergang zwischen IS und IS' zugeordnet ist.“[11]

- **Lorentz-Invarianz des Minkowski-Tensors und Pseudo-Orthogonalität der Lorentz-Transformation in Komponentendarstellung**

Wir gehen aus von der Lorentz-Invarianz des Linienelements gemäß

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} = \eta_{\alpha'\beta'}\,\mathrm{d}x^{\alpha'}\mathrm{d}x^{\beta'}\ . \tag{7.33}$$

Einsetzen der Lorentz-Transformationen

$$\mathrm{d}x^{\alpha'} = L_{\alpha}^{\alpha'}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\ , \qquad \mathrm{d}x^{\beta'} = L_{\beta}^{\beta'}\,\mathrm{d}x^{\beta} \tag{7.34}$$

ergibt

$$\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} = \eta_{\alpha'\beta'}\,L_{\alpha}^{\alpha'}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\,L_{\beta}^{\beta'}\,\mathrm{d}x^{\beta}\ , \tag{7.35}$$

$$\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} = \underbrace{L_{\alpha}^{\alpha'}\,\eta_{\alpha'\beta'}\,L_{\beta}^{\beta'}}_{\eta_{\alpha\beta}}\,\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta}\ . \tag{7.36}$$

Wie wir sehen, gilt

$$\boxed{L_{\alpha}^{\alpha'}\,\eta_{\alpha'\beta'}\,L_{\beta}^{\beta'} = \eta_{\alpha\beta}}\ .\ \square \tag{7.37}$$

[11] Zitiert aus Torsten Fließbach, Elektrodynamik – Lehrbuch zur Theoretischen Physik II, 4. Aufl., Elsevier, München, 2009, Seite 33. Es steht dort Λ für die Lorentz-Transformation allgemein.

Diese Beziehung ist in Matrixschreibweise

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}'\,\boldsymbol{L} \;=\; \boldsymbol{\eta}\;, \tag{7.38}$$

woraus hervorgeht, dass in (7.37) α ein Zeilenindex und β ein Spaltenindex ist. Denn wenn man die Indizes dem Tensorkalkül entsprechend zueinander versetzt schreibt, sieht man

$$L^{\beta'}_{\beta} = L^{\beta'}{}_{\beta} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{L} \quad\Rightarrow\quad L^{\alpha'}_{\alpha} = L_{\alpha}{}^{\alpha'} \;\longrightarrow\; \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\;.$$

Vergleichen wir die Transformationsleichung (7.38) mit der Pseudo-Orthogonalitätsrelation (7.55), kommen wir zu dem Schluss, dass der Minkowski-Tensor lorentzinvariant ist. Die Lorentz-Transformation des kovarianten Minkowski-Tensors ist folglich

$$\eta_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta} \tag{7.39}$$

und analog dazu ist die Lorentz-Transformation des kontravarianten Minkowski-Tensors

$$\eta^{\alpha'\beta'} = \eta^{\alpha\beta}\;. \tag{7.40}$$

Multiplizieren wir die Pseudo-Orthogonalitätsrelation (7.55) von links mit η^{-1} und von rechts mit der inversen Lorentz-Transformationsmatrix $\boldsymbol{L}^{-1}$ resultiert

$$\boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\,\underbrace{\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{L}^{-1}}_{=\mathbb{1}} = \underbrace{\boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{\eta}}_{=\mathbb{1}}\,\boldsymbol{L}^{-1}\;, \tag{7.41}$$

sodass wir in Übereinstimmung mit (7.28) die inverse Lorentz-Transformationsmatrix aus der Lorentz-Transformationsmatrix erhalten durch[12]

$$\boxed{\;\boldsymbol{L}^{-1} \;=\; \boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\eta}\;}\;. \tag{7.42}$$

Die Pseudo-Orthogonalitätsrelation (7.55) ergibt unter Berücksichtigung von $\det\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = \det\boldsymbol{L}$

$$\det\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\cdot\det\boldsymbol{\eta}\cdot\det\boldsymbol{L} = \det\boldsymbol{L}\cdot\det\boldsymbol{\eta}\cdot\det\boldsymbol{L} = \det\boldsymbol{\eta}\;, \tag{7.43}$$

sodass

$$\boxed{\;\big(\det\boldsymbol{L}\big)^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad \det\boldsymbol{L} = \pm\,1\;}\;. \tag{7.44}$$

Lorentz-Transformationen, die die Pseudo-Orthogonalitätsrelation (7.55) erfüllen, werden zusammengefasst zur Lorentz-Gruppe bzw.
Orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}(\,p_{(+)},q_{(-)}) \;=\; \mathrm{O}(1{,}3)$. Innerhalb der Orthogenalen Gruppe bilden die Lorentz-Transformationen mit $\det\boldsymbol{L} = 1$ und der Minkowski-Metrik (7.12) eine Untergruppe, die **eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe** SO(1,3). Lorentz-Transformationen der Untergruppe SO(1,3) ändern weder die Richtung der Zeitachse noch die Orientierung der räumlichen Achsen.

[12] $(L^{-1})^{\mathrm{T}} = (\eta^{-1}L^{\mathrm{T}}\eta)^{\mathrm{T}} = \eta^{\mathrm{T}}(L^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\eta^{-1,\mathrm{T}} = \eta L\eta^{-1} \;\Leftrightarrow\; \eta^{-1}(L^{-1})^{\mathrm{T}}\eta = \eta^{-1}\eta L\eta^{-1}\eta = L = (L^{-1})^{-1}\;.$

- Die **Lorentz-Transformation eines kontravarianten Tensors** v^α erfolgt gemäß

$$v^{\alpha'} = L^{\alpha'}_{\alpha}\, v^{\alpha} \tag{7.45}$$

  mit der Lorentz-Transformationsmatrix $\boldsymbol{L} = \left(L^{\alpha'}_{\alpha}\right)$.
  Mit der inversen Lorentz-Transformationsmatrix $\boldsymbol{L}^{-1} = \left(L^{\alpha}_{\alpha'}\right)$ ist die **Rücktransformation**

$$v^{\alpha} = L^{\alpha}_{\alpha'}\, v^{\alpha'} \; . \tag{7.46}$$

- **Lorentz-Transformation eines kovarianten Tensors** v_α:

$$v_{\alpha'} = \eta_{\alpha'\beta'}\, v^{\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'}\, L^{\beta'}_{\gamma}\, v^{\gamma} \; = \; \underbrace{\eta_{\alpha'\beta'}\, L^{\beta'}_{\gamma}\, \eta^{\gamma\sigma}}\, v_{\sigma} \tag{7.47}$$

$$v_{\alpha'} \; = \; L^{\sigma}_{\alpha'}\, v_{\sigma} \tag{7.48}$$

$$\Rightarrow \quad L^{\sigma}_{\alpha'} = \eta_{\alpha'\beta'}\, L^{\beta'}_{\gamma}\, \eta^{\gamma\sigma} =: \boldsymbol{L}^{-1} \; . \tag{7.49}$$

  Die Multiplikation (von links) mit der Lorentz-Transformationsmatrix $\boldsymbol{L} = \left(L^{\alpha'}_{\varepsilon}\right)$ ergibt unter Berücksichtigung von (7.37)

$$L^{\alpha'}_{\varepsilon}\, L^{\sigma}_{\alpha'} \; = \; \underbrace{L^{\alpha'}_{\varepsilon}\, \eta_{\alpha'\beta'}\, L^{\beta'}_{\gamma}}\, \eta^{\gamma\sigma} \tag{7.50}$$

$$L^{\alpha'}_{\varepsilon}\, L^{\sigma}_{\alpha'} \; = \; \eta_{\varepsilon\gamma}\, \eta^{\gamma\sigma} \; = \delta^{\sigma}_{\varepsilon} \; . \tag{7.51}$$

  Das aber bedeutet

$$\left(L^{\sigma}_{\alpha'}\right) = \left(L^{\alpha'}_{\varepsilon}\right)^{-1} , \tag{7.52}$$

  sodass die Lorentz-Transformation eines kovarianten Tensors v_α die Gestalt

$$v_{\alpha'} = L^{\alpha}_{\alpha'}\, v_{\alpha} \tag{7.53}$$

  erhält, wobei $\left(L^{\alpha}_{\alpha'}\right) = \boldsymbol{L}^{-1}$ die inverse Lorentz-Transformationsmatrix ist.
  Die Rücktransformation muss deshalb mit der Lorentz-Transformationsmatrix $\boldsymbol{L} = \left(L^{\alpha'}_{\alpha}\right)$ erfolgen:

$$v_{\alpha} = L^{\alpha'}_{\alpha}\, v_{\alpha'} \; . \tag{7.54}$$

- Allgemein werden Lorentz-Transformationsmatrizen mit $\boldsymbol{\Lambda}$ bezeichnet.

  Eigentliche Lorentz-Transformationen sind Drehungen des Ortsraums und/oder Boosts.
  Spezielle Lorentz-Transformationen sind (reine) Boosts, also ohne Rotation des Koordinatensystems.

Hier einige wichtige Bespiele für eigentliche Lorentz-Transformationsmatrizen:

$$\text{Boost in } x\text{-Richtung} \quad \boldsymbol{\Lambda}_x = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{L} \,,$$

$$\text{Boost in } y\text{-Richtung} \quad \boldsymbol{\Lambda}_y = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,,$$

$$\text{Boost in } z\text{-Richtung} \quad \boldsymbol{\Lambda}_z = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \,,$$

$$\text{reine Drehung} \quad \boldsymbol{\Lambda}_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boldsymbol{D} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{mit der Drehmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = \mathbb{1} \,.$$

Der Boost $\boldsymbol{\Lambda}_x$ in **Standardkonfiguration** ist die **Lorentz-Transformation $\boldsymbol{L}$**.

- Boosts sind symmetrisch. Für die Lorentz-Transformation in Standardkonfiguration gilt also
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \;\longrightarrow\; L^{\mu}{}_{\nu} = L_{\nu}{}^{\mu} \,.$$
- Auch wenn $\det \boldsymbol{L} = \det \boldsymbol{L}^{-1} = 1$ gilt, ist $\boldsymbol{L}$ nicht orthogonal, denn
$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{L}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \neq \mathbb{1} \,.$$

  $\boldsymbol{L}$ erfüllt also nicht die Orthogonalitätsrelation.

  $\boldsymbol{L}$ ist eine **hyperbolische Matrix** und erfüllt die

$$\textbf{Pseudo-Orthogonalitätsrelation} \quad \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{L} \;=\; \boldsymbol{\eta}' \;=\; \boldsymbol{\eta} \;: \tag{7.55}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \square$$

Mit $L^{\mu}{}_{\nu} \longrightarrow \boldsymbol{L}$ bzw. $L_{\nu}{}^{\mu} \longrightarrow \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ und mit $\eta_{\mu\rho} \longrightarrow \boldsymbol{\eta}$ ist die **Pseudo-Orthogonalitätsrelation in Tensor-Komponentenschreibweise**

$$L_{\nu}{}^{\mu}\eta_{\mu\rho}L^{\rho}{}_{\tau} \;=\; L_{\nu}{}^{\mu}L_{\mu\tau} \;=\; \eta_{\nu\tau} \,. \tag{7.56}$$

- **Spezielle Lorentz-Transformation in Standardkonfiguration**,
d. h. für einen Boost mit der Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_x,\, 0,\, 0)$, also für die geradlinig-gleichförmige Translation in Richtung der positiven x-Achse, ohne Rotation:

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}\,x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\big(ct - \beta x\big)\ , \quad x' = \frac{x - v\cdot t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\big(x - \beta\, ct\big)\ , \quad y' = y\ , \quad z' = z$$

mit der zugehörigen Lorentz-Transformationsmatrix

$$\boldsymbol{L}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \boldsymbol{L} = 1\ .$$

Lorentz-Transformation in Tensor-Komponentenschreibweise:

$$L^{\alpha'}{}_{\alpha} = L^{\alpha'}_{\alpha} = L^{\mu}{}_{\nu} \ \longrightarrow\ \boldsymbol{L}\ .$$

- **Spezielle inverse Lorentz-Transformation in Standardkonfiguration**,
d. h. für einen Boost mit der Geschwindigkeit $-\vec{\boldsymbol{v}} = (-v_x,\, 0,\, 0)$, also für die geradlinig-gleichförmige Translation in Richtung der negativen x-Achse, ohne Rotation:

$$ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}\,x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\big(ct' + \beta x'\big)\ , \quad x = \frac{x' + v\cdot t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\big(x' + \beta\, ct'\big)\ , \quad y = y'\ , \quad z = z'$$

mit der zugehörigen inversen Lorentz-Transformationsmatrix

$$\boldsymbol{L}^{-1} = \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\right) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \boldsymbol{L}^{-1} = 1\,, \quad \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{-1} = \mathbb{1}\ .$$

Inverse Lorentz-Transformation in Tensor-Komponentenschreibweise:

$$L^{\alpha}{}_{\alpha'} = L^{\alpha}_{\alpha'} = \overset{-1}{L}{}^{\mu}{}_{\nu} \ \longrightarrow\ \boldsymbol{L}^{-1}\ .$$

Es gilt:

$$\left.\begin{array}{rcl} \boldsymbol{L}(\vec{\boldsymbol{v}}) & = & \boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{L}(-\vec{\boldsymbol{v}}) & = & \boldsymbol{L}^{-1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{L}^{-1}(-\vec{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{L}\ .$$

- **$\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost** $\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{v}})$ bzw. **spezielle Lorentz-Transformation mit $\vec{\boldsymbol{v}} = $ const**:

Die Inertialsysteme S und S' sollen die gleiche Achsenausrichtung besitzen und zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ zusammenfallen. S' soll sich mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_x,\, v_y,\, v_z) = (v_1,\, v_2,\, v_3)$ gegenüber S bewegen. Dann erhalten wir die Lorentz-Transformation(smatrix) $\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{v}})$ für den Boost mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{\boldsymbol{v}}$ wie folgt:

1. Schritt
Drehung von S mit der Drehmatrix $\boldsymbol{D}$, sodass die Richtung der x-Achse mit der Richtung von $\vec{\boldsymbol{v}}$ übereinstimmt.

2. Schritt
x-**Boost**, d. h. Anwendung der Lorentz-Transformation $\boldsymbol{L}$ (in Standardkonfiguration).

3. Schritt
Inverse Drehung mit der Drehmatrix $\boldsymbol{D}^{-1}$ zurück zur ursprünglichen Ausrichtung von S und S'.

Diese drei Schritte ergeben in einer Matrixgleichung ausgedrückt

$$\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{v}}) \;=\; \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D} \;=\; \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \delta_{ij} + (\gamma-1)v_i v_j/v^2 \end{pmatrix} ,$$

wobei die Indizes i, j von 1 bis 3 laufen und $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}} = (\beta_1,\, \beta_2,\, \beta_3)$ mit $\beta_i = v_i/c$ ist. Ausgeschrieben resultiert eine **symmetrische** Matrix, der $\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost

$$\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1+\big(\gamma-1\big)\dfrac{\beta_1\beta_1}{\beta^2} & \big(\gamma-1\big)\dfrac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \big(\gamma-1\big)\dfrac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \big(\gamma-1\big)\dfrac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1+\big(\gamma-1\big)\dfrac{\beta_2\beta_2}{\beta^2} & \big(\gamma-1\big)\dfrac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \big(\gamma-1\big)\dfrac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \big(\gamma-1\big)\dfrac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1+\big(\gamma-1\big)\dfrac{\beta_3\beta_3}{\beta^2} \end{pmatrix} . \tag{7.57}$$

Wir erhalten die Transformationsgleichungen des $\vec{\boldsymbol{v}}$-Boosts auch, wenn wir den Ortsvektor $\vec{\boldsymbol{r}} = (x^1, x^2, x^3)$ eines von S nach S' zu transformierenden Ortsvierervektors $\big(x^\mu\big) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ zerlegen in die zu $\vec{\boldsymbol{v}}$ parallele Komponente $\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel$ und die zu $\vec{\boldsymbol{v}}$ senkrechte Komponente $\vec{\boldsymbol{r}}_\perp$:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel + \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \left(\vec{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\cdot}\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{|\vec{\boldsymbol{v}}|}\right)\frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{|\vec{\boldsymbol{v}}|} + \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \frac{\big(\vec{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{r}}\big)\,\vec{\boldsymbol{v}}}{v^2} + \vec{\boldsymbol{r}}_\perp \quad \text{mit} \quad \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel \;.$$

Der $\vec{\boldsymbol{v}}$-Boost lässt $\vec{\boldsymbol{r}}_\perp$ unverändert gemäß

$$\vec{\boldsymbol{r}}_\perp \;\to\; \vec{\boldsymbol{r}}_\perp' = \vec{\boldsymbol{r}}_\perp = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel \;,$$

während er die Zeitkoordinate ct und den Betrag $|\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel|$ von $\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel$ wie folgt transformiert:

$$ct \;\to\; ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}\,|\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel|\right) , \qquad |\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel| \;\to\; |\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel'| = \gamma\big(|\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel| - vt\big) \;.$$

Unter Verwendung von

$$v|\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel| = \vec{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel = \vec{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{\cdot}\vec{\boldsymbol{r}} \qquad \text{und} \qquad \vec{\boldsymbol{r}}\,' = \vec{\boldsymbol{r}}_\perp' + \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel'$$

erhalten wir schließlich

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{r}}\,' &= \vec{\boldsymbol{r}}_\perp + \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel' \\
&= \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_\parallel \; + \; \gamma\big(\vec{\boldsymbol{r}}_\parallel - \vec{\boldsymbol{v}}t\big) \\
&= \vec{\boldsymbol{r}} - \frac{\big(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\big)\,\vec{\boldsymbol{v}}}{v^2} + \gamma\left[\frac{\big(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\big)\,\vec{\boldsymbol{v}}}{v^2} - \vec{\boldsymbol{v}}t\right]
\end{aligned}
$$

und damit insgesamt

$$
\begin{aligned}
ct \;&\longrightarrow\; ct' = \gamma\left(ct - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{c}\right)\;, \\
\vec{\boldsymbol{r}} \;&\longrightarrow\; \vec{\boldsymbol{r}}\,' = \vec{\boldsymbol{r}} + (\gamma-1)\frac{\big(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\big)\,\vec{\boldsymbol{v}}}{v^2} - \gamma\vec{\boldsymbol{v}}t\;.
\end{aligned}
\tag{7.58}
$$

Auch wenn es etwas mühsam ist, schreiben wir (7.58) der Vollständigkeit halber auch noch als Matrixgleichung aus. Dafür ersetzen wir in (7.57) β durch $\frac{v}{c}$ und β_i durch $\frac{v_i}{c}$. Um Verwechselungen des Exponenten von $\vec{\boldsymbol{v}}^{\,2} = v^2$ mit den Indizes von $v^i v^j$ zu vermeiden, versehen wir die Komponenten von $\vec{\boldsymbol{v}}$ und auch von $\vec{\boldsymbol{r}}$ nicht mit hochgestelltem (kontravariantem) Index, sondern verwenden $\vec{\boldsymbol{r}} = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ und $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1,\, v_2,\, v_3)$:

$$
\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{v}})\cdot\begin{pmatrix} ct \\ \vec{\boldsymbol{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\gamma & -\gamma\frac{v_1}{c} & -\gamma\frac{v_2}{c} & -\gamma\frac{v_3}{c} \\
-\gamma\frac{v_1}{c} & 1+(\gamma-1)\frac{v_1v_1}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_1v_2}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_1v_3}{v^2} \\
-\gamma\frac{v_2}{c} & (\gamma-1)\frac{v_1v_2}{v^2} & 1+(\gamma-1)\frac{v_2v_2}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_2v_3}{v^2} \\
-\gamma\frac{v_3}{c} & (\gamma-1)\frac{v_1v_3}{v^2} & (\gamma-1)\frac{v_2v_3}{v^2} & 1+(\gamma-1)\frac{v_3v_3}{v^2}
\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} ct \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\gamma\left(ct - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{c}\right) \\
x_1 + (\gamma-1)\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{v^2}\,v_1 - \gamma v_1 t \\
x_2 + (\gamma-1)\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{v^2}\,v_2 - \gamma v_2 t \\
x_3 + (\gamma-1)\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{v^2}\,v_3 - \gamma v_3 t
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ \vec{\boldsymbol{r}}\,' \end{pmatrix}\;.
$$

- Lorentz-Transformationen lassen sich miteinander verknüpfen bzw. nacheinander ausführen gemäß

$$
\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_1\cdot\boldsymbol{\Lambda}_2\cdot\boldsymbol{\Lambda}_3\cdots\boldsymbol{\Lambda}_n\;.
$$

Dabei ist die Reihenfolge zu beachten, denn nur reine Boosts sind symmetrisch. Reine Boosts in die gleiche Richtung entsprechen dem sogenannten Additionstheorem der Geschwindigkeiten und kommutieren. Drehungen dagegen kommutieren im Allgemeinen nicht. Boosts in verschiedene Richtungen kommutieren ebenfalls nicht, weil ihre Nacheinanderausführung eine Drehung impliziert.

Prinzip der Lorentztransformationen in Standardkonfiguration

- Lorentz-Transformation von (kontravarianten) **Vektoren** $v^\alpha = v^\nu \longrightarrow \big(v^\nu\big)$
  und zugehörige inverse Lorentz-Transformation:

$$v^{\alpha'} = L^{\alpha'}_{\alpha}\, v^\alpha \qquad \text{bzw.} \quad v'^{\,\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\, v^\nu \qquad\qquad \longrightarrow \quad \big(v'^{\,\mu}\big) = \boldsymbol{L}\,\big(v^\nu\big)\;,$$

$$v^\alpha = L^{\alpha}_{\alpha'}\, v^{\alpha'} \qquad \text{bzw.} \begin{cases} \big(v^\nu = \overset{-1}{L}{}^{\nu}{}_{\mu}\, v'^{\,\mu}\big) \\[2ex] v^\mu = \overset{-1}{L}{}^{\mu}{}_{\nu}\, v'^{\,\nu} \end{cases} \qquad \longrightarrow \quad \big(v^\nu\big) = \boldsymbol{L}^{-1}\big(v'^{\,\mu}\big)\;.$$

- Lorentz-Transformation von (kovarianten) **Kovektoren** $u_\alpha = u_\nu \longrightarrow \big(u_\nu\big)$
  und zugehörige inverse Lorentz-Transformation:

$$u_{\alpha'} = L^{\alpha}_{\alpha'}\, u_\alpha \quad \text{bzw.} \begin{cases} \big(u'_\mu = u_\nu\, \overset{-1}{L}{}^{\nu}{}_{\mu} = \overset{-1}{L}{}_{\mu}{}^{\nu}\, u_\nu\big) \\[2ex] u'_\nu = u_\mu\, \overset{-1}{L}{}^{\mu}{}_{\nu} = \overset{-1}{L}{}_{\nu}{}^{\mu}\, u_\mu \end{cases} \longrightarrow \quad \big(u'_\mu\big) = \big(u_\nu\big)\, \boldsymbol{L}^{-1} = \Big(\boldsymbol{L}^{-1\mathrm{T}}\, \big(u_\nu\big)^{\mathrm{T}}\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$u_\alpha = L^{\alpha'}_{\alpha}\, u_{\alpha'} \quad \text{bzw.} \quad u_\nu = u'_\mu\, L^{\mu}{}_{\nu} = L_{\nu}{}^{\mu}\, u'_\mu \qquad \longrightarrow \quad \big(u_\nu\big) = \big(u'_\mu\big)\, \boldsymbol{L} = \Big(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\, \big(u'_\mu\big)^{\mathrm{T}}\Big)^{\mathrm{T}}\;.$$

- Lorentz-Transformation eines gemischten Tensors zweiter Stufe

$$v^\nu u_\mu = A^{\nu}{}_{\mu} \quad \longrightarrow \quad \big(v^\nu\big) \otimes \big(u_\mu\big) = \boldsymbol{A} \quad \Rightarrow$$

$$A^{\alpha'}{}_{\beta'} \;=\; v^{\alpha'} u_{\beta'} \;=\; L^{\alpha'}_{\alpha} v^\alpha\, L^{\beta}_{\beta'} u_\beta \;=\; L^{\alpha'}_{\alpha}\, L^{\beta}_{\beta'}\, A^{\alpha}{}_{\beta} \quad \text{bzw.}$$

$$A'^{\,\sigma}{}_{\tau} \;=\; v'^{\,\sigma} u'_\tau \;=\; L^{\sigma}{}_{\nu} v^\nu\, u_\mu\, \overset{-1}{L}{}^{\mu}{}_{\tau} \;=\; L^{\sigma}{}_{\nu}\, A^{\nu}{}_{\mu}\, \overset{-1}{L}{}^{\mu}{}_{\tau} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{A}' \;=\; \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}^{-1}\;.$$

7.5 D'Alembert-Operator

Der D'Alembert-Operator wird auch Quabla-Operator, Wellenoperator, Viereckoperator oder Boxoperator genannt und ist folgendermaßen definiert:

$$\Box := \partial^\alpha\,\partial_\alpha \;=\; \eta^{\alpha\beta}\,\frac{\partial}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{7.59}$$

$$= \frac{\partial^2}{\left(\partial x^0\right)^2} - \frac{\partial^2}{\left(\partial x^1\right)^2} - \frac{\partial^2}{\left(\partial x^2\right)^2} - \frac{\partial^2}{\left(\partial x^3\right)^2} \tag{7.60}$$

mit

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x^0 \\ \partial/\partial x^1 \\ \partial/\partial x^2 \\ \partial/\partial x^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial^\alpha = \eta^{\alpha\beta}\,\frac{\partial}{\partial x^\beta} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x^0 \\ -\partial/\partial x^1 \\ -\partial/\partial x^2 \\ -\partial/\partial x^3 \end{pmatrix} . \tag{7.61}$$

Der Operator ∂_α transformiert sich wie ein kovarianter Vierervektor gemäß

$$L^\alpha_{\alpha'}\,\partial_\alpha = \partial_{\alpha'} \quad \text{mit} \quad \left(L^\alpha_{\alpha'}\right) = \boldsymbol{L}^{-1} , \tag{7.62}$$

der Operator ∂^α transformiert sich wie ein kontravarianter Vierervektor gemäß

$$L^{\alpha'}_\alpha\,\partial^\alpha = \partial^{\alpha'} \quad \text{mit} \quad \left(L^{\alpha'}_\alpha\right) = \boldsymbol{L} . \tag{7.63}$$

Folglich ist das Pseudoskalarprodukt aus den beiden Vierervektoren ∂^α und ∂_α – der D'Alembert-Operator – formal ein Lorentz-Skalar und somit lorentzinvariant. Der D'Alembert-Operator wirkt wie ein Skalar separat auf jede Komponente eines Vierervektors und erzeugt – eben wegen seiner skalaren Wirkung – wieder nur einen Vierervektor.

7.6 Klassifikation der Lorentz-Transformationen $\boldsymbol{\Lambda}$

Lorentz-Transformationen lassen die Metrik bzw. den metrischen Tensor des Minkowski-Raums und das Minkowski-Skalarprodukt invariant. Die Lorentz-Gruppe bzw. **Orthogonale Gruppe** $\mathrm{O}(p_{(+)}, q_{(-)}) = \mathrm{O}(1{,}3)$ ist die Gruppe aller linearen Transformationen, unter denen der Minkowski-Raum invariant ist und für die die Pseudo-Orthogonalitätsrelation $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{g}$ gilt. Die Lorentz-Gruppe O(1,3) ist allgemein nicht kommutativ. Innerhalb der Lorentz-Gruppe O(1,3) bilden die Lorentz-Transformationen mit der Minkowski-Metrik und mit $\det \boldsymbol{L} = 1$ eine Untergruppe, die **eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe** SO(1,3). Lorentz-Transformationen der Untergruppe SO(1,3) ändern weder die Richtung der Zeitachse noch die Orientierung der räumlichen Achsen.

Die Lorentz-Transformationen der orthogonalen Gruppe bzw. Lorentz-Gruppe O(1,3) lassen sich im Wesentlichen wie folgt klassifizieren:

I. Homogene Lorentz-Transformationen

1. **Uneigentliche Lorentz-Transformationen** implizieren Drehspiegelungen $\Rightarrow$

$$\det \boldsymbol{\Lambda} = -1 \ .$$

1.1. Raumspiegelung (Paritätstransformation)

$$\left(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3\right) \xrightarrow{\boldsymbol{P}} \left(x^0, -x^1, -x^2, -x^3\right) \ ,$$
$$\left(x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3\right) \xrightarrow{\boldsymbol{P}} \left(x_0, -x_1, -x_2, -x_3\right)$$

mit

$$\boldsymbol{P} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

1.2. Zeitspiegelung (Zeitumkehr)

$$\left(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3\right) \xrightarrow{\boldsymbol{T}} \left(-\, x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3\right)$$

mit

$$\boldsymbol{T} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

2. **Eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe** SO(1,3) bzw. **eigentliche Lorentz-Transformationen** mit

$$\det \boldsymbol{\Lambda} = +1 \ .$$

2.1. **Drehungen** des dreidimensionalen Ortsraum mit 3 Parametern, den 3 Euler'schen Drehwinkeln, und mit der orthogonalen Drehmatrix $\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boldsymbol{D} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \ .$$

2.2. **Spezielle Lorentz-Transformationen $\boldsymbol{L}$** sind reine **Boosts**, implizieren also keine Drehungen, keine Raumspiegelung und keine Zeitumkehr. Die Koordinatenachsen von S und S' verlaufen parallel zueinander und die Relativgeschwindigkeit zwischen S und S' ist der konstante Vektor $\vec{\boldsymbol{v}}$. Die spezielle Lorentz-Transformation in Standardkonfiguration ist der einfachste Fall. Dabei bewegt sich S' mit $|\vec{\boldsymbol{v}}| = v$ längs der x-Achse von S.

II. Inhomogene Lorentz-Transformationen (Poincaré-Transformationen) haben die Form

$$\mathbf{X}' = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{X} + \mathbf{A}$$

mit der vierdimensionalen Translation bzw. Inhomogenität $\mathbf{A}$ entsprechend 4 Parametern und der homogenen Lorentz-Transformation $\boldsymbol{\Lambda}$ entsprechend 6 Parametern. Die Poincaré-Transformationen haben folglich 10 Parameter.

7.7 Die Lorentz-Transformation als Rotation

Weil man in der Literatur oft die Lorentz-Transformation in der Darstellung als Rotation findet, wollen wir diese der Vollständigkeit halber hier vorstellen.

Wir benutzen dabei der Einfachheit halber die Lorentz-Transformation nur in der Standardkonfiguration. Und dort, wo die Koordinaten y und z bzw. y' und z' für das Verständnis nicht unbedingt erforderlich sind, unterdrücken wir sie. Das bewegte System S' führt also eine Translation mit der Geschwindigkeit v längs der x-Achse des Ruhesystems S aus.

Im gewöhnlichen Raumzeit-Diagramm ist $S := (ct, x, y, z)$ ein orthogonales und $S' := (ct', x', y', z')$ ein schiefwinkliges Koordinatensystem. Die ct'-Achse und die x'-Achse verlaufen symmetrisch zur Geraden $ct = x$ und der Winkel zwischen der x- und der x'-Achse sei α. Folglich ist der Winkel zwischen der ct'- und der x-Achse $\omega = 90° - \alpha$.

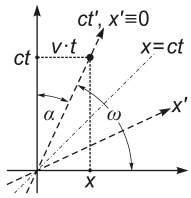


Abb. 7.1 Zur Herleitung von $\tan\omega = \tan(90° - \alpha)$. Der Winkel ω liegt zwischen der x-Achse und der ct'-Achse.

Es gilt längs der ct'-Achse (ct', $x' \equiv 0$). Den $\tan\omega$ erhalten wir daraus wie folgt:

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = v \cdot t \quad \Rightarrow$$

$$\tan\omega = \tan(90° - \alpha) = \frac{ct}{x} = \frac{c}{v} \,.$$

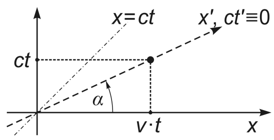


Abb. 7.2 Zur Herleitung von $\tan\alpha$. Der Winkel α liegt zwischen der x-Achse und der x'-Achse.

Es gilt längs der x'-Achse ($ct' \equiv 0$, x'). Den $\tan\alpha$ erhalten wir daraus wie folgt:

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ct = x \cdot \frac{v}{c} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{ct}{x} = \frac{v}{c} = \beta} \,.$$

Nach Minkowski und auch nach Sommerfeld (1909) lässt sich die Lorentz-Transformation auch als „Euclidische“ Rotation des *orthogonalen* Koordinatensystems S' um den gemeinsamen Ursprung von S und S' darstellen (siehe Abbildung 7.3), wenn man den **rein imaginären Rotationswinkel** Φ gemäß

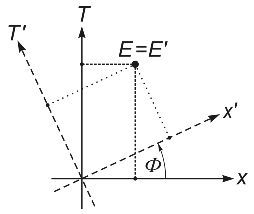


Abb. 7.3 Zur Lorentz-Transformation als Rotation.
Das orthogonale (x', T')-Koordinatensystem ist im Ursprung um den Winkel Φ gegen das (x, T)-Koordinatensystem gedreht, wobei der Drehwinkel und die Zeitachsen imaginär sind gemäß
$$\tan\Phi := \mathrm{i}\,\tfrac{v}{c}\ , \quad T = \mathrm{i}ct\ , \quad T' = \mathrm{i}ct'\ .$$
Für ein Ereignis E in S bzw. E' in S' gilt $E(x,T) = E'(x',T')$.

$$\boxed{\tan\Phi := \mathrm{i}\,\frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\Phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\Phi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\ , \\ \sin\Phi = \frac{\tan\Phi}{\sqrt{1+\tan^2\Phi}} = \frac{\mathrm{i}\,\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \mathrm{i}\,\beta\gamma \end{cases}}$$

einführt und die Zeitkoordinaten mit der imaginären Einheit i multipliziert. Die Lorentz-Transformation erhält damit die folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}\,ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{i}\,ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\mathrm{i}\,\beta\gamma & 0 & 0 \\ \mathrm{i}\,\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{i}\,ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{7.64}$$

also

$$x' = x\cdot\cos\Phi + \mathrm{i}\,ct\cdot\sin\Phi = \gamma(x + \mathrm{i}\,\beta\cdot\mathrm{i}\,ct) = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ , \tag{7.65}$$

$$\mathrm{i}\,ct' = -x\cdot\sin\Phi + \mathrm{i}\,ct\cdot\cos\Phi = \gamma(\mathrm{i}\,ct - \mathrm{i}\,\beta\cdot x) = \frac{\mathrm{i}\,c\,(t - \frac{v}{c^2}\,x)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow$$

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}\,x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ . \tag{7.66}$$

Für das Linienelement schreibt man in dieser Notation

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + (\mathrm{i}\,c\mathrm{d}t)^2 = \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2 + (\mathrm{i}\,c\mathrm{d}t')^2 \\ &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2 - c^2\mathrm{d}t'^2\ . \end{aligned}$$

Die Lorentz-Transformationsmatrix $Q = (q_{kl})$ in (7.64) ist eine (eigentliche) orthogonale[13] Matrix, d. h. eine Drehmatrix, denn sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Die Spaltenvektoren der Lorentz-Transformationsmatrix Q stehen senkrecht aufeinander und haben den Betrag 1.

  Skalarprodukt der Spaltenvektoren:

  $$\sum_k q_{kl}\cdot q_{km} = \begin{cases} 1 & \text{für } l = m \\ 0 & \text{für } l \neq m \end{cases}.$$

  Beispielsweise 1. Spalte mal 2. Spalte: $\quad -\mathrm{i}\,\beta\gamma^2 + \mathrm{i}\,\beta\gamma^2 = 0\ .$

[13] Unüblicherweise wird die orthogonale Matrix manchmal auch orthonormale Matrix genannt.

- Die Zeilenvektoren der Lorentz-Transformationsmatrix Q stehen senkrecht aufeinander und haben den Betrag 1.

  Skalarprodukt der Zeilenvektoren:

$$\sum_l q_{kl} \cdot q_{jl} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{für } k \neq j \end{cases} .$$

  Beispielsweise 1. Zeile mal 1. Zeile: $\gamma^2 + (-\mathrm{i}\,\beta\gamma)^2 = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1$.

- $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad Q \cdot Q^{\mathrm{T}} = \mathbb{1}$.

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\mathrm{i}\,\beta\gamma \\ \mathrm{i}\,\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & \mathrm{i}\,\beta\gamma \\ -\mathrm{i}\,\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 & \mathrm{i}\,\beta\gamma^2 - \mathrm{i}\,\beta\gamma^2 \\ \mathrm{i}\,\beta\gamma^2 - \mathrm{i}\,\beta\gamma^2 & -\beta^2\gamma^2 + \gamma^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1} .$$

- $\det Q \;=\; +1$ (d. h. reine Drehung, also keine Drehspiegelung mit $\det Q = -1$).

$$\gamma \cdot \gamma \;-\; (-\mathrm{i}\,\beta\gamma) \cdot \mathrm{i}\,\beta\gamma \;=\; \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 \;=\; +1 .$$

Eine dazu äquivalente Form der Lorentz-Transformation als Rotation ist

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} ,$$

also mit

$$\begin{aligned} \cosh\alpha &= \cos(\mathrm{i}\,\alpha) = \cos\Phi , \\ \sinh\alpha &= -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}\,\alpha) = -\mathrm{i}\sin\Phi \end{aligned}$$

schließlich

$$x' \;=\; x\cosh\alpha - ct\sinh\alpha \;=\; x \cdot \cos\Phi + \mathrm{i}\,ct \cdot \sin\Phi \;, \;\square \tag{7.67}$$

$$ct' \;=\; -x\sinh\alpha + ct\cosh\alpha \quad \Rightarrow \tag{7.68}$$

$$\mathrm{i}\,ct' \;=\; -\mathrm{i}\,x\sinh\alpha + \mathrm{i}\,ct\cosh\alpha \;=\; -x \cdot \sin\Phi + \mathrm{i}\,ct \cdot \cos\Phi \;. \;\square$$

Der Punkt $x' \equiv 0$ von S' bewegt sich mit $v = \frac{x}{t}$ in Richtung der x-Achse. Damit resultiert aus (7.67)

$$\begin{aligned} x' \;=\; x\cosh\alpha - ct\sinh\alpha \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow \\ ct\sinh\alpha \;=\; x\cosh\alpha \quad &\Leftrightarrow \\ \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} \;=\; \frac{x}{c \cdot t} \quad &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\tanh\alpha \;=\; \frac{v}{c}} \tag{7.69}$$

und mit (7.69) schließlich

$$\cosh\alpha \;=\; \frac{1}{\sqrt{\tanh^2\alpha}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\;,$$

$$\sinh\alpha \;=\; \frac{\tanh\alpha}{\sqrt{\tanh^2\alpha}} \;=\; \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\;.$$

Setzen wir diese Beziehungen in (7.67) und (7.68) ein, erhalten wir wieder die Lorentz-Transformationen (7.65) und (7.66) in der Standardkonfiguration:

$$x' \;=\; \frac{x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{ct\cdot\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;=\; \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\;,$$

$$ct' \;=\; \frac{-x\cdot\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{ct}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \;=\; \frac{ct-\frac{v}{c}\,x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\;.$$

Für die Lorentz-Transformation im Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Raumzeit-Diagramm (S' schiefwinklig) gilt

$$\tan\alpha \;=\; \frac{v}{c}\;.$$

Für die Lorentz-Transformation als Rotation (S' orthogonal) gilt

$$\tan\varPhi \;:=\; \mathrm{i}\,\frac{v}{c} \quad \text{mit} \quad \varPhi = \mathrm{i}\,\alpha \quad \text{(Sommerfeld)}\;, \tag{7.70}$$

$$\tanh\alpha \;=\; \frac{v}{c} \quad \text{(deutlich sichtbar hyperbolisch)}\;. \tag{7.71}$$

Die Äquivalenz zwischen den Darstellungen (7.70) und (7.71) zeigt sich in der Beziehung

$$\tan\varPhi = \tan(\mathrm{i}\,\alpha) = \mathrm{i}\tanh\alpha = \mathrm{i}\cdot\frac{v}{c} \quad\Leftrightarrow\quad \tanh\alpha = \frac{v}{c}\;.$$