

Reinhard Weiß

Grundlegendes zur Mechanik starrer Körper

—

Kreiselmechanik-Beispiele

08.04.2022

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegendes zur Statik starrer Körper	3
2	Grundlegendes zur Dynamik starrer Körper	5
2.1	Starrer Körper mit fester Drehachse	6
2.2	Starrer Körper ohne feste Drehachse	7
2.2.1	Angriff nur einer Kraft	7
2.2.2	Angriff eines Kräftepaares	8
3	Analogien zwischen Translation und Rotation	10
4	Herleitung des Trägheitstensors	12
5	Der Steiner'sche Satz	14
6	Der elastische Stoß eines Massenpunktes gegen einen Stab	16
7	Rotierendes Bezugssystem, Coriolis- und Zentrifugalbeschleunigung	19
8	Herleitung der Euler'schen Gleichungen	28
9	Grundlegendes zur Kreiselmechanik	30
9.1	Hauptträgheitsachsen- und Kreiseldefinition	30
9.2	Kreiseltypisierung nach dem Trägheitsmoment	31
9.3	Der kräftefreie Kreisel – Nutation	33
9.3.1	Schlafender Kreisel	33
9.3.2	Momentenstoß gegen einen schlafenden Kreisel	34
9.3.3	Nutierender kräftefreier Kreisel	35
9.3.4	Berechnung der Winkelgeschwindigkeit der Nutation	37
9.4	Der schwere Kreisel – nutationsfreie Präzession – Beispiele	40
9.4.1	Fahrradkreisel	40
9.4.2	Spielkreisel	43
9.4.3	Nutationsfreie Präzession exakt	46
9.4.4	Drehimpulserhaltung beim Drehschemelversuch	48
9.4.5	Der Flugzeugpropeller als Kreisel	50
9.5	Die Kompensation des schwerkraftbedingten Kippmoments \vec{M}_g durch das Coriolis-Kippmoment \vec{M}_c am Fahrradkreisel	52
10	Die geführt-rotierende Hantel	56

1 Grundlegendes zur Statik starrer Körper

Dieser Abschnitt ist teilweise übernommen bzw. zitiert aus: Physik, Fundament der Technik, Fachbuchverlag Leipzig, 1987, 9. Auflage, Seite 127 bis Seite 131.

1. Ein **starrer Körper** ist eine Verteilung (Anhäufung) starr miteinander verbundener Massenelemente.
2. Verändert ein starrer Körper in einem gegebenen Koordinatensystem seine Lage nicht, so befindet er sich im **Gleichgewicht** der Kräfte und Drehmomente.
3. **Nichtparallele** und **gleichsinnig parallele Kräfte** lassen sich paarweise durch geeignetes Zerlegen in ihre Komponenten und durch anschließendes Verschieben auf den sich schneidenden Wirkungslinien stets zu einer **Resultierenden** zusammenfassen.
4. Auch **antiparallele** aber **nicht betragsgleiche Kräfte**, die nicht auf einer Wirkungslinie liegen, lassen sich mit der gleichen Methode zu einer **Resultierenden** zusammenfassen.

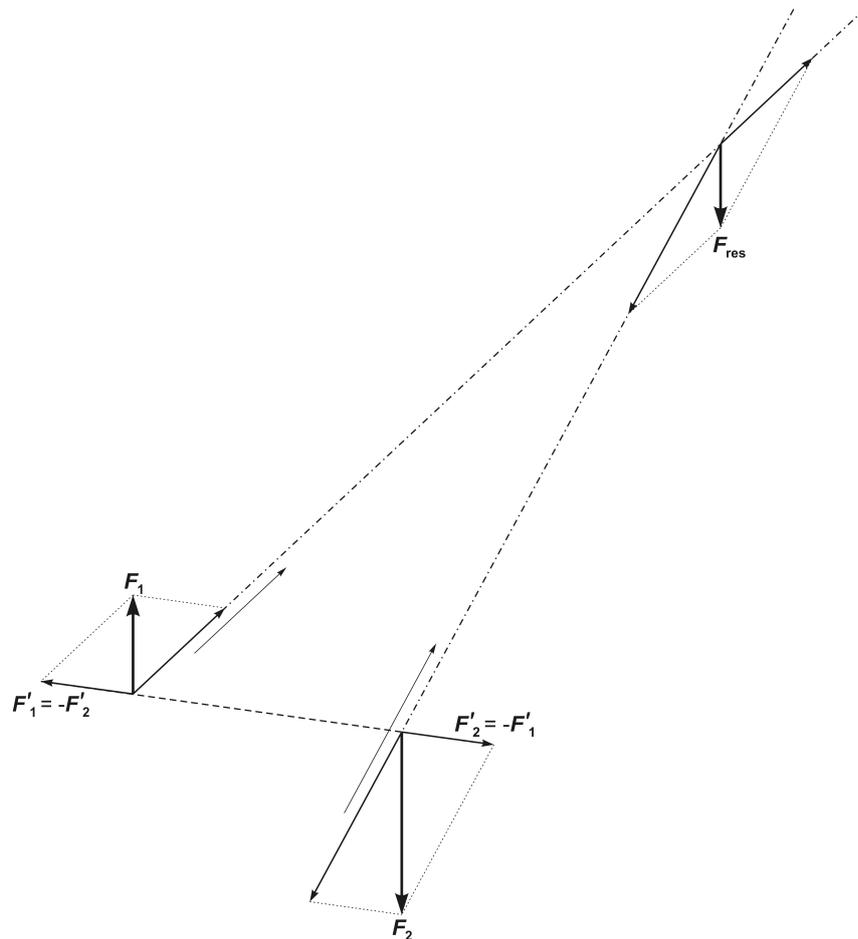


Abb. 1 \vec{F}_1 und \vec{F}_2 sind zwei antiparallele Kräfte, die nicht auf einer Wirkungslinie liegen. Ihre Komponenten \vec{F}'_1 und \vec{F}'_2 müssen auf der Geraden durch die Angriffspunkte der Kräfte liegen und werden betragsgleich gewählt. Die beiden verbleibenden Komponenten liefern schließlich die resultierende Kraft \vec{F}_{res} .

5. Nur **antiparallele, betragsgleiche Kräfte**, die nicht auf derselben Wirkungslinie liegen, lassen sich nicht zu einer Resultierenden zusammenfassen. Sie bilden ein sog. **Kräftepaar**.
6. Wenn sich ein Körper unter der Wirkung von (mindestens) drei nichtparallelen Kräften im statischen Gleichgewicht befindet, dann müssen sich die Wirkungslinien dieser Kräfte in einem Punkt schneiden.

Greifen an einem starren Körper Kräfte an, so lassen sich diese stets entweder zu einer resultierenden Gesamtkraft oder zu einem Kräftepaar zusammenfassen.

Gleichgewichtsbedingung am starren Körper

Am starren Körper herrscht Gleichgewicht, wenn sowohl die Summe aller Kräfte als auch die Summe aller Drehmomente um eine beliebige Drehachse verschwinden:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \wedge \quad \sum_k \vec{M}_k = \vec{0} .$$

2 Grundlegendes zur Dynamik starrer Körper

Nach:

Physik, Fundament der Technik, Fachbuchverlag Leipzig, 1987, 9. Auflage, Seite 127 bis Seite 131,
DEMTRÖDER, Experimentalphysik 1, Springer-Lehrbuch, 2003, 3. Auflage, Seite 135 bis Seite 137.

Zweites NEWTON'sches Axiom für ein System von Teilchen

Der Massenmittelpunkt bzw. Schwerpunkt (Index s) eines Systems bewegt sich unter dem Einfluss einer äußeren Kraft \vec{F}_{ext} wie ein Teilchen mit der Masse $m_{\text{ges}} = \sum_i m_i$:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{ges}} \cdot \vec{a}_s \quad (\text{Schwerpunktbeschleunigung } \vec{a}_s).$$

Dieses Axiom gilt unabhängig vom Angriffspunkt der Kraft am System und es gilt auch, wenn zwischen den Teilchen des Systems keine Wechselwirkungen stattfinden, also auch für nichtstarre Körper.

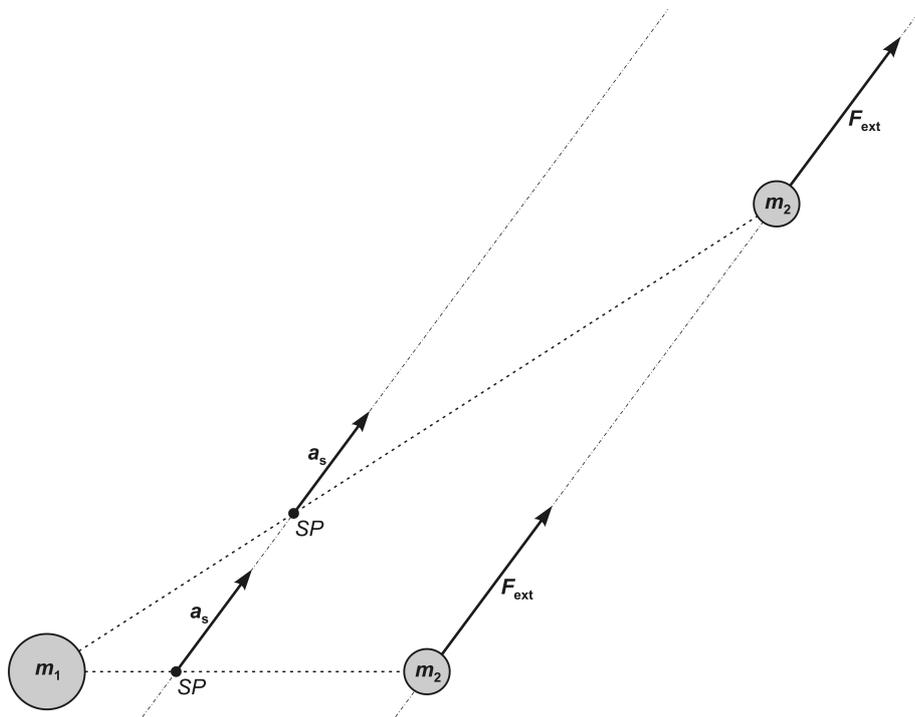


Abb. 2 Die beiden Teilchen bzw. Massenpunkte mit den Massen $m_1 > m_2$ sind voneinander unabhängig, d. h., zwischen ihnen gibt es keinerlei Wechselwirkungen. Der Massenpunkt m_1 befindet sich in Ruhe. Auf den Massenpunkt m_2 wirkt die beschleunigende Kraft \vec{F}_{ext} . Es resultiert außerdem eine Beschleunigung \vec{a}_s des Systemschwerpunkts. Der Schwerpunkt teilt die Strecke zwischen den Massenpunkten stets im gleichen Verhältnis (Strahlensatz).

Von besonderer Bedeutung in diesem Zusammenhang ist der Begriff des Kräftepaars. Ein **Kräftepaar** wird gebildet aus zwei **antiparallelen** und **betragsgleichen** Kräften, die auf **verschiedenen Wirkungslinien** liegen und folglich eine Ebene aufspannen.

2.1 Starrer Körper mit fester Drehachse

An einem starren Körper der Masse M mit fester Drehachse A greife in der Ebene $A \perp E$

ein Kräftepaar an. Weil die Drehachse in der Ebene E ortsfest ist, kann das Kräftepaar keine Translation des Körpers bewirken, sondern lediglich eine Drehbewegung um A . Das Kräftepaar muss also als Drehmoment ausgedrückt werden können:

\vec{r}_1 und \vec{r}_2 seien die Angriffspunkte des Kräftepaares $\{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F\}$ am Körper, der Ortsvektor \vec{o} beschreibe den Durchstichpunkt von A durch E und $l = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ sei der Abstand zwischen den Angriffspunkten. Für das durch das Kräftepaar bezüglich der Drehachse A hervorgerufene Drehmoment gilt dann

$$\begin{aligned}\vec{M} &= (\vec{r}_1 - \vec{o}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{o}) \times \vec{F}_2 \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{o}) \times \vec{F}_1 - (\vec{r}_2 - \vec{o}) \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_2 - \vec{o}) \times \vec{F}_2 - (\vec{r}_1 - \vec{o}) \times \vec{F}_2 \\ \vec{M} &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2, \\ M &= l \cdot \sin \sphericalangle(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{F}_1) \cdot F = d \cdot F.\end{aligned}$$

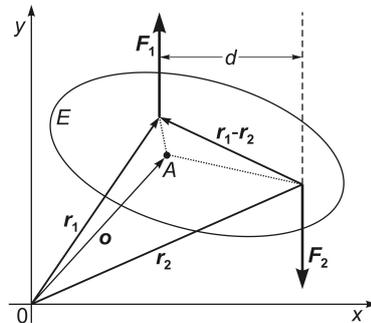


Abb. 3 Ein Kräftepaar wirkt auf einen starren Körper mit ortsfester Drehachse. Das kartesische Koordinatensystem wurde so gewählt, dass das Kräftepaar parallel zur y -Achse wirkt und dass die Kräftepaar-Ebene E mit der Ebene $z = 0$ zusammenfällt. Deshalb konnte auf die Darstellung der z -Achse verzichtet werden. Der resultierende Drehmomentvektor \vec{M} zeigt in die negative z -Richtung.

Bei einem starren Körper mit ortsfester Drehachse steht das von einem Kräftepaar hervorgerufene Drehmoment bezüglich des Durchstichpunktes von A durch E stets senkrecht auf E , der Ebene des Kräftepaares, und der Betrag dieses Drehmoments ist nicht abhängig von der Position des Drehpunktes, sondern nur vom Abstand d zwischen den Wirkungslinien des Kräftepaares. Den Koordinatenursprung des Systems in den Drehpunkt zu legen, führte deshalb in diesem Fall nicht zu einer Vereinfachung.

Wir haben jetzt den speziellen Fall für $A \perp E$ abgehandelt. Verläuft die Ebene des Kräftepaares aber nicht senkrecht zur ortsfesten Drehachse des starren Körpers, so wirkt auf den Körper trotzdem das bereits hergeleitete und senkrecht auf E stehende Drehmoment \vec{M} . Das auf die Drehachse A , definiert durch den Einheitsvektor \vec{e}_A , wirkende Drehmoment ist dann jedoch nur die Vektorkomponente \vec{M}_A von \vec{M} in Richtung \vec{e}_A :

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \vec{M} \cdot \vec{e}_A, \\ M_A &= d \cdot F \cdot \cos \sphericalangle(\vec{M}, \vec{e}_A).\end{aligned}$$

2.2 Starrer Körper ohne feste Drehachse

Für den Schwerpunkt (Abk. SP) des starren Körpers verwenden wir den Index s . Es sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden, der Angriff nur *einer* Kraft und der Angriff eines Kräftepaars.

2.2.1 Angriff nur einer Kraft

Eine Kraft \vec{F}_1 greife im Punkt $P \neq SP$ an einem starren Körper an. SP sei der Anfangspunkt eines Vektors \vec{l}_1 und P sein Endpunkt. Der Vektor \vec{l}_1 beschreibt also den Abstand $l_1 = |\vec{l}_1|$ zwischen Schwerpunkt und Angriffspunkt von \vec{F}_1 .

$$\vec{F}_{1s} = -\vec{F}'_s$$

sind (einander aufhebende) **virtuelle Kräfte**, die am Schwerpunkt angreifen mit

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1s} = -\vec{F}'_{1s}.$$

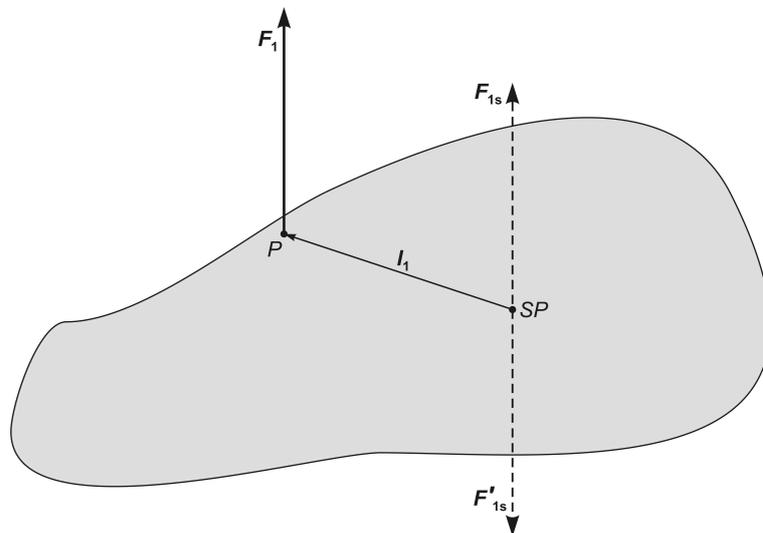


Abb. 4 Angriff nur einer Kraft an einem starren Körper ohne feste Drehachse.

Die virtuellen Kräfte \vec{F}_{1s} und \vec{F}'_{1s} allein bewirken wegen $\vec{F}_{1s} + \vec{F}'_{1s} = \vec{0}$ keine Bewegung des Körpers. Jedoch die Zusammenfassung der Kräfte zum Kräftepaar $\vec{F}_1 + \vec{F}'_{1s}$ und die Kraft \vec{F}_{1s} bewirken folgende Bewegungen des Körpers:

$\vec{F}_{1s} \Rightarrow$ translatorische Schwerpunktbeschleunigung,

$\vec{F}_1 + \vec{F}'_{1s}$ (Kräftepaar) \Rightarrow Rotation um den Schwerpunkt infolge des Drehmoments $\vec{M}_s = \vec{l}_1 \times \vec{F}_1$ bezüglich SP .

Greift *eine* Kraft \vec{F} im Punkt $P \neq SP$ an einem Körper der Masse m ohne feste Drehachse an, so bewirkt sie sowohl eine Translation bzw. Beschleunigung \vec{a} des Schwerpunkts SP entsprechend

$$\vec{F} = \vec{F}_s = m \cdot \vec{a}$$

als auch eine Rotation des Körpers um seinen Schwerpunkt infolge des Drehmoments

$$\vec{M} = \vec{M}_s = \vec{l}_1 \times \vec{F},$$

wobei SP der Startpunkt von \vec{l}_1 und P sein Endpunkt ist.

2.2.2 Angriff eines Kräftepaars

Die Kräfte des Kräftepaars $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ greifen an einer durch den Schwerpunkt SP verlaufenden Geraden bzw. Achse eines starren Körpers an. Der Vektor \vec{l}_1 verlaufe von SP nach P_1 , dem Angriffspunkt von \vec{F}_1 , und der Vektor \vec{l}_2 von SP nach P_2 , dem Angriffspunkt von \vec{F}_2 .

Die eigentlich, wie im Abschnitt 2.2.1 gezeigt, von \vec{F}'_{1s} zu bewirkende Translation wird durch die virtuelle Kraft \vec{F}'_{2s} kompensiert, wodurch die Translation verschwindet. Durch die Zusammenfassung der verbleibenden Kräfte $\{\vec{F}_1, \vec{F}'_{1s}\}$ einerseits und $\{\vec{F}_2, \vec{F}'_{2s}\}$ andererseits resultiert die Summe \vec{M}_s aus den zwei Drehmomenten $\vec{M}_{1s} = \vec{l}_1 \times \vec{F}_1$ und $\vec{M}_{2s} = \vec{l}_2 \times \vec{F}_2$:

$$\begin{aligned}\vec{M}_s &= \vec{l}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{l}_2 \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{l}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{l}_2 \times \vec{F}_1 \\ \vec{M}_s &= (\vec{l}_1 - \vec{l}_2) \times \vec{F}_1, \\ M_s &= |l_1 - l_2| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{l}_1, \vec{F}_1) \cdot F_1.\end{aligned}$$

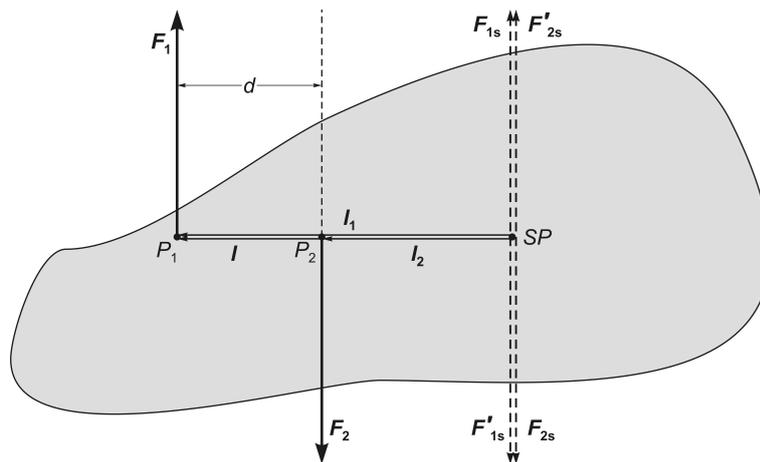


Abb. 5 Angriff eines Kräftepaars an einem starren Körper ohne feste Drehachse. Zur Vereinfachung liegen die Angriffspunkte des Kräftepaars und der Schwerpunkt auf einer Geraden und die Kräfte wirken senkrecht zu dieser Geraden.

Die Kräfte des Kräftepaars $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ greifen allgemein aber *nicht* an derselben durch den Schwerpunkt SP verlaufenden Geraden des starren Körpers an, sondern an beliebigen Punkten (s. Abb. 6). Mit Hilfe der virtuellen Kräfte stellen wir fest, dass auch in diesem Fall die **Translation verschwindet**. Das vom Kräftepaar bezüglich SP ausgeübte Drehmoment \vec{M}_s ist somit auch allgemein

$$\begin{aligned}\vec{M}_s &= \vec{l}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{l}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{l}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{l}_2 \times \vec{F}_1, \\ \vec{M}_s &= (\vec{l}_1 - \vec{l}_2) \times \vec{F}_1.\end{aligned}$$

Wenn wir in Analogie zur Abbildung 5 den Startpunkt des Vektors $\vec{l}_1 - \vec{l}_2 = \vec{l}$, der ja von P_2 nach P_1 verläuft, in den Schwerpunkt legen und \vec{F}_1 nach wie vor an der Spitze

von \vec{l} angeht, erhalten wir für das bezüglich SP wirkende Drehmoment

$$\begin{aligned}\vec{M}_s &= \vec{l} \times \vec{F}_1, \\ M_s &= \underbrace{|\vec{l}| \cdot \sin \angle(\vec{l}, \vec{F}_1)} \cdot |\vec{F}_1| \\ M_s &= d \cdot F_1 = d \cdot F.\end{aligned}$$

d ist der Abstand zwischen den Wirkungslinien des Kräftepaars.

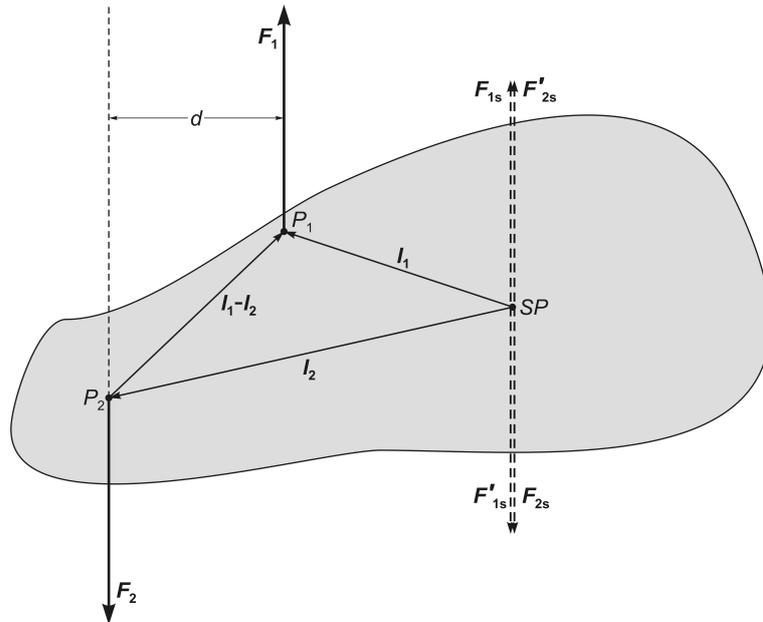


Abb. 6 Angriff eines Kräftepaars an einem starren Körper ohne feste Drehachse. Die Angriffspunkte der Kräfte und der Schwerpunkt liegen nicht auf einer Geraden (allgemeiner Fall).

Greift ein Kräftepaar $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ an beliebigen Punkten eines starren Körpers ohne feste Drehachse an, so bewirkt es keine Translation sondern nur eine Rotation um eine Achse, die durch den Massenmittelpunkt SP des Körpers geht und senkrecht zur Ebene des Kräftepaars verläuft entsprechend dem Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{M}_s = \vec{l} \times \vec{F}_1.$$

Der Vektor \vec{l} verläuft vom Angriffspunkt der Kraft \vec{F}_2 zum Angriffspunkt der Kraft \vec{F}_1 . Mit dem Abstand d zwischen den Wirkungslinien des Kräftepaars gilt für den Betrag dieses Drehmoments:

$$M = d \cdot F, \quad F = |\vec{F}_1|.$$

Wie man sieht, ist nicht die Position der Angriffspunkte des Kräftepaars am Körper für das Drehmoment relevant, sondern der Abstand d zwischen den Wirkungslinien von \vec{F}_1 und \vec{F}_2 .

3 Analogien zwischen Translation und Rotation

Zur Erinnerung stellen wir einige wesentliche physikalische Größen der fortschreitenden Bewegung (Translation) den dazu analogen physikalischen Größen der Drehbewegung (Rotation) gegenüber.¹

Translation	Rotation
<p>Verschiebung</p> <p>$d\vec{r}$</p> <p>$[r] = \text{m}$</p>	<p>Drehwinkel</p> <p>$d\vec{\varphi}$ bzw. $d\varphi = \frac{ds}{r}$</p> <p>$[\varphi] = \text{rad}, \quad 360^\circ = 2\pi \text{ rad} = 6,28\dots \text{ rad}$</p> <p>Auf dem Umfang eines Kreises mit dem Radius r ist ds das dem Drehwinkel bzw. Winkeldifferential $d\varphi$ entsprechende Wegdifferential ds.</p> <p>Wenn wir davon ausgehen, dass die Winkeländerung $d\varphi$ in einer Ebene mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}^0 \equiv \vec{e}_\omega$ erfolgt, können wir das Winkeldifferential als den Vektor $d\vec{\varphi} := d\varphi \cdot \vec{e}_\omega$ betrachten.</p> <p>Zeigt die Winkeländerung bzw. Drehung in Richtung der gekrümmten Finger der rechten Hand, so definiert der im rechten Winkel dazu abgespreizte rechte Daumen die Richtung und die Orientierung von $d\vec{\varphi}$. Folglich gilt</p> <p>$ds = d\varphi \cdot r \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$.</p>
<p>Geschwindigkeit</p> <p>$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$</p> <p>$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$</p>	<p>Winkelgeschwindigkeit</p> <p>$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$</p> <p>$[\omega] = \frac{1}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad [v] = \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{m}$</p>
<p>Beschleunigung</p> <p>$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$</p> <p>$[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$</p>	<p>Drehbeschleunigung (Winkelbeschleunigung)</p> <p>$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$</p> <p>$[\dot{\omega}] = \frac{1}{\text{s}^2}$</p>
<p>Masse</p> <p>m</p> <p>$[m] = \text{kg}$</p>	<p>Trägheitsmoment (mit $r_\perp = \vec{r} \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{r})$)</p> <p>$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$</p> <p>$J = \int r_\perp^2 dm, \quad J = \rho \int r_\perp^2 dV$</p> <p>$[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$</p>
<p>(linearer) Impuls</p> <p>$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$</p> <p>$[p] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{N} \cdot \text{s}$</p>	<p>Drehimpuls</p> <p>$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$</p> <p>$\vec{L} = \vec{\omega} \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = J \cdot \vec{\omega}$</p> <p>$[L] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = \text{Nm} \cdot \text{s}$</p>

¹Der Index ges bedeutet gesamt, der Index s bedeutet Schwerpunkt und der Index i ist der Laufindex der Teilmassen (Massenelemente).

Translation	Rotation
Kraft (Bewegungsgleichung)	Drehmoment (Bewegungsgleichung)
$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = J \cdot \dot{\vec{\omega}}$
	$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F})$
$[F] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$	$[M] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm}$
kinetische Energie	Rotationsenergie (mit $r_{\perp} = \vec{r} \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{r})$)
$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2$
mit $\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_s \Rightarrow$	$= \frac{1}{2} m \cdot r_{\perp}^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$
$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_{\text{ges}} \vec{v}_s^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{u}_i^2$	$E_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot r_{i\perp}^2 \cdot \omega^2 = \sum_i \frac{1}{2} J_i \cdot \omega^2$
$[E_{\text{kin}}] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm} = \text{J}$	$[E_{\text{rot}}] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Nm} = \text{J}$
Beschleunigungsleistung	Beschleunigungsleistung
$P = \frac{d}{dt} E_{\text{kin}} = \frac{d}{dt} \int \vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt$	$P = \frac{d}{dt} E_{\text{rot}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$
$P = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} m v^2)$	$P = \frac{d}{dt} [\frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2] = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} J \omega^2)$
$P = m \cdot a \cdot v = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = J \cdot \dot{\omega} \cdot \omega = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

4 Herleitung des Trägheitstensors

Das Trägheitsmoment J bezieht sich immer auf eine bestimmte Drehachse. Der Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ als charakteristische Eigenschaft eines starren Körpers ist jedoch unabhängig von Drehachsen, denn er wird vollständig durch die Massenverteilung im Körper bestimmt. Allerdings sind die Komponenten des Trägheitstensors abhängig vom verwendeten körperfesten Koordinatensystem $K := \{x, y, z\}$.

Legen wir also K auf einen starren Körper. Mit

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

erhalten wir dann in den Koordinaten von K für den Drehimpuls eines Massenpunktes m_i

$$\begin{aligned} \vec{L}_i &= m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = m_i \left[\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] \\ &= m_i \left[(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i \right]. \end{aligned}$$

Dabei ist $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ der Ortsvektor des Massenpunktes m_i in K , also im körperfesten Koordinatensystem. $\vec{v}_i = (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$ ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes bezüglich des umgebenden, raumfesten Laborsystems S , aber ausgedrückt in den Koordinaten von K , und $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ist die entsprechende Winkelgeschwindigkeit in K -Koordinaten. Der Vektor $\vec{\omega}$ definiert die momentane Drehachse des Körpers bezüglich K , auch wenn die Drehung des Körpers in S und nicht in K stattfindet. Mit der Gesamtmasse des Körpers $\sum_i m_i = M$ ist sein Gesamtdrehimpuls \vec{L} folglich das Integral über alle Massenelemente $dm = dm(\vec{r})$ gemäß

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int_M \left[(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} \right] dm, \\ \vec{L} &= \int_M \vec{r}^2 \vec{\omega} dm - \int_M (\vec{r} \vec{\omega}) \vec{r} dm. \end{aligned}$$

Die Drehimpulskomponenten bezüglich K sind damit

$$\begin{aligned} L_x &= \omega_x \int_M (x^2 + y^2 + z^2) dm - \int_M (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) x dm \\ &= \underbrace{\omega_x \int_M (r^2 - x^2) dm}_{J_{xx}} - \underbrace{\omega_y \int_M xy dm}_{-J_{xy}} - \underbrace{\omega_z \int_M xz dm}_{-J_{xz}}, \\ L_y &= \omega_y \int_M (x^2 + y^2 + z^2) dm - \int_M (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) y dm \\ &= \underbrace{\omega_y \int_M (r^2 - y^2) dm}_{J_{yy}} - \underbrace{\omega_x \int_M yx dm}_{-J_{yx}} - \underbrace{\omega_z \int_M yz dm}_{-J_{yz}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_z &= \omega_z \int_M (x^2 + y^2 + z^2) dm - \int_M (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) z dm \\
&= \omega_z \underbrace{\int_M (r^2 - z^2) dm}_{J_{zz}} - \omega_x \underbrace{\int_M zx dm}_{-J_{zx}} - \omega_y \underbrace{\int_M zy dm}_{-J_{zy}} .
\end{aligned}$$

Schreiben wir den Trägheitstensor als Matrix

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}} := \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} ,$$

resultiert für den Drehimpuls die Matrixgleichung

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z \\ J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z \\ J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z \end{pmatrix} , \\
\vec{L} &= \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{J}}} \vec{\omega} .
\end{aligned}$$

Wegen $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{yz} = J_{zy}$, $J_{zx} = J_{xz}$ ist die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ symmetrisch. Die Diagonalisierung von $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ liefert die Diagonalmatrix

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}} := \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

mit den Hauptträgheitsmomenten J_x , J_y , J_z . Nur wenn die Koordinatenachsen von K mit den Hauptträgheitsachsen (kurz Hauptachsen) des Körpers zusammenfallen, ist $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ eine Diagonalmatrix. Nur in diesem speziellen Fall nennt man das Koordinatensystem K **Hauptachsensystem**.

Der Drehimpuls \vec{L} und die durch $\vec{\omega}$ definierte Rotationsachse sind allgemein nicht parallel. Sie sind nur dann parallel, wenn die Drehung um eine Hauptachse erfolgt oder wenn die Hauptträgheitsmomente gleich sind.

5 Der Steiner'sche Satz

Das Trägheitsmoment eines Körpers bezieht sich immer auf eine bestimmte Drehachse. Mit anderen Worten, ändert man die Lage der Drehachse in oder zu einem Körper, so ändert sich im Allgemeinen auch das zugehörige Trägheitsmoment.

Der Steiner'sche Satz beschreibt das Trägheitsmoment J_D eines Körpers bezüglich einer Drehachse D , die **parallel** zu der durch den Körperschwerpunkt gehenden Drehachse S verläuft, wenn das Trägheitsmoment J_s bezüglich S bekannt ist. Der Steiner'sche Satz heißt deshalb auch **Parallelachsen-Theorem**.

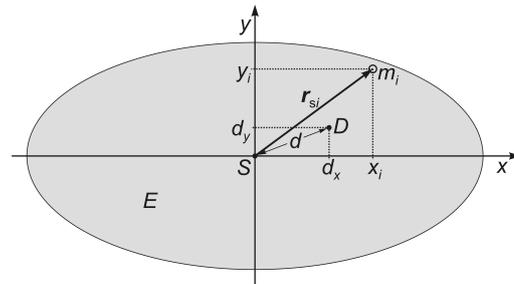


Abb. 7 Die Ebenen $E := z = \text{const}$ erstrecken sich senkrecht zu den Drehachsen S und D durch den Körper – ohne Einschränkung der Allgemeinheit handele es in diesem Fall um ein Ellipsoid. Nur die Ebene $E := z = 0$ geht durch den Schwerpunkt. Alle von der Drehachse S zu den Massenelementen m_i verlaufenden Vektoren \vec{r}_{si} stehen senkrecht auf der Drehachse S und liegen folglich in den jeweils zugehörigen Ebenen E .

Für die Herleitung legen wir vereinfachend den Schwerpunkt des Körpers in den Koordinatenursprung (Schwerpunktsystem) und die z -Achse auf die Drehachse S (s. Abb. 7). Der Abstand zwischen den Drehachsen sei

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \text{const}$$

und die Masse M des Körpers sei die Summe aller seiner Massenelemente m_i :

$$M = \sum_i m_i .$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse S ist

$$J_s = \sum_i m_i r_{si}^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) .$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse D ist

$$\begin{aligned} J_D &= \sum_i m_i \left[(x_i - d_x)^2 + (y_i - d_y)^2 \right] \\ &= \sum_i m_i \left[x_i^2 - 2d_x \cdot x_i + d_x^2 + y_i^2 - 2d_y \cdot y_i + d_y^2 \right] \\ &= \underbrace{\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)}_{= J_s} - 2d_x \underbrace{\sum_i m_i x_i}_{= 0} - 2d_y \underbrace{\sum_i m_i y_i}_{= 0} + \underbrace{(d_x^2 + d_y^2) \sum_i m_i}_{= d^2 \cdot M} . \end{aligned}$$

Die Terme $\sum_i m_i x_i$ und $\sum_i m_i y_i$ verschwinden, weil wir den Schwerpunkt in den Koordinatenursprung gelegt haben. Falls J_s bekannt ist, erhalten wir folglich auf einfache Weise das Trägheitsmoment J_D bezüglich der Drehachse D nach dem

$$\textbf{Steiner'schen Satz:} \quad J_D = J_s + Md^2 .$$

Die Rotationsenergie eines derartigen, um die Achse D rotierenden Körpers ist

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_D \omega^2 = \frac{1}{2} J_s \omega^2 + \frac{1}{2} M d^2 \omega^2 ,$$

weil die Rotation um S die gleiche Winkelgeschwindigkeit besitzt wie die Rotation um D .

6 Der elastische Stoß eines Massenpunktes gegen einen Stab

nach Dr. Hans-Joachim Scholz, Bremen.

Dieser Abschnitt ist ein Anwendungsbeispiel zum Abschnitt 2.2.1 .

Problem (s. Abb. 8)

Ein Stab mit der Masse M habe bezüglich seines Schwerpunktes das Trägheitsmoment J . Der Schwerpunkt ruhe im Nullpunkt eines kartesischen (x, y) -Koordinatensystems. Der Stab selbst ruhe zunächst rotationsfrei auf der x -Achse. Nun stoße im x -Abstand a ein Massenpunkt m in y -Richtung gegen den Stab. Vor dem Stoß habe der Massenpunkt die y -Geschwindigkeit u . Der Stoß erfolge elastisch. Wie schnell dreht sich der Stab nach dem Stoß?

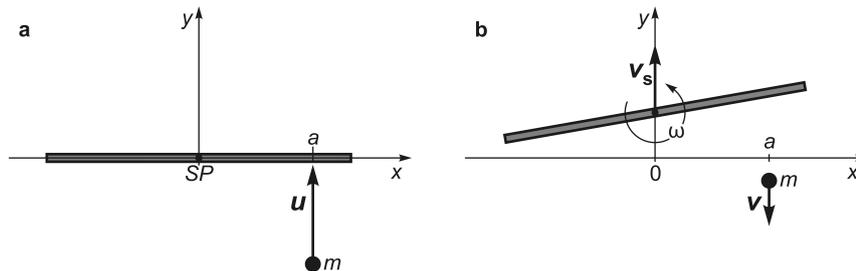


Abb. 8 a) Ruhender Stab kurz vor dem Stoß. b) Um seinen Schwerpunkt SP rotierender und sich längs der y -Achse fortbewegender Stab kurz nach dem Stoß.

Lösung

Die Schwerpunkts­geschwindigkeit des Stabes nach dem Stoß sei v_s . Die gesuchte Rotations­Winkelgeschwindigkeit sei ω . Nach dem Stoß habe der Massenpunkt die y -Geschwindigkeit v . Dann gilt:

$$\text{Impulssatz} \quad mu = Mv_s + mv, \quad (1)$$

$$\text{Drehimpulssatz} \quad mau = J\omega + mav, \quad (2)$$

$$\text{Energiesatz} \quad \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (3)$$

In diesen Gleichungen werden Gesamtimpuls, Gesamtdrehimpuls und Gesamtenergie kurz vor und kurz nach dem Stoß miteinander verglichen.

In (1) wird verwendet, dass der Impuls eines starren Körpers so berechnet werden kann, als wäre die gesamte Masse in seinem Schwerpunkt vereinigt. Bewegungen in x -Richtung sollen nicht stattfinden und der Stab habe eine ebene Oberfläche, sodass der Massenpunkt nicht schräg abprallt.

In (2) wird verwendet, dass der Gesamtdrehimpuls eines starren Körpers die Summe aus dem äußeren Drehimpuls („Bahndrehimpuls“) und dem inneren Eigendrehimpuls („Spin“) ist. Der Bahndrehimpuls des Stabes ist kurz nach dem Stoß Null, da der Schwerpunkt mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems, bezüglich dessen der Bahndrehimpuls überhaupt definiert ist, zusammenfällt.² So trägt nur der Eigendrehimpuls

²Tatsächlich befindet sich der Schwerpunkt des Stabes kurz nach dem Stoß nicht mehr im Koordinatenursprung. Der Schwerpunkt bewegt sich aber bezüglich des Koordinatenursprungs rein translatorisch mit der Schwerpunkts­geschwindigkeit v_s längs der y -Achse und besitzt somit keinen Bahndrehimpuls (bezüglich des Koordinatenursprungs). (Anmerkung von Reinhard Weiß)

$J\omega$ des Stabes zum Gesamtdrehimpuls des Stabes bei. Der Massenpunkt m hat zwar keinen Eigendrehimpuls, aber dennoch (für $a \neq 0$) einen Bahndrehimpuls bezüglich des Koordinatenursprungs. Dieser ist der Lieferant für den Eigendrehimpuls des Stabes.

In (3) wird verwendet, dass es sich um einen elastischen Stoß handelt, sodass die Summe aller kinetischen Energien erhalten bleibt. Da sich das Trägheitsmoment J des Stabes auf seinen Schwerpunkt bezieht, gilt die Besonderheit, dass die gesamte kinetische Energie des Stabes (bezogen auf das Laborsystem) einfach die Summe aus der Energie der Schwerpunktsbewegung (bezogen auf das Laborsystem) und der Energie der Eigenrotation (bezogen auf das Schwerpunktsystem) ist. Die Rotationsenergie des Stabes stammt aus der kinetischen Energie des Stabes.

Mit Hilfe des Gleichungssystems (1), (2), (3) lassen sich die drei Unbekannten v_s , v , ω bestimmen. Zunächst folgt aus (1) die Geschwindigkeit des Massenpunktes nach dem Stoß:

$$v = u - \frac{M}{m} v_s . \quad (4)$$

Aus (2) folgt

$$\begin{aligned} mau &= J\omega + mav \\ \Leftrightarrow J\omega &= mau - mav = ma(u - v) \\ \Leftrightarrow \omega &= \frac{ma}{J} (u - v) . \end{aligned} \quad (5)$$

Einsetzen von (4) in (5) liefert

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{ma}{J} \left[u - \left(u - \frac{M}{m} v_s \right) \right] = \frac{ma}{J} \cdot \frac{M}{m} v_s , \\ \omega &= \frac{Ma}{J} v_s . \end{aligned} \quad (6)$$

Jetzt setzen wir (4) und (6) in (3) ein und erhalten

$$\begin{aligned} mu^2 &= Mv_s^2 + J \frac{M^2 a^2}{J^2} v_s^2 + m \left(u - \frac{M}{m} v_s \right)^2 \\ &= Mv_s^2 + J \frac{M^2 a^2}{J^2} v_s^2 + m \left(u^2 - 2u \frac{M}{m} v_s + \frac{M^2}{m^2} v_s^2 \right) \\ \Leftrightarrow 0 &= Mv_s^2 + \frac{M^2 a^2}{J} v_s^2 - 2uMv_s + \frac{M^2}{m} v_s^2 \\ &= v_s + \frac{Ma^2}{J} v_s - 2u + \frac{M}{m} v_s \\ \Leftrightarrow 2u &= v_s \left(1 + \frac{Ma^2}{J} + \frac{M}{m} \right) , \end{aligned} \quad (7)$$

$$\boxed{v_s = v_s(u) = u \frac{2}{1 + \frac{M}{m} + \frac{Ma^2}{J}}} .$$

Mit (7), d. h. mit $v_s(u)$ gehen wir schließlich in die Gleichungen (4) und (6):

$$v = u - \frac{M}{m} \left(\frac{2u}{1 + \frac{M}{m} + \frac{Ma^2}{J}} \right) = u \left(1 - \frac{2M}{m + M + \frac{mMa^2}{J}} \right) ,$$

$$\boxed{v = v(u) = u \left(1 - \frac{2}{1 + \frac{m}{M} + \frac{ma^2}{J}} \right)} . \quad (8)$$

$$\omega = \frac{Ma}{J} \cdot \frac{2u}{1 + \frac{M}{m} + \frac{Ma^2}{J}} = u \frac{2Ma}{J + \frac{JM}{m} + Ma^2} ,$$

$$\boxed{\omega = \omega(u) = u \frac{2a}{\frac{J}{m} + \frac{J}{M} + a^2}} . \quad (9)$$

Abschließend und der Vollständigkeit halber betrachten wir noch zwei Spezialfälle:

- Stößt der Massenpunkt zentral auf den Stab, d. h. genau in Richtung Schwerpunkt mit $a = 0$, so dreht sich der Stab gemäß (9) überhaupt nicht. Hat der Massenpunkt darüber hinaus auch noch die gleiche Masse wie der Stab ($m = M$), so bewegt sich der Stab nach (7) rotationsfrei mit der ursprünglichen Geschwindigkeit u des Massenpunktes weiter. Der Massenpunkt selbst bleibt in diesem Spezialfall wegen (4) mit $v = u - \frac{M}{m} \cdot v_s = u - 1 \cdot u = 0$ einfach stehen.
- Wir ersetzen den Stab durch eine Hantel mit den zwei Massenpunkten m_1 und m_2 . Das Verbindungsstück sei masselos. Der Stoß erfolge gegen m_1 . Die x -Koordinaten der Massenpunkte seien $a_1 = a$ und $a_2 = -\frac{m_1}{m_2} a$, sodass der Hantelschwerpunkt (Bedingung $m_1 a = m_2 a_2$) mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt.

Dann gilt $M = m_1 + m_2$ und es ergibt sich für das Trägheitsmoment

$$J = m_1 a^2 + m_2 a_2^2 = m_1 a^2 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} a^2 = \frac{m_1}{m_2} (m_1 + m_2) a^2 .$$

Dies führt mit (7) zu

$$v_s = \frac{2u}{1 + \frac{m_1+m_2}{m} + \frac{(m_1+m_2)a^2}{\frac{m_1}{m_2}(m_1+m_2)a^2}} = \frac{2u}{\frac{mm_1+m_1(m_1+m_2)+mm_2}{mm_1}} ,$$

$$\boxed{v_s = 2u \cdot \frac{mm_1}{(m+m_1)(m_1+m_2)}} . \quad (10)$$

Entsprechend gilt mit (6) und (10) für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{(m_1+m_2)a}{\frac{m_1}{m_2}(m_1+m_2)a^2} \cdot \frac{2u mm_1}{(m+m_1)(m_1+m_2)} = \frac{m_2}{m_1 a} \cdot \frac{2u mm_1}{(m+m_1)(m_1+m_2)} ,$$

$$\boxed{\omega = \frac{2u}{a} \cdot \frac{mm_2}{(m+m_1)(m_1+m_2)}} .$$

7 Rotierendes Bezugssystem, Coriolis- und Zentrifugalbeschleunigung

Nach:

DEMTRÖDER, Experimentalphysik 1, Springer-Lehrbuch, 2003, 3. Auflage, Seite 85 bis Seite 87.

Wir gehen aus von einem (x, y, z) -Koordinatensystem S und einem (x', y', z') -Koordinatensystem S' . S sei das Inertialsystem und S' rotiere bezüglich S mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} .$$

S' ist somit kein Inertialsystem. Weiterhin gelte für beide Systeme die gleiche Zeit gemäß

$$t = t'$$

und beide Systeme sollen stets in ihrem Ursprung zusammenfallen. Schließlich betrachten wir einen Raumpunkt P zur Zeit $t = t'$. Dieser bewege sich innerhalb von S' mit der Geschwindigkeit $\vec{v}'(t)$ und gleichzeitig bezüglich S (in den Koordinaten von S) mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$. P wird also im Inertialsystem S beschrieben durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z$$

und innerhalb des rotierenden Systems S' durch den Ortsvektor

$$\vec{r}'(t) = x'(t) \vec{e}'_x + y'(t) \vec{e}'_y + z'(t) \vec{e}'_z .$$

Da es sich um denselben Raumpunkt P handelt, sind die zugehörigen Ortsvektoren identisch gemäß

$$\vec{r} \equiv \vec{r}' ,$$

auch wenn sich die Zahlenwerte ihrer Komponenten in Abhängigkeit vom verwendeten Koordinatensystem voneinander unterscheiden. Daraus folgt für die Geschwindigkeit von P zur Zeit t

$$\text{bezüglich } S : \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z , \quad (11)$$

$$\text{bezüglich } S' : \quad \vec{v}'(t) = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \frac{dx'}{dt} \vec{e}'_x + \frac{dy'}{dt} \vec{e}'_y + \frac{dz'}{dt} \vec{e}'_z . \quad (12)$$

Ein in S' **ruhender Raumpunkt**, definiert durch den in S' zeitunabhängigen Ortsvektor $\vec{r}' = x' \vec{e}'_x + y' \vec{e}'_y + z' \vec{e}'_z$, hat aber allein schon auf Grund der Rotation von S' gegenüber S aus der Sicht von S und wegen $\vec{r} \equiv \vec{r}'$ die (rotationsbedingte) Geschwindigkeit

$$\vec{u}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy(t)}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz(t)}{dt} \vec{e}_z = \vec{\omega} \times \vec{r}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}'(t) .$$

Auch wenn der Raumpunkt in S' ruht, so ist der zugehörige Ortsvektor $\vec{r} \equiv \vec{r}'$ bezüglich S rotationsbedingt zeitabhängig. Drücken wir nämlich \vec{u} (aus der Sicht von S)

in den Koordinaten von S' aus, so müssen wir berücksichtigen, dass zwar die Komponenten x', y', z' von $\vec{r}'(t)$ zeitlich konstant sind³, nicht aber die (richtungsweisenden) Basiseinheitsvektoren $\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z$. Wir schreiben deshalb für

$$\vec{u}(t) = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}'(t) \quad (\text{aus der Sicht von } S)$$

mit

$$\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}'_i(t) \quad (\text{aus der Sicht von } S) \quad (13)$$

in den Koordinaten von S' unter Anwendung der Produktregel

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &= x' \frac{d\vec{e}'_x(t)}{dt} + \underbrace{\vec{e}'_x(t) \frac{dx'}{dt}}_{=0} + \\ &\quad y' \frac{d\vec{e}'_y(t)}{dt} + \underbrace{\vec{e}'_y(t) \frac{dy'}{dt}}_{=0} + \\ &\quad z' \frac{d\vec{e}'_z(t)}{dt} + \underbrace{\vec{e}'_z(t) \frac{dz'}{dt}}_{=0}, \end{aligned}$$

$$\vec{u}(t) = x' \frac{d\vec{e}'_x(t)}{dt} + y' \frac{d\vec{e}'_y(t)}{dt} + z' \frac{d\vec{e}'_z(t)}{dt} \quad (14)$$

$$= [\vec{\omega} \times \vec{e}'_x(t)] x' + [\vec{\omega} \times \vec{e}'_y(t)] y' + [\vec{\omega} \times \vec{e}'_z(t)] z'$$

$$= \vec{\omega} \times [\vec{e}'_x(t) x' + \vec{e}'_y(t) y' + \vec{e}'_z(t) z'] ,$$

$$\vec{u}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}'(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t) . \quad \square \quad (15)$$

Mit (12) und (15) können wir jetzt die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ eines in S' bewegten Raumpunktes P aus der Sicht von S aber in den Koordinaten von S' angeben, denn dessen Geschwindigkeit bezüglich S setzt sich zusammen aus seiner Geschwindigkeit $\vec{v}'(t)$ innerhalb von S' und aus seiner rotationsbedingten Geschwindigkeit $\vec{u}(t)$ gegenüber S :

$$\vec{v}(x', y', z') = \underbrace{\left(\frac{dx'}{dt} \vec{e}'_x + \frac{dy'}{dt} \vec{e}'_y + \frac{dz'}{dt} \vec{e}'_z \right)}_{\vec{v}'} + \underbrace{\left(x' \frac{d\vec{e}'_x(t)}{dt} + y' \frac{d\vec{e}'_y(t)}{dt} + z' \frac{d\vec{e}'_z(t)}{dt} \right)}_{\vec{u}}, \quad (16)$$

$$\vec{v}(x', y', z') = \vec{v}' + \vec{u} = \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}) .$$

Die zeitliche Ableitung von (16) ist die Beschleunigung von P aus der Sicht von S . So erhalten wir aus (16) unter Berücksichtigung von $\vec{\omega} = \text{const}$ und $\vec{e}'_i = \vec{e}'_i(t)$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}) . \quad (17)$$

³Weil der Ursprung von S' stets mit dem Ursprung von S zusammenfällt, ändern die (skalaren) Komponenten x', y' und z' des Ortsvektors \vec{r}' bei Rotation von S' gegenüber S nicht ihre Länge in S sondern nur ihre Richtung.

Die Herleitung der Beschleunigung ist weniger anschaulich als die der Geschwindigkeit und erfordert Vertrauen in den Kalkül. Dabei erfolgt die Ableitung von \vec{v}' nach der Produktregel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \vec{v}' &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt} \vec{e}'_x(t) + \frac{dy'}{dt} \vec{e}'_y(t) + \frac{dz'}{dt} \vec{e}'_z(t) \right) \\
&= \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{e}'_x + \frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{e}'_x}{dt} + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{e}'_y + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{e}'_y}{dt} + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{e}'_z + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{e}'_z}{dt} \\
&= a'_x \vec{e}'_x + v'_x \frac{d\vec{e}'_x}{dt} + a'_y \vec{e}'_y + v'_y \frac{d\vec{e}'_y}{dt} + a'_z \vec{e}'_z + v'_z \frac{d\vec{e}'_z}{dt} \\
&= \underbrace{a'_x \vec{e}'_x + a'_y \vec{e}'_y + a'_z \vec{e}'_z}_{\vec{a}'} + \underbrace{v'_x \frac{d\vec{e}'_x}{dt} + v'_y \frac{d\vec{e}'_y}{dt} + v'_z \frac{d\vec{e}'_z}{dt}}_{\text{mit (13)} \Rightarrow} \\
&= \vec{a}' + \left[v'_x (\vec{\omega} \times \vec{e}'_x) + v'_y (\vec{\omega} \times \vec{e}'_y) + v'_z (\vec{\omega} \times \vec{e}'_z) \right] \\
&= \vec{a}' + \left[\vec{\omega} \times \underbrace{(v'_x \vec{e}'_x + v'_y \vec{e}'_y + v'_z \vec{e}'_z)}_{\vec{v}'} \right].
\end{aligned}$$

Wie man sieht, ist $d\vec{v}'/dt$ rotationsbedingt nicht nur die zeitliche Änderung \vec{a}' der Geschwindigkeit von P in S' , sondern

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}'). \quad (18)$$

Darin ist \vec{a}' die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit (Beschleunigung) von P , die ein Beobachter innerhalb von S' misst:

$$\vec{a}' = \frac{d^2x'(t)}{dt^2} \vec{e}'_x + \frac{d^2y'(t)}{dt^2} \vec{e}'_y + \frac{d^2z'(t)}{dt^2} \vec{e}'_z = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} x'(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} y'(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} z'(t) \end{pmatrix} \text{ in } S'. \quad (19)$$

Und für $(\vec{\omega} \times \vec{v}')$ in (17) schreiben wir mit (16)

$$\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{\omega} \times \left[\vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right] = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'). \quad (20)$$

Wir setzen (18) und (20) in (17) ein und erhalten schließlich

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a}' + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + (\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\
\vec{a} &= \vec{a}' + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad \Longleftrightarrow \\
\vec{a}' &= \vec{a} - \underbrace{2(\vec{v}' \times \vec{\omega})}_{\vec{a}_c} - \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega})}_{\vec{a}_{zf}}
\end{aligned}$$

mit der **Coriolisbeschleunigung** $\vec{a}_c = 2(\vec{v}' \times \vec{\omega})$

und der **Zentrifugalbeschleunigung** $\vec{a}_{zf} = \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$.

Ein Beobachter in S misst in seinem (ruhenden) Inertialsystem lediglich die Beschleunigung $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ des Punktes P . Ein Beobachter in S' hingegen misst in seinem rotierenden System außer der Beschleunigung $\vec{a}' = d\vec{v}'/dt$ auch noch die Coriolisbeschleunigung \vec{a}_c und die Zentrifugalbeschleunigung \vec{a}_{zf} des Punktes P .

- Die Coriolisbeschleunigung $\vec{a}_c = 2(\vec{v}' \times \vec{\omega})$ steht stets senkrecht auf der von \vec{v}' und $\vec{\omega}$ aufgespannten Ebene und ist gleich Null, wenn $\vec{v}' \parallel \vec{\omega}$.
 - Die Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a}_{zf} = \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$ steht stets senkrecht auf $\vec{\omega}$, ist also stets radial nach außen gerichtet.
-

Beispiel

- In S und S' herrsche die gleiche Zeit

$$t = t' .$$

- S und S' sollen zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ zusammenfallen und S und S' sollen stets in ihrem Koordinatenursprung zusammenfallen.
- Die Rotation von S' bezüglich S erfolge um die z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \omega_z \vec{e}_z = \text{const} .$$

- Die Darstellung der S' -Basiseinheitsvektoren \vec{e}'_i in S -Koordinaten bzw. -Komponenten, d. h. in Vielfachen von \vec{e}_i , erfolgt in diesem Beispiel mit der Transformationsmatrix A gemäß

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_x \\ \vec{e}'_y \\ \vec{e}'_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} .$$

Dabei ist der Rotationswinkel zwischen dem Inertialsystem S und dem rotierenden System S'

$$\varphi = \varphi(t) = \omega_z \cdot t .$$

Die Transformation eines S' -Vektors $\vec{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ in den zugehörigen S -Vektor $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ erfolgt in diesem Beispiel mit der Transformationsmatrix A^{-1} gemäß

$$\vec{v} = A^{-1} \cdot \vec{v}' \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} .$$

- Ein Raumpunkt P bewege sich innerhalb von S' geradlinig gleichförmig in der (x', y') -Ebene gemäß

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} = t\vec{e}'_x + 2t\vec{e}'_y .$$

- Damit hat P in S' die Geschwindigkeit

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}'_x + 2\vec{e}'_y .$$

- Darstellung der Basiseinheitsvektoren \vec{e}'_i in S -Koordinaten:

Die Spitzen von \vec{e}'_x und \vec{e}'_y umkreisen den Ursprung von S in der (x, y) -Ebene gleichförmig mit ω_z gemäß $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z) = \text{const}$. \vec{e}'_z stimmt mit $\vec{e}_z = \vec{e}'_z(t)$ überein.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{in } S'\text{-Koordinaten} & \implies & \text{in } S\text{-Koordinaten} & (21) \\
 \vec{e}'_x = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{const} & & \vec{e}'_x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z \cdot t) \\ \sin(\omega_z \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \vec{e}'_y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{const} & & \vec{e}'_y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega_z \cdot t) \\ \cos(\omega_z \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \vec{e}'_z = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{const} & & \vec{e}'_z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

- Darstellung eines beliebigen aber in S' festen Punktes $Q := \vec{r}'$ in S -Koordinaten:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{in } S'\text{-Koordinaten} & \implies & \text{in } S\text{-Koordinaten} \\
 \vec{r}' = x' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \vec{r}'(t) = x' \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) \\ \sin(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} -\sin(\omega_z t) \\ \cos(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 & & \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x' \cos(\omega_z t) - y' \sin(\omega_z t) \\ x' \sin(\omega_z t) + y' \cos(\omega_z t) \\ z' \end{pmatrix} \equiv \vec{r}(t).
 \end{array} \quad (22)$$

- Berechnung von $\vec{u}(t)$ bezüglich S mit (14):

Wie betrachten zunächst einen in S' ortsfesten Raumpunkt $Q := \vec{r}'$. Seine S' -Koordinaten x' , y' , z' sind also nicht zeitabhängig. Bei der Berechnung der Umlaufgeschwindigkeit von Q in S brauchen wir folglich nur die Zeitabhängigkeit der Basiseinheitsvektoren \vec{e}'_i von S' bezüglich S zu berücksichtigen. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
 \vec{u}(t) &= x' \frac{d\vec{e}'_x(t)}{dt} + y' \frac{d\vec{e}'_y(t)}{dt} + z' \frac{d\vec{e}'_z(t)}{dt} \\
 &= \frac{d}{dt} \vec{r}'(t) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x' \cos(\omega_z t) - y' \sin(\omega_z t) \\ x' \sin(\omega_z t) + y' \cos(\omega_z t) \\ z' \end{pmatrix}, \\
 \vec{u}(t) &= \begin{pmatrix} -x' \omega_z \sin(\omega_z t) - y' \omega_z \cos(\omega_z t) \\ x' \omega_z \cos(\omega_z t) - y' \omega_z \sin(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \text{const}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis liefert aber auch (15) mit (22) gemäß

$$\vec{u}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \cos(\omega_z t) - y' \sin(\omega_z t) \\ x' \sin(\omega_z t) + y' \cos(\omega_z t) \\ z' \end{pmatrix} .$$

Wenn der betrachtete Raumpunkt in S' nicht ortsfest ist, sich also wie P innerhalb von S' mit der Geschwindigkeit \vec{v}' bewegt, so sind seine Koordinaten auch bezüglich S' zeitabhängig gemäß $x' = x'(t)$, $y' = y'(t)$, $z' = z'(t)$. Diese Zeitabhängigkeit ist dann auch bei der Berechnung von \vec{u} zu berücksichtigen. So nimmt die Umlaufgeschwindigkeit beispielsweise bei einer *gleichförmigen* Kreisbewegung mit wachsendem Radius der Umlaufbahn *linear* zu. \vec{u} ist also die (rotationsbedingte) Geschwindigkeit bezüglich S , die ein Punkt in S' allein auf Grund seiner Lokalisation innerhalb von S' besitzt. \vec{u} ist nicht abhängig von der *zeitlichen Änderung* seiner Lokalisation in S' , d. h. nicht abhängig von \vec{v}' .

Um \vec{u} für P zu erhalten, müssen wir folglich die Zeitabhängigkeit der S' -Koordinaten $x'(t) = t$, $y'(t) = 2t$, $z'(t) = 0$ in (23) berücksichtigen:

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -t\omega_z \sin(\omega_z t) - 2t\omega_z \cos(\omega_z t) \\ t\omega_z \cos(\omega_z t) - 2t\omega_z \sin(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- Darstellung der Geschwindigkeit \vec{v}' des Raumpunktes P in S -Koordinaten:

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}' = \dot{\vec{r}}'$ von P sind in S'

$$\begin{aligned} v'_x \vec{e}'_x &= \dot{x}'(t) \cdot \vec{e}'_x = 1 \cdot \vec{e}'_x , \\ v'_y \vec{e}'_y &= \dot{y}'(t) \cdot \vec{e}'_y = 2 \cdot \vec{e}'_y , \\ v'_z \vec{e}'_z &= \dot{z}'(t) \cdot \vec{e}'_z = 0 \cdot \vec{e}'_z . \end{aligned}$$

Diese ergeben eine bestimmte Richtung von \vec{v}' in S' . Projiziert auf S hat \vec{v}' in S die gleiche Länge $|\vec{v}'| = |\vec{v}|$ bei jedoch rotationsbedingt allgemein anderen Komponenten. Um den auf S projizierten Vektor für einen bestimmten Zeitpunkt t zu erhalten, müssen die einzelnen gestrichelten Komponenten von \vec{v}' in Vektoren von S transformiert und diese anschließend zu *einem* S -Vektor addiert werden:

$$\begin{aligned} \vec{v}'(t) &= \dot{\vec{r}}'(t) = \dot{x}'(t) \cdot \vec{e}'_x(t) + \dot{y}'(t) \cdot \vec{e}'_y(t) + \dot{z}'(t) \cdot \vec{e}'_z(t) , \\ \vec{v}'(t) &= 1 \cdot \vec{e}'_x(t) + 2 \cdot \vec{e}'_y(t) + 0 \cdot \vec{e}'_z(t) . \end{aligned}$$

Wir ersetzen die S' -Basiseinheitsvektoren \vec{e}'_i durch ihre Darstellung in S -Komponenten gemäß (21) und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{v}'(t) &= 1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) \\ \sin(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega_z t) \\ \cos(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \\ \vec{v}'(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) - 2 \sin(\omega_z t) \\ \sin(\omega_z t) + 2 \cos(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

$$\vec{v}'(t) = [\cos(\omega_z t) - 2 \sin(\omega_z t)] \cdot \vec{e}_x + [\sin(\omega_z t) + 2 \cos(\omega_z t)] \cdot \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z .$$

- Geschwindigkeit \vec{v} des Raumpunktes P in S :

Nachdem wir die S' -Geschwindigkeiten \vec{u} und \vec{v}' in S -Koordinaten ausgedrückt haben, addieren wir sie zur Geschwindigkeit \vec{v} des Raumpunktes P , die ein Beobachter im Inertialsystem S misst:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} ,$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) - 2 \sin(\omega_z t) \\ \sin(\omega_z t) + 2 \cos(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t\omega_z \sin(\omega_z t) - 2t\omega_z \cos(\omega_z t) \\ t\omega_z \cos(\omega_z t) - 2t\omega_z \sin(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} (1 - 2t\omega_z) \cos(\omega_z t) - (2 + t\omega_z) \sin(\omega_z t) \\ (1 - 2t\omega_z) \sin(\omega_z t) + (2 + t\omega_z) \cos(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- Bestimmung der Beschleunigung \vec{a}' :

Mit (19) resultiert

$$\vec{a}' = \frac{d^2 x'(t)}{dt^2} \vec{e}'_x + \frac{d^2 y'(t)}{dt^2} \vec{e}'_y + \frac{d^2 z'(t)}{dt^2} \vec{e}'_z = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} t \\ \frac{d^2}{dt^2} 2t \\ \frac{d^2}{dt^2} 0 \end{pmatrix} = \vec{0} .$$

Die Beschleunigung von P , die ein Beobachter innerhalb von S' misst, ist gleich Null, weil sich P innerhalb von S' geradlinig-gleichförmig bewegt.

- Berechnung der Coriolisbeschleunigung $\vec{a}_c = 2\vec{v}' \times \vec{\omega}$:

Im rotierenden System S' gilt

$$\vec{a}_c = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} ,$$

$$\vec{a}_c = 2\omega_z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Im Inertialsystem S gilt

$$\vec{a}_c = 2 \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) - 2 \sin(\omega_z t) \\ \sin(\omega_z t) + 2 \cos(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} ,$$

$$\vec{a}_c = 2\omega_z \begin{pmatrix} \sin(\omega_z t) + 2 \cos(\omega_z t) \\ -\cos(\omega_z t) + 2 \sin(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Der Vektor \vec{a}_c hat in S und S' erwartungsgemäß die gleiche konstante Länge, nämlich $|\vec{a}_c| = \sqrt{20} \cdot \omega_z = \text{const}$. Wie man sieht, ist der Vektor innerhalb von S' ortsfest, während er mit S' bezüglich S rotiert.

- Berechnung der Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a}_{zf} = \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$:

Im rotierenden System S' gilt

$$\begin{aligned}\vec{a}_{zf} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2t\omega_z \\ -t\omega_z \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{a}_{zf} &= t\omega_z^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Im Inertialsystem S gilt

$$\begin{aligned}\vec{a}_{zf} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} t \cos(\omega_z t) - 2t \sin(\omega_z t) \\ t \sin(\omega_z t) + 2t \cos(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t\omega_z \sin(\omega_z t) + 2t\omega_z \cos(\omega_z t) \\ -t\omega_z \cos(\omega_z t) + 2t\omega_z \sin(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{a}_{zf} &= t\omega_z^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) - 2 \sin(\omega_z t) \\ \sin(\omega_z t) + 2 \cos(\omega_z t) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Der Vektor \vec{a}_{zf} hat in S und S' erwartungsgemäß die gleiche zeitabhängige Länge, nämlich $|\vec{a}_c| = \sqrt{5} \cdot t\omega_z^2$. Wie man sieht, rotiert der Vektor mit S' bezüglich S .

8 Herleitung der Euler'schen Gleichungen

Nach dem Springer-Lehrbuch von Wolfgang Demtröder, Experimentalphysik 1, Mechanik und Wärme, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002, Seite 149.

Die Euler'schen Gleichungen beschreiben das **Drehmoment** \vec{M} bei zeitlicher Änderung des Drehimpulses und der Rotations- bzw. Winkelgeschwindigkeit eines starren Körpers aus der Sicht des (äußeren, ruhenden) Laborsystems S . Das Laborsystem ist also ein Inertialsystem. Der im Laborsystem rotierende Körper selbst wird erfasst durch das mitbewegte (körperfeste) Koordinatensystem $K := \{x, y, z\}$, in dem der Körper ruht. Weil K bezüglich S rotiert, ist K kein Inertialsystem. Zur Vereinfachung sollen die Koordinatenachsen von K mit den Hauptträgheitsachsen des Körpers zusammenfallen. K heißt dann auch Hauptachsensystem. Der Trägheitstensor reduziert sich dann auf die drei Hauptträgheitsmomente. Das Drehmoment ist eine **momentane Größe**.

Allgemein gilt

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}.$$

Das bedeutet, dass zur Änderung des Drehimpulses eines Körpers ein Drehmoment erforderlich ist. Besitzt im einfachsten Fall z. B. ein symmetrischer Kreisel den Eigendrehimpuls \vec{L} und wird er um seine Figurenaxe beschleunigt, so ist die Änderungsgeschwindigkeit seines Drehimpulses gleich dem dafür erforderlichen Drehmoment und die resultierende Änderung von \vec{L} zeigt in die Richtung der Figurenaxe, d. h., dass sich zwar der Betrag von \vec{L} ändert, nicht aber seine Richtung. Diese Art der Impulsänderung hat keinen Einfluss auf die Position des Körperschwerpunkts im Laborsystem.

Weiterhin stellen wir mit (26) im Abschnitt 9.4.1 Fahrradkreisel fest, dass im Laborsystem für das äußere, die Kreiselpräzession bewirkende Drehmoment \vec{M} die Beziehung

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

gilt. Dabei besitzt der Kreisel im Laborsystem den Gesamtdrehimpuls \vec{L} infolge der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{\omega}_F + \vec{\Omega}$ und präzediert mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$. Ist das einwirkende Drehmoment \vec{M} konstant, ändert sich bei der Präzession nur die Richtung von \vec{L} im Laborsystem, nicht der Betrag. Infolge der Präzession ändert sich die Position des Körperschwerpunkts im Laborsystem.

Wir befinden uns also im Laborsystem S und beobachten einen mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ rotierenden starren Körper. Allgemein ist $\vec{\omega}$ sowohl in S als auch in K eine zeitlich veränderliche Größe. Der Körper besitzt demzufolge bezüglich S im Allgemeinen ebenfalls einen zeitabhängigen Drehimpuls $\vec{L} = \vec{L}(t)$. Die Änderungsgeschwindigkeit des Drehimpulses ist aber gleich dem aus Sicht von S auf den Körper einwirkenden Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{M}(t) = \left[\frac{d\vec{L}(t)}{dt} \right]_S.$$

Ein Beobachter in K sieht keine durch $\vec{\omega}$ bedingte Rotation und stellt in seinem körperfesten Koordinatensystem die Änderungsgeschwindigkeit des Drehimpulsänderung $(d\vec{L}(t)/dt)_K$ fest, welche nicht den durch $\vec{\omega}$ bedingten Anteil $\vec{\omega}(t) \times \vec{L}(t)$ an Drehimpulsänderungsgeschwindigkeit besitzt. Für die Änderungsgeschwindigkeit des Drehimpulses in K können wir folglich schreiben:

$$\left[\frac{d\vec{L}(t)}{dt} \right]_K = \left[\frac{d\vec{L}(t)}{dt} \right]_S - \left[\vec{\omega}(t) \times \vec{L}(t) \right].$$

Durch Äquivalenzumformung erhalten wir daraus die Vektorgleichung für das aus der Sicht von S zum Zeitpunkt t auf den Körper wirkende Drehmoment

$$\vec{M} = \left[\frac{d\vec{L}(t)}{dt} \right]_K + (\vec{\omega} \times \vec{L}) .$$

Dabei ergibt sich $\vec{\omega}$ aus der Sicht des Laborsystems, wird aber letztlich angegeben in K -Koordinaten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, während $\vec{L} = (\omega_x J_x, \omega_y J_y, \omega_z J_z)$ von vornherein im Hauptachsensystem K angegeben wird. Berechnen wir also zunächst die Drehmomentkomponente M_x längs der x -Achse bzw. in Richtung der Hauptträgheitsachse J_x des Kreisels:

$$\begin{aligned} M_x &= \left[\frac{dL_x(t)}{dt} \right]_K + (\omega_y L_z - \omega_z L_y) \\ &= \frac{d}{dt}(J_x \omega_x) + (\omega_y J_z \omega_z - \omega_z J_y \omega_y) \\ &= J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z . \end{aligned}$$

Völlig analog werden die Komponenten M_y und M_z berechnet. Somit sind die **Euler'schen Gleichungen**

$$\begin{aligned} M_x &= J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z , \\ M_y &= J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x , \\ M_z &= J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y . \end{aligned}$$

Mit dem Trägheitstensor $\underline{\underline{J}}$ lassen sich diese drei Gleichungen verallgemeinern und zu *einer* Vektorgleichung, der sog. Euler'schen Kreiselgleichung, zusammenfassen:

$$\vec{M} = \underline{\underline{J}} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\underline{\underline{J}} \cdot \vec{\omega}) .$$

Und mit dem total antisymmetrischen Tensor ε_{ijk} ist die Euler'sche Kreiselgleichung in Indeschreibweise

$$M_i = J_{ij} \omega_j + \varepsilon_{ijk} \omega_j J_{kl} \omega_l = J_{ij} \omega_j + \varepsilon_{ijk} J_{kl} \omega_j \omega_l .$$

Beim kräftefreien Kreisel gilt $M_x = M_y = M_z = 0$ und beim Kugelkreisel mit $J = J_x = J_y = J_z$ ist $\vec{M} = J d\vec{\omega}/dt$.

9 Grundlegendes zur Kreiselmechanik

Wohl jeder, der zum ersten Mal mit einem Kreisel herumhantiert, stellt sich die Frage: „Warum zum Teufel weicht das Ding immer zur Seite aus, wenn ich es in eine bestimmte Richtung bewege?“ Leider gibt es darauf keine Antwort, weil die Natur eben so ist, wie sie ist. Und leider sind beim Kreisel die Zusammenhänge zwischen Ursachen und Wirkungen nicht sofort und klar ersichtlich sondern sie sind gleichsam „um die Ecke versteckt“. Wir können also nur beobachten, mathematisch erfassen und eine konsistente, möglichst ganzheitliche Theorie entwickeln. Leser, die sich tiefgreifend mit der Kreiseltheorie beschäftigen wollen, dürfen auf dieses Kapitel gern verzichten, denn es liefert nur einen Überblick, um ein „Gefühl“ für die Kreiselmechanik zu bekommen. Als fundierter, praxisbezogener Einstieg wäre dann die folgende, im Internet veröffentlichte, sehr anschauliche Arbeit zu empfehlen: David Himmel, Theorie und Experimente zum mechanischen Kreisel als Grundlage eines Versuchs im Anfängerpraktikum, Köln, 1998,

http://sahnehaube.de/01_deutsch/docs/Himmel_Staatsexamensarbeit.pdf

Konvention im Sprachgebrauch!

Die Rotation bzw. Drehung von Körpern erfolgt immer bezüglich einer Rotations- bzw. Drehachse, die definiert wird durch den zugehörigen Vektor Winkelgeschwindigkeit, bezeichnet beispielsweise mit dem Symbol $\vec{\omega}$. Man sollte bedenken, dass die Bedeutung der Worte Drehung und Drehachse nicht gleichzusetzen ist mit der Bedeutung des Begriffs Winkelgeschwindigkeit. Aus Bequemlichkeit werden wir dies dennoch praktizieren und statt

„... die Rotation/Drehachse, definiert durch den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$, ...“
kurz und nicht korrekt „... die Rotation/Drehachse $\vec{\omega}$...“ schreiben.

9.1 Hauptträgheitsachsen- und Kreiseldefinition

- Ein **starrer Körper** ist eine Verteilung (Anhäufung) starr miteinander verbundener Massenelemente.
- Jeder starre Körper besitzt – unabhängig von seiner Gestalt – drei paarweise senkrecht aufeinander stehende und durch den Körperschwerpunkt verlaufende **Hauptträgheitsachsen**⁴. Diese legt man meistens zur Vereinfachung so auf ein kartesisches z. B. (x, y, z) -Koordinatensystem, dass die Hauptträgheitsachsen mit den Achsen und der Körperschwerpunkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfallen. Ein derartiges Koordinatensystem heißt **Hauptachsensystem**. Wir werden im Folgenden, wenn nicht anders ausgewiesen, immer das Hauptachsensystem mit x -Achse, y -Achse und z -Achse als Hauptträgheitsachsen verwenden.
- Hauptträgheitsachsen zeichnen sich dadurch aus, dass die gemischten Tensorkomponenten J_{ik} , ($i \neq k$, $i, k = \{x, y, z\}$) des zugehörigen Trägheitstensors des Körpers verschwinden. Es verbleiben in diesem Fall nur die Komponenten J_{xx} , J_{yy} , J_{zz} , d. h. die **Hauptträgheitsmomente** J_x , J_y , J_z . Der **Trägheitstensor** $\underline{\underline{J}}$ hat dann die Form der **Diagonalmatrix**

$$\underline{\underline{J}} := \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{J}} := \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} .$$

⁴Hauptträgheitsachsen, kurz Hauptachsen, werden auch **freie Achsen** genannt, weil ein Körper um seine freien Achsen auch dann kräftefrei rotieren kann, wenn diese nicht festgehalten werden.

- **Kreiseldefinition**

Ein Kreisel ist ein um einen Fixpunkt rotierender starrer Körper.

Wenn ein starrer Körper um sich selbst rotiert und dabei gar nicht oder höchstens in nur einem Punkt seiner Rotationsachse in allen zugänglichen Richtungen⁵ frei rotierbar gelagert bzw. unterstützt ist, so bezeichnen wir ihn als Kreisel.

Statt Fixpunkt werden wir, um Missverständnisse zu vermeiden, den Begriff Unterstützungspunkt verwenden. Die Rotation eines Körpers um sich selbst, d. h. um seinen Schwerpunkt oder speziell auch um seine Figurenachse, nennt man Eigenrotation und den daraus resultierenden Eigendrehimpuls nennt man Spin.

Wir unterscheiden den kräftefreien⁶ Kreisel vom schweren Kreisel.

Ein **kräftefreier Kreisel** bedarf entweder keiner Unterstützung (z. B. eine um sich selbst rotierende Raumsonde unter den Bedingungen der Schwerelosigkeit) oder ist lediglich in seinem Massenmittelpunkt bzw. Schwerpunkt frei rotierbar unterstützt (z. B. eine in ihrem Schwerpunkt unterstützte rotierende Kreisscheibe).

Andernfalls, also wenn der Unterstützungspunkt auf der Rotationsachse des rotierenden starren Körpers nicht dessen Schwerpunkt ist und wenn auf diesen rotierenden starren Körper ein Drehmoment beispielsweise infolge des Gravitationsfeldes der Erde wirkt, handelt es sich um einen **schweren Kreisel** (z. B. der Kinderspielkreisel, kurz Spielkreisel).

9.2 Kreiseltypisierung nach dem Trägheitsmoment

- **sphärischer Kreisel** (z. B. homogene Kugel, homogener Würfel)

Ein sphärischer Kreisel besitzt drei gleiche Hauptträgheitsmomente:

$$J_x = J_y = J_z \xrightarrow{\text{stets}} \vec{L} \parallel \vec{\omega}.$$

Der Trägheitstensor bildet kein Trägheitsellipsoid sondern eine **Trägheitskugel**.

- **symmetrischer Kreisel** (z. B. alle rotationssymmetrischen homogenen Körper)

Ein symmetrischer Kreisel besitzt zwei gleiche Hauptträgheitsmomente:

$$z\text{-Achse sei Rotationsachse} \begin{cases} J_z < J_x = J_y \Rightarrow \text{prolater (gestreckter) Kreisel,} \\ J_z > J_x = J_y \Rightarrow \text{oblater (abgeplatteter) Kreisel.} \end{cases}$$

Der Trägheitstensor bildet, abhängig von der Richtung der Rotationsachse, ein **Trägheitsellipsoid**. Längs der Rotationsachse ist das Trägheitsellipsoid bei prolaten Kreiseln gestreckt und bei oblaten Kreiseln gestaucht.

Diejenige Hauptträgheitsachse beim symmetrischen Kreisel, die sich von den beiden anderen unterscheidet, heißt **Figurenachse**. Im speziellen Fall homogener, starrer, rotationssymmetrischer Körper ist die geometrische Symmetrieachse gleich der Figurenachse.

⁵„In allen zugänglichen Richtungen“ bedeutet eine Einschränkung der Rotationsfreiheit auf einen Raumwinkelbereich, welcher dem Kreisel aus technischen Gründen möglich ist.

⁶Üblicherweise sagt man „kräftefrei“, obwohl es in diesem Zusammenhang korrekt **drehmomentfrei** heißen müsste.

- **asymmetrischer Kreisel** (z. B. homogener Quader mit drei ungleichen Seiten)
Beim asymmetrischen Kreisel sind alle drei Hauptträgheitsmomente voneinander verschieden:

$$J_x \neq J_y \neq J_z \neq J_x .$$

Wegen der Drehimpulsgleichung

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (J_x \omega_x, J_y \omega_y, J_z \omega_z) \quad (24)$$

mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ zeigen $\vec{\omega}$ und \vec{L} bei einem asymmetrischen Kreisel allgemein nicht in die gleiche Richtung.

- Wenn ein Körper nur um eine seiner Hauptträgheitsachsen rotiert, ist die Winkelgeschwindigkeitskomponente bezüglich dieser Rotationsachse von Null verschieden, während die anderen beiden Winkelgeschwindigkeitskomponenten verschwinden. In diesem Fall gilt wegen (24)

$$\text{Hauptträgheitsachse} \equiv \text{Rotationsachse} \xrightarrow{\text{stets}} \vec{L} \parallel \vec{\omega} .$$

Kurz: Bei Rotation um eine Hauptträgheitsachse verlaufen Drehimpuls \vec{L} und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ immer parallel zueinander.

9.3 Der kräftefreie Kreisel – Nutation

Der Drehimpuls \vec{L} des **kräftefreien Kreisels** ist in Betrag und Richtung/Orientierung **konstant**.

Ein kräftefreier Kreisel befindet sich in jeder Lage, also auch in Schräglage, im Gleichgewicht. Dies ist der Fall, wenn der Unterstützungspunkt des Kreisels sein Schwerpunkt ist.

Wir betrachten im Laborsystem (Inertialsystem) S einen symmetrischen Kreisel mit dem Trägheitsmoment J_F bezüglich der Figurenachse, z. B. eine um ihre Figurenachse rotierende homogene Kreisscheibe (s. Abb. 9). Mit dem Index F für Figurenachse versehen wir physikalischen Größen, welche sich auf die Figurenachse beziehen.

9.3.1 Schlafender Kreisel

Rotiert ein Kreisel ausschließlich um eine seiner Hauptachsen, nehmen wir an es sei die Figurenachse eines symmetrischen Kreisels, so fällt sein Drehvektor $\vec{\omega}_0$ mit seinem Eigendrehimpulsvektor \vec{L}_0 zusammen (s. Abb. 9) und \vec{L}_0 ist der Gesamtdrehimpuls.

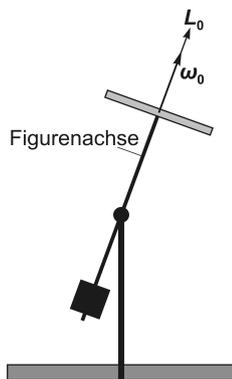


Abb. 9 Kräftefreier Kreisel als schlafender Kreisel vor dem Momentenstoß.

Weil in diesem Fall die Drehachse $\vec{\omega}_0$ im Laborsystem S ruht, wird ein derartiger Kreisel schlafender Kreisel genannt. Mit dem zur Figurenachse gehörenden Hauptträgheitsmoment J_F bedeutet das

$$\vec{L}_0 = J_F \vec{\omega}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_0 \parallel \vec{\omega}_0 .$$

Wir indizieren den Drehvektor und den Drehimpulsvektor des schlafenden Kreisels mit einer Null, um diesen stationären Zustand des (schlafenden) Kreisels als Anfangszustand vor der Einwirkung des Momentenstoßes zum Zeitpunkt t_0 deutlich zu machen.

9.3.2 Momentenstoß gegen einen schlafenden Kreisel

Siehe auch: David Himmel, Staatsexamensarbeit, Theorie und Experimente zum mechanischen Kreisel als Grundlage eines Versuchs im Anfängerpraktikum, Köln 1998, Abschnitt 3.8 Stoß auf die Figurenachse des Kreisels, Seite 31,

http://sahnehaube.de/01_deutsch/docs/Himmel_Staatsexamensarbeit.pdf

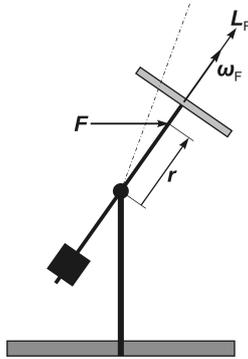


Abb. 10 Durch einen Momentenstoß infolge des „kurzzeitigen“ Einwirkens der Kraft \vec{F} gegen die Figurenachse wird diese ausgelenkt bzw. gekippt. Die gestrichelte Linie zeigt die ursprüngliche Lage der Figurenachse vor dem Stoß.

Der Unterstützungspunkt des Kreisels soll im Ursprung des körperfesten Koordinatensystems K des Kreisels liegen und die Ursprünge des körperfesten Koordinatensystems K und des (raumfesten) Laborsystems S sollen stets zusammenfallen. Während eines „kurzen“ Zeitintervalls $\Delta t = t - t_0$ für $t > t_0$ stoßen wir mit der Kraft $\vec{F}(t)$ im körperfesten Punkt \vec{r} gegen die Figurenachse. Diese Kraft übt das Drehmoment

$$\vec{M}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t)$$

auf den Kreisel aus und bewirkt, ganz analog zum Kraftstoß⁷, im Zeitraum Δt den **Momentenstoß**⁸

$$\int_{t_0}^t \vec{M}(t) dt = \Delta \vec{L}.$$

Durch diesen „kurzzeitigen“ Momentenstoß $\Delta \vec{L}$ wird die Figurenachse des Kreisels um den Winkel θ gekippt. Dabei werden der zusätzliche Drehimpuls $\Delta \vec{L}$ und Energie übertragen, weil die auslenkende Kraft $\vec{F}(t)$ eine Komponente besitzt, die längs der Auslenkung des Kreiselschwerpunkts wirkt. Wie dieser zusätzliche Drehimpuls und die übertragene Energie in Erscheinung treten, werden wir weiter unten diskutieren, denn trotz des Momentenstoßes mit resultierender Kippung der Figurenachse kann sich der Betrag $|\vec{\omega}_0| = \omega_0$ der Winkelgeschwindigkeit der Eigenrotation des Kreisels *nicht* ändern. Die Kraft \vec{F} im Momentenstoß wirkt nämlich auf die Figurenachse und somit auf den Kreiselschwerpunkt, aber nicht auf einen Punkt außerhalb der Figurenachse. Der Momentenstoß bewirkt am schlafenden Kreisel folgendes: (s. Abb. 10 u. Abb. 11)

⁷Der Kraftstoß $\vec{F}(t) dt = d\vec{p}$ für translatorische Massenbewegungen dürfte eher bekannt sein als der dazu analoge Momentenstoß für rotatorische Massenbewegungen.

⁸Der Momentenstoß wird auch Drehstoß genannt entsprechend der Analogie

Kraft \rightarrow Kraftstoß \implies Drehmoment \rightarrow Drehstoß oder Momentenstoß.

- Kippung der Figurenachse um den Winkel 2θ am Ende des Momentenstoßes zum Zeitpunkt t . Dabei gilt

$$\omega_0 = \omega_F = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\vec{L}_0| = |\vec{L}_F| = \text{const} , \\ E_{\text{rot},0} = E_{\text{rot},F} = \text{const} . \end{cases}$$

- Obwohl die Beträge von $\vec{\omega}_0$ und \vec{L}_0 erhalten bleiben, ändert sich während der Kippung der Figurenachse deren Richtung:

$$\vec{\omega}_F \nparallel \vec{\omega}_0 \quad \wedge \quad \vec{L}_F \nparallel \vec{L}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_F \parallel \vec{L}_F .$$

- Durch die Übertragung des zusätzlichen Drehimpulses $\Delta\vec{L}$ resultiert ein neuer Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{L}_0 + \Delta\vec{L} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \nparallel \vec{\omega}_0 \text{ bzw. } \vec{L} \nparallel \vec{L}_0 \quad \wedge \quad \vec{L} \nparallel \vec{L}_F .$$

9.3.3 Nutrierender kräftefreier Kreisel

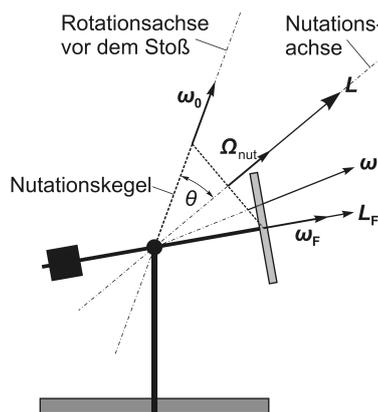


Abb. 11 Nach dem Momentenstoß – nutrierender kräftefreier Kreisel. Der Kreisel befindet sich mit einem Winkel von 2θ in maximaler Auslenkung gegenüber der Rotationsachse vor dem Momentenstoß.

Nach erfolgtem Momentenstoß wirkt auf den Kreisel kein Drehmoment mehr. Somit handelt sich zwar wieder um einen kräftefreien Kreisel, aber nicht mehr um einen schlafenden Kreisel, denn der Kreisel nutiert⁹, d. h. der Kreisel taumelt um eine im Laborsystem S feste Drehachse. Diese Drehachse besitzt die gleiche Richtung wie der neue Drehimpulsvektor $\vec{L} = \vec{L}_0 + \Delta\vec{L}$ und verläuft durch den unveränderten Unterstützungspunkt. Wegen der Erhaltungssätze gilt bezüglich S im reibungsfreien Idealfall

$$\vec{L} = \text{const (in Richtung und Betrag)} \quad \wedge \quad |\vec{L}_F| = \text{const}$$

und

$$E_{\text{gesamt}} = \text{const} \quad \wedge \quad E_{\text{rot},F} = \text{const} .$$

Einerseits kann man daraus schlussfolgern, dass der zusätzliche Drehimpuls $\Delta\vec{L}$ gleich dem **Bahndrehimpuls** des in seinem Schwerpunkt vereinigten Kreisels sein muss und dass der Schwerpunkt eine gleichförmige Kreisbewegung, die **Nutation**, um die oben bereits beschriebene in S ortsfeste Drehachse, die **Nutationsachse**, ausführen muss.

⁹Nutieren von nutare (lat.) nicken, wanken, taumeln. Nutation von nutatio (lat.) das Schwanken.

Anmerkungen zur Abbildung 3.14 Stoß auf die Figurenachse (Momentaufnahme) eines Kreisels mit Schwerpunkt im Fixpunkt. auf Seite 31 in der Staatsexamensarbeit von David Himmel:

- Es wird ein reibungs- und kräftefrei nutierender Kreisel betrachtet.
- Durch den Momentenstoß wurde die Figurenachse des schlafenden Kreisels um einen Winkel von insgesamt 2θ , dem maximalen Kippwinkel, ausgelenkt und dabei der Drehimpuls $\Delta\vec{L} = \vec{L}_x$ sowie folglich auch Energie auf den Kreisel übertragen.
- Der Betrag $|\vec{L}_z| = L_z = L_F$ des Eigendrehimpulses $\vec{L}_z = \vec{L}_F$ und die daraus resultierende Rotationsenergie des Kreisels bleiben konstant (erhalten):

$$L_z = L_F = \text{const} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_F \omega_F^2 = L_F \omega_F = \text{const} .$$

$J_z = J_F$ ist das Massenträgheitsmoment bezüglich der z - bzw. Figurenachse.

- Die Figurenachse, die durch den Schwerpunkt verläuft und den Mantel des Nutationskegels beschreibt, kehrt bei jedem Nutationsumlauf zu ihrer Anfangsstellung, die sie beim schlafenden Kreisel vor dem Stoß hatte, zurück. Mit anderen Worten, die Figurenachse nutiert zwischen ihrer Anfangsstellung und der Stellung bei maximaler Auslenkung um den Winkel 2θ (gegenüber der Anfangsstellung) hin und her (s. auch Abb. 11).
-

Andererseits kann man daraus schlussfolgern, dass die Energiedifferenz

$$E_{\text{gesamt}} - E_{\text{rot,F}} = E_{\text{nut}}$$

die in der gleichförmigen **Kreisbahnbewegung** (Nutation) des Kreisels steckende **Bewegungsenergie** sein muss und dass diese nur durch den Momentenstoß auf den Kreisel übertragen worden sein kann.

Wir hatten schon erwähnt, dass der Winkelgeschwindigkeits- und der zugehörige Drehimpulsvektor wegen $\vec{L} = \underline{\underline{J}} \vec{\omega}$ allgemein nicht parallel sind. Anders gesagt, nicht zu jedem Drehimpulsvektor existiert ein paralleler „Drehvektor“. Bei der Nutation resultiert nämlich auf mathematischem Wege (durch Vektoraddition) eine **momentane Drehachse** $\vec{\omega}$, definiert durch

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}_{\text{nut}} + \vec{\omega}_F \quad \text{mit} \quad \vec{\Omega}_{\text{nut}} \nparallel \vec{\omega}_F \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} \nparallel \vec{\Omega}_{\text{nut}} \wedge \vec{\omega} \nparallel \vec{\omega}_F ,$$

- die nicht parallel ist zum konstanten Drehimpulsvektor \vec{L} ,
- die genau wie die Figurenachse nutiert und
- die weder am nutierenden Kreisel noch im Laborsystem unmittelbar ersichtlich ist. Es gibt aber Tricks, um die momentane Drehachse sichtbar zu machen.

Merke! Für den nutierenden Kreisel gilt:

1. Die Nutation erfolgt um die Nutationsachse, definiert durch die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}_{\text{nut}}$ und auch durch den im Laborsystem konstanten Drehimpulsvektor \vec{L} . Der Öffnungswinkel θ liegt dabei zwischen der Nutationsachse $\vec{\Omega}_{\text{nut}}$ und der Figurenachse $\vec{\omega}_F$.
2. Die Figurenachse des Kreisels beschreibt bei der Nutation den Mantel des Nutationskegels, der sich von der ursprünglichen Stellung der Figurenachse, definiert durch $\vec{\omega}_0$ vor dem Momentenstoß, bis zur maximalen Kippstellung der Figurenachse am Ende des Momentenstoßes erstreckt.

3. Der Drehimpuls \vec{L} kann nicht mit einer Hauptträgheitsachse zusammenfallen.
4. Der im Laborsystem ortsfeste und zeitlich konstante Drehimpulsvektor \vec{L} , die momentane Drehachse (definiert durch $\vec{\omega}$) und die Figurenachse (definiert durch $\vec{\omega}_F$) liegen immer in einer Ebene.
5. Das bedeutet, dass die momentane Drehachse weder im körperfesten System des Kreisels noch im Laborsystem ortsfest ist. Sie rotiert (nutiert) gemeinsam mit der Figurenachse gleichförmig auf einer Kreisbahn um \vec{L} und hat dabei immer den gleichen Abstand zur Figurenachse.

Dies alles führt dazu, dass bei der Nutation die Beziehungen zwischen den Drehbewegungen der einzelnen Vektoren nicht sofort zu erkennen sind. Die momentane Drehachse beschreibt bei ihrer Nutation den Mantel des im Laborsystem S ortsfesten (**raumfesten**) **Rastpolkegels**. Die Figurenachse ist gleichzeitig auch die Drehachse des im Kreiselsystem K ortsfesten (**körperfesten**) **Gangpolkegels**. Und schließlich rollen Rast- und Gangpolkegel so aufeinander ab, dass \vec{L} , $\vec{\omega}$ und $\vec{\omega}_F$ stets in einer Ebene liegen. Weil man darüber in der Literatur und auch im Internet viele ausführliche und anschauliche Abhandlungen findet, brauchen wir diesen Abschnitt nicht weiter zu vertiefen und verweisen stattdessen an dieser Stelle noch einmal auf die zu Beginn des Kapitels Kreiselmechanik angeführte Staatsexamensarbeit von David Himmel.

9.3.4 Berechnung der Winkelgeschwindigkeit der Nutation

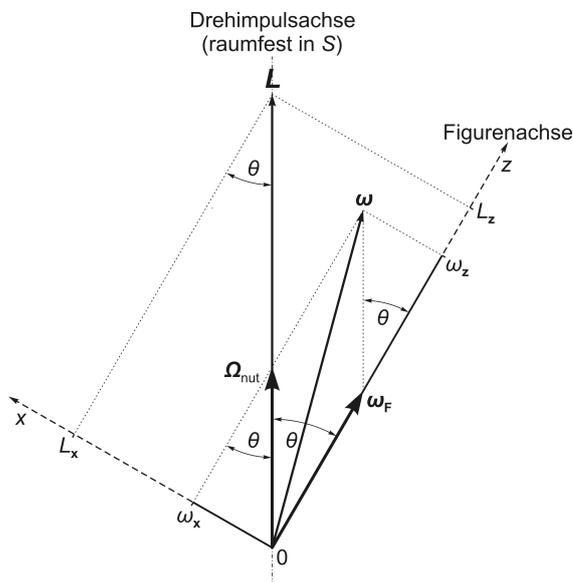


Abb. 12 Vektorbeziehungen beim prolaten Kreisel zum Zeitpunkt, wenn \vec{L} , z -Achse (Figurenachse) und x -Achse in einer Ebene liegen und folglich die y -Achse senkrecht auf dieser Ebene steht. Auf die Darstellung der y -Achse wurde verzichtet, nicht nur weil sie infolge der gewählten Perspektive senkrecht zur Papierebene verläuft, sondern weil sie für unsere Berechnung nicht relevant ist. Die Nutationsachse \vec{L} in S ist allgemein nicht senkrecht, auch wenn die Abbildung dies suggeriert.

Auf der Grundlage von Abbildung 12 werden wir im Folgenden den Betrag Ω_{nut} der Nutationswinkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}_{\text{nut}}$ berechnen anhand des (symmetrischen) prolaten Kreisels mit

$$J_x = J_y > J_z, \quad \omega_z > \Omega_{\text{nut}}.$$

Vereinfachend sollen dafür die Achsen des körperfesten Koordinatensystems $K := \{x, y, z\}$, in dem der Kreisel ruht, mit den Hauptträgheitsachsen des Kreisels

zusammenfallen (Hauptachsensystem). Wir beobachten die Nutation vom ruhenden Laborsystem (Inertialsystem) S aus, die Berechnung wird aber in den Koordinaten von K durchgeführt. Wir vereinfachen weiter indem wir für einen beliebigen Beobachtungszeitpunkt das Koordinatensystem K so legen, dass die y -Achse senkrecht auf der von \vec{L} (Nutationsachse) und der z -Achse (Figurenachse) aufgespannten Ebene steht. Dann gilt:

$$L_y = J_y \omega_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = (L_x, 0, L_z) = (J_x \omega_x, 0, J_z \omega_z) \quad \text{und} \\ \vec{\omega} = \vec{\Omega}_{\text{nut}} + \vec{\omega}_F .$$

Weiterhin entnehmen wir der Abbildung 12

$$\omega_x = \Omega_{\text{nut}} \sin \theta , \quad L_x = J_x \omega_x = L \sin \theta , \quad L_z = J_z \omega_z = L \cos \theta .$$

Daraus folgt für den Betrag von $\vec{\Omega}_{\text{nut}}$ und für den Betrag von $\vec{\omega}_F$

$$\Omega_{\text{nut}} = \frac{\omega_x}{\sin \theta} = \frac{L_x}{J_x \sin \theta} = \frac{L}{J_x} , \\ \omega_F = \omega_z - \Omega_{\text{nut}} \cos \theta = \left(\frac{L}{J_z} - \frac{L}{J_x} \right) \cos \theta . \quad (25)$$

Beim oblaten Kreisel mit

$$J_x = J_y < J_z , \quad \omega_z < \Omega_{\text{nut}} .$$

kommen wir zum gleichen Ergebnis (25). Abschließend und der Vollständigkeit halber geben wir mit der Abbildung 13 noch die Vektorbeziehungen für den oblaten Kreisel an.

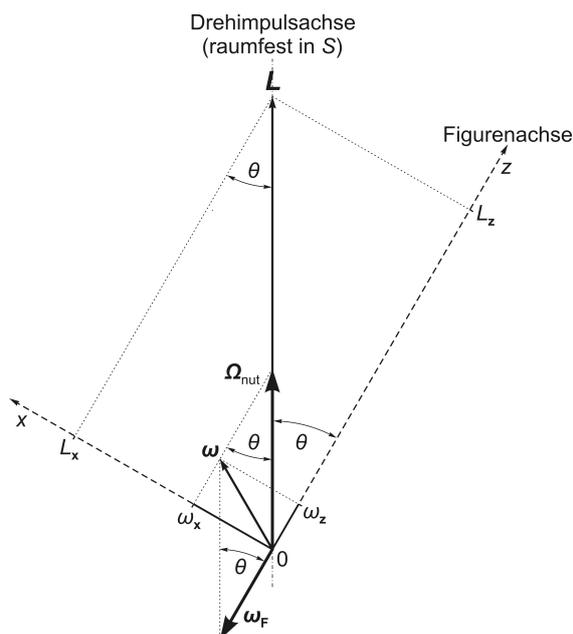


Abb. 13 Vektorbeziehungen beim oblaten Kreisel zum Zeitpunkt, wenn \vec{L} , z -Achse (Figurenachse) und x -Achse in einer Ebene liegen und folglich die y -Achse senkrecht auf dieser Ebene steht. Auf die Darstellung der y -Achse wurde verzichtet, nicht nur weil sie infolge der gewählten Perspektive senkrecht zur Papierebene verläuft, sondern weil sie für unsere Berechnung nicht relevant ist. Die Nutationsachse \vec{L} in S ist allgemein nicht senkrecht, auch wenn die Abbildung dies suggeriert.

Wegen der Erhaltungssätze nutiert auch ein **Kugelkreisel**. Formal gilt für den Kugelkreisel mit $J_x = J_y = J_z$ (Kugelsymmetrie) gemäß (25)

$$\omega_F = \omega_z - \Omega_{\text{nut}} \cos \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_z = \Omega_{\text{nut}} \cos \theta .$$

Dieses Ergebnis lässt sich wie folgt erklären:

Der Kugelkreisel besitzt trotz und wegen seiner speziellen Symmetrie keine ausgezeichnete Figurenachse. Durch den Momentenstoß wird aber die zum Momentenstoß gehörende und durch den Schwerpunkt verlaufende Drehachse ausgelenkt. Diese Drehachse können wir dann als z -Achse auszeichnen. Der (raumfeste) Drehimpuls \vec{L} und die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ fallen beim Kugelkreisel im Laborsystem S immer zusammen, sodass (vgl. Abb. 12 u. Abb. 13)

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}_{\text{nut}} .$$

Das bedeutet, dass die Winkelgeschwindigkeit um die z -Achse

$$\omega_z = \Omega_{\text{nut}} \cos \theta$$

beträgt, dass die Rotationsfrequenz $\hat{=} \vec{\omega}$ des Kugelkreisels in S gleich der Nutationsfrequenz $\hat{=} \vec{\Omega}_{\text{nut}}$ ist und dass die ausgezeichnete z -Achse auf einer Kreisbahn um den Drehimpuls \vec{L} (Nutationsachse) nutiert. Der Winkel θ liegt dabei zwischen der Nutationsachse (definiert durch die Vektoren \vec{L} , $\vec{\Omega}_{\text{nut}}$, $\vec{\omega}$) und der z -Achse.

9.4 Der schwere Kreisel – nutationsfreie Präzession – Beispiele

Der Drehimpuls \vec{L} des **schweren Kreisels** ist – zumindest in seiner Richtung – **nicht konstant**.

9.4.1 Fahrradkreisel

1. Für die Kreiselmechanik gelten selbstverständlich die Erhaltungssätze, insbesondere die Drehimpulserhaltung aber auch die Energieerhaltung. Zur Bestimmung der Orientierung von Drehimpuls und Drehmoment benutzen wir die Rechte-Hand- bzw. Daumenregel und zur Bestimmung von Richtung und Orientierung des Vektor- bzw. Kreuzprodukt die Drei-Finger-Regel. Weiterhin sei daran erinnert, dass die Größen im Vektorprodukt nur zyklisch vertauscht werden dürfen. Andernfalls würden sich das Vorzeichen und damit die Richtung des resultierenden Vektors ändern. Wir werden im Folgenden die für den alltäglichen Gebrauch wichtigsten Gesetzmäßigkeiten der Kreiselmechanik am Kreiselmodell erläutern. Das rollende Vorderrad eines Fahrrades soll uns dabei als Kreiselmodell dienen (s. Abb. 14). Unser Kreiselmodell befindet sich in einem Labor als raumfestem Bezugssystem, kurz Laborsystem. Wir beschreiben alle Vorgänge und physikalischen Größen bezüglich dieses Laborsystems bzw. aus der Sicht eines Beobachters im Laborsystem.

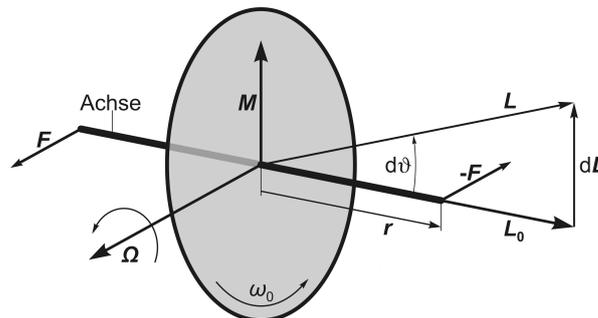


Abb. 14 Ein rotierendes Rad als Kreisel.

2. Grundlage für unsere Überlegungen ist die Tatsache, dass jeder Kreisel infolge seiner Rotation zunächst einen Drehimpuls

$$\vec{L}_0 = \underline{\underline{J}} \cdot \vec{\omega}_0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{L}_0 = J \cdot \vec{\omega}_0$$

besitzt. Hier ist $\underline{\underline{J}}$ der Trägheitstensor bzw. J das Trägheitsmoment und $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit des (rotierenden) Rades.

3. Jetzt greife ein in der Horizontalebene gelegenes Kräftepaar $-\vec{F}$, \vec{F} an der Achse des Rades an, $-\vec{F}$ im Punkt \vec{r} und \vec{F} im Punkt $-\vec{r}$. Das Rad befindet sich also mittig zwischen den Angriffspunkten des Kräftepaares. Das vom Kräftepaar hervorgerufene und auf das Rad wirkende Drehmoment ist folglich

$$\vec{M} = \vec{r} \times (-\vec{F}) + (-\vec{r}) \times \vec{F} = -2 \cdot \vec{r} \times \vec{F}.$$

Wie man sieht, hat unser Rad als Kreiselmodell zwei Unterstützungspunkte, die Befestigungspunkte der Achse in der Vordergabel des Fahrrads. Demzufolge besitzt das Rad zwei „Hebelarme“ gemäß \vec{r} und $-\vec{r}$ und die über sie wirkenden Drehmomente addieren sich zum Gesamtdrehmoment \vec{M} .

4. Man erwartet, dass das Kräftepaar eine Drehung des Rades um den Drehmomentvektor \vec{M} bewirkt, wobei diese Drehung gleichzeitig einem Drehimpuls $d\vec{L}$ entspricht, der die gleiche Richtung und die gleiche Orientierung besitzt wie das zugrundeliegende Drehmoment \vec{M} . Das ist *allgemein* in der Praxis teilweise auch so – aber nur teilweise. Das Rad dreht sich nur ein wenig in der Ebene des Kräftepaars, um dann sofort senkrecht dazu in Richtung des Vektors $d\vec{L}$ auszuweichen und nach einer Überlagerungsphase aus **Präzession**¹⁰ und reibungsbedingt abklingender Nutation in den stationären Zustand der nutationsfreien (reinen) Präzession überzugehen. Die Präzession ist eine Rotationsbewegung des Rades um den Unterstützungspunkt auf der Achse, wird beschrieben durch den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\Omega}$ und hält so lange an, wie das Drehmoment auf das Rad wirkt.¹¹ Die im Folgenden entwickelten mathematischen Zusammenhänge beschreiben genau diesen stationären Zustand der nutationsfreien Präzession aus der Sicht des Laborsystems.
5. Das rechtwinklige Ausweichen des Rades um und in Richtung $d\vec{L}$ bewirkt die zeitliche Änderung des Rad-Drehimpulses \vec{L}_0 gemäß

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} ,$$

so lange \vec{M} auf das Rad wirkt.

6. Durch die Impulsänderung $d\vec{L}$ kommt es zu einer **Richtungsänderung** des Drehimpulses und damit der Drehachse des Rades um den Winkel $d\vartheta$. Das Rad besitzt dann den neuen Drehimpuls \vec{L} und die neue Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.
7. Weil das Kräftepaar stets senkrecht zur Umlaufgeschwindigkeit des Rades wirkt, verrichtet es keine Arbeit am Rad. Das bedeutet, dass auf das Rad keine Energie und insbesondere kein Drehimpuls übertragen wird und damit der Betrag des Drehimpulses und der Betrag der Winkelgeschwindigkeit erhalten bleibt:

$$|\vec{L}| = |\vec{L}_0| , \quad |\vec{\omega}| = |\vec{\omega}_0| .$$

8. Die stetige Richtungsänderung von \vec{L} erfolgt mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$, der Richtung sich ergibt aus

$$\vec{v} \uparrow d\vec{L} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r} .$$

¹⁰Präzession von praecessio (lat.) das Vorangehen, praecedere (lat.) vorangehen. Deshalb verwenden wir das Verb präzedieren und nicht sein Synonym präzessieren.

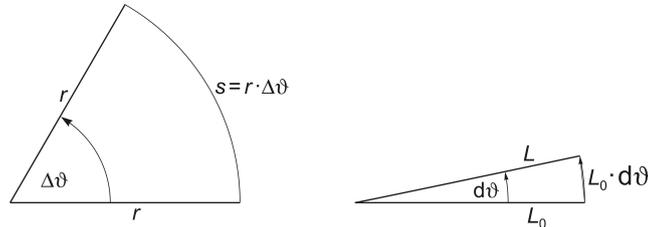
¹¹In aller Ausführlichkeit beschreibt Richard Feynman diesen Vorgang in Feynman, Vorlesungen über Physik, Band I: Mechanik, Strahlung, Wärme, Von Richard P. Feynman, Robert B. Leighton und Matthew Sands, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, 2001, Seite 287 bis Seite 291.

9. Der Betrag von $d\vec{L}$ ist

$$dL = L_0 \cdot d\vartheta ,$$

der Betrag von $\vec{\Omega}$ ist

$$\Omega = \frac{d\vartheta}{dt} .$$



Und die zeitliche Änderung des Drehimpulses \vec{L} ist gleich dem Drehmoment

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} .$$

Für die Beträge im Kreisellmodell erhält man damit

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{L_0 \cdot d\vartheta}{dt} = L_0 \cdot \Omega = \Omega \cdot L .$$

Betrachten wir diese Zusammenhänge vektoriell, so erhalten wir

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}} \quad (26)$$

und damit die Richtungsbeziehungen

$$\boxed{\vec{M} \uparrow d\vec{L} , \quad d\vec{L} \perp \vec{L} \text{ für } |\vec{L}| = \text{const}} .$$

Die Änderung $d\vec{L}$ des Drehimpulses des Rades und allgemein eines Kreisels erfolgt in Richtung des Drehmoments \vec{M} und bewirkt somit die Präzession.

10. In der Praxis bedeutet das:

Wenn wir beim Radfahren das Vorderrad nach links lenken, neigt sich dieses nach links, und beim Rechtslenken analog nach rechts.

11. In unserem Beispiel des Vorderrades eines Fahrrads ist $\vec{\Omega} \perp \vec{L}$. Das ist allgemein nicht so, wie wir gleich in unserem nächsten Beispiel, dem Spielkreisel, sehen werden. Dort wird dann deutlich werden, dass es sinnvoll war, hier bereits den allgemeinen Fall – das Vektorprodukt $\vec{\Omega} \times \vec{L}$ – einzuführen.

12. **Achtung!**

Wir haben bei der Herleitung der Präzession vereinfachend angenommen, dass der Drehimpulsvektor \vec{L} des Kreisels trotz Präzession in der Figurenachse liegen bleibt. Diese Vorgehensweise ist zwar üblich aber leider nur eine Näherung. Wir zeigen deshalb die exakte Rechnung im Abschnitt 9.4.3 .

9.4.2 Spielkreisel

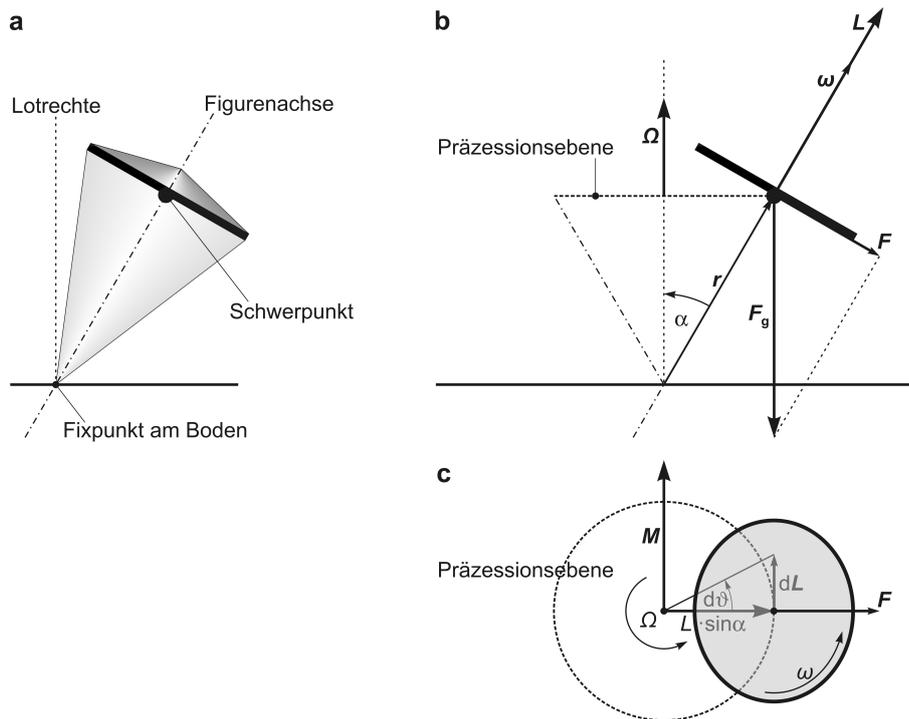


Abb. 15 Spielkreisel: **a)** Seitenansicht, **b)** schematische Seitenansicht, **c)** schematische Draufsicht.

Der Spielkreisel ist ein symmetrischer Kreisel. Er habe die Masse m und bezüglich seiner Figurenachse das Trägheitsmoment J . Der Schwerpunkt des Spielkreisels liegt auf seiner Figurenachse aber nicht im Fixpunkt bzw. Unterstützungspunkt. Durch die auf den Schwerpunkt des Spielkreisels wirkende Schwerkraftkomponente

$$\vec{F} \Rightarrow |\vec{F}| = F = F_g \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

entsteht das Drehmoment

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F}_g = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \Rightarrow \\ |\vec{M}| &= M = r \cdot (m \cdot g \cdot \sin \alpha) = \frac{dL}{dt}. \end{aligned} \quad (27)$$

Solange die Schwerkraftkomponente \vec{F} wirkt, resultiert durch $d\vec{L}$ eine Richtungsänderung (keine Betragsänderung!) von \vec{L} , sodass die Spitze von \vec{L} und damit auch der Schwerpunkt auf einer Kreisbahn umlaufen, d. h. mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ präzedieren. Dabei gilt für kleine Winkeländerungen $d\vartheta$ (s. Abb. 15c)

$$dL = (L \cdot \sin \alpha) \cdot d\vartheta = (J\omega \cdot \sin \alpha) \cdot d\vartheta$$

und aus (27) resultiert

$$dL = r \cdot m g \cdot \sin \alpha \cdot dt. \quad (28)$$

Durch Gleichsetzen

$$dL = J \cdot \omega \cdot \sin \alpha \cdot d\vartheta = r \cdot m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot dt ,$$

Herauskürzen von $\sin \alpha$

$$J \cdot \omega \cdot d\vartheta = r \cdot m \cdot g \cdot dt$$

und Umstellen nach $d\vartheta/dt$ erhalten wir schließlich den Betrag Ω der Präzessions-Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ des Kinderkreisels:

$$\boxed{\frac{d\vartheta}{dt} = \Omega = \frac{r \cdot m \cdot g}{J \cdot \omega}} . \quad (29)$$

Das Modell des Spielkreisels eignet sich gut für eine Ergänzung zum vierten Punkt des Abschnitts 9.4.1. Es stellt sich nämlich die Frage:

Woher kommt die Bewegungsenergie für den Kreisumlauf des Kreiselschwerpunkts bei der Präzession (in der Präzessionsebene), wenn die Beträge $|\vec{\omega}|$ der Winkelgeschwindigkeit und $|\vec{L}|$ des **Eigendrehimpulses** des Kreisels und damit auch die bezüglich der Rotation um seine Figurenachse im Kreisel steckende Rotationsenergie konstant sind?

Diese Energie resultiert aus der anfänglichen Wirkung des Drehmoments \vec{M}_g auf den Kreisel. Setzen wir nämlich z. B. einen rotierenden sog. Brummkreisel¹² schräg auf den Boden und lassen ihn los, so wird er nicht umfallen, weil er ja sofort anfängt zu präzedieren. Aber er wird ein wenig abkippen, also eine kleine Strecke „fallen“, sodass er, wenn sich der Zustand einer stationären Präzession eingestellt hat, schräger steht als zum Zeitpunkt des Loslassens. Entsprechend der „Fallstrecke“ im Schwerfeld der Erde nimmt die potentielle Energie des Kreisels ab und wird in die für die Präzession notwendige Bewegungsenergie des Kreiselschwerpunkts (auf seiner Kreisbahn in der Präzessionsebene) überführt.

Etwas konkreter ausgedrückt: Solange wir den in leichter Schrägstellung rotierenden Brummkreisel am oberen Achsenende festhalten, kompensieren wir das andauernd wirkende gravitationsbedingte Drehmoment \vec{M}_g und der Brummkreisel ist ein kräftefreier Kreisel. Ab dem Zeitpunkt des Loslassens bewirkt dann aber das Drehmoment \vec{M}_g einen Momentenstoß – genau wie im Zusammenhang mit der Entstehung der Nutation im Abschnitt 9.3 beschrieben. Durch diesen Momentenstoß werden der für die Präzession erforderliche **Bahndrehimpuls** und damit natürlich auch diejenige Bewegungsenergie übertragen, die am Ende in der Präzession¹³ der im Kreiselschwerpunkt vereinigten Kreiselmasse steckt. Dieser Momentenstoß bewirkt, wie bei der Entstehung der Nutation, eine Auslenkung der Figurenachse und eine Übertragung von Impuls und Energie. Die Übertragung von Impuls und Energie hält aber nur solange an, bis sich ein Gleichgewicht zwischen dem andauernd wirkenden Drehmoment \vec{M}_g und dem Gegendrehmoment des Kreisels eingestellt hat (siehe Abschnitt 9.5), auch

¹²Der etwas ältere Leser erinnert sich vielleicht an diesen bunten Blechkreisel mit Löchern, der durch wiederholtes Drücken auf die spiralförmige Spindel in Drehung versetzt werden konnte und dabei aus seinen Löchern brumnte.

¹³Die stationäre Präzession kann man als gleichförmige Kreisbewegung des Kreiselschwerpunkts in der Präzessionsebene auffassen.

wenn das Drehmoment \vec{M}_g danach immer noch am Kreisel angreift, im Gegensatz zum nutierenden kräftefreien Kreisel, bei dem nach dem Stoß kein Drehmoment mehr am Kreisel angreift.

Nachdem sich schließlich eine stationäre Präzession eingestellt hat, werden also kein Impuls und keine Energie mehr übertragen. Das liegt daran, dass nur Kraftkomponenten, die in Bewegungsrichtung von Massen wirken, auf diese Impuls übertragen und Arbeit verrichten können. Und das ist, nachdem sich eine stationäre Präzession eingestellt hat, nicht mehr der Fall.

Ein im Idealfall reibungsfrei stationär nutierender und/oder präzedierender Kreisel verrichtet keine Arbeit, weil alle dabei auftretenden Kräfte im körperfesten System senkrecht zur Bewegungsrichtung der Massenelemente und im Laborsystem senkrecht zur Bewegungsrichtung des Schwerpunkts wirken.

Anmerkung!

Man könnte das „Fallen“ des Kreisels sowie die daraus resultierende Einschwingphase und Nutation umgehen, wenn es gelänge, die Präzession durch entsprechendes An-schieben des Kreisels so zu starten, dass der Kreisel von Anfang an zur gewählten Stellung die richtige Präzessionswinkelgeschwindigkeit besitzt. Mit etwas Glück kann das gelingen.

9.4.3 Nutationsfreie Präzession exakt

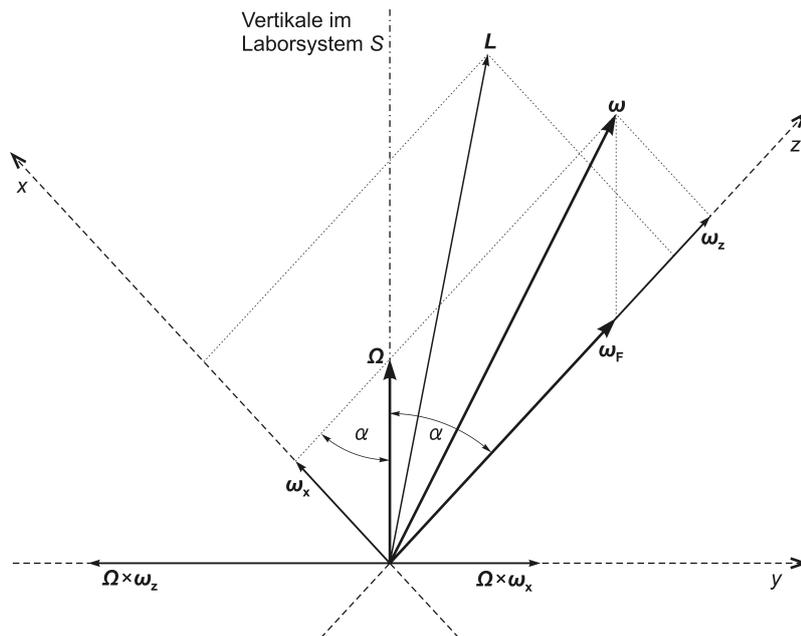


Abb. 16 Das körperfeste Koordinatensystem K eines nutationsfrei präzedierenden symmetrischen Kreisels mit den relevanten Vektoren (bezüglich K). Die Abbildung erfasst die Vektorbeziehungen zu dem Zeitpunkt, wenn die x -Achse infolge der Rotation von K um die z -Achse die von $\vec{\Omega}$ und $\vec{\omega}_z$ aufgespannte Ebene durchläuft und die y -Achse dann senkrecht auf dieser Ebene steht. Die Vektoren $\vec{\Omega}$, \vec{L} , $\vec{\omega}$ und $\vec{\omega}_z$ bzw. $\vec{\omega}_F$ rotieren gemeinsam in einer Ebene liegend mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ um die Vertikale (Rotationsachse im Laborsystem S). $\vec{\Omega}$ und die y -Achse liegen in der Papierebene – das ist wichtig für das Verständnis der Perspektive der Darstellung.

Wir betrachten den nutationsfrei präzedierenden symmetrischen Kreisel vom Laborsystem S aus, rechnen aber in den Koordinaten des körperfesten Koordinatensystems $K := \{x, y, z\}$, das sich mit dem Kreisel mitbewegt. Zur Vereinfachung sollen die Koordinatenachsen von K mit den Hauptachsen des Kreisels zusammenfallen und die z -Achse sei gleichzeitig die Figurenachsen, um die der Kreisel und damit auch K mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_F$ rotieren.

Der Gesamtdrehimpuls \vec{L} des nutationsfrei präzedierenden Kreisels setzt sich zusammen aus seinem Drehimpuls $V L_F$ (Rotation um die Figurenachsen) und aus dem Drehimpuls \vec{L}_Ω (Rotation um die Präzessionsachse definiert durch $\vec{\Omega}$):

$$\vec{L} = \vec{L}_F + \vec{L}_\Omega .$$

In gleicher Weise liefern die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_F$ (Rotation um die Figurenachsen) und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ (Rotation um die Präzessionsachse) die momentane Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_F + \vec{\Omega}$$

des Kreisels (s. Abb. 16). Der Vektor $\vec{\omega}$ wiederum lässt sich zerlegen in seine Vektorkomponenten $\vec{\omega}_x$, $\vec{\omega}_y$, $\vec{\omega}_z$ auf den Koordinatenachsen von K .

In der Abbildung 16 wurde berücksichtigt, dass wir für unsere Rechnung eine Rotationsstellung von K gewählt haben, bei der die Vektorkomponente $\vec{\omega}_y$ verschwindet,

sodass auch die y -Komponente des Drehimpulses \vec{L} gemäß

$$L_y = J_y \omega_y$$

verschwindet. Dann reduziert sich \vec{L} auf

$$\vec{L} = J_x \vec{\omega}_x + J_z \vec{\omega}_z .$$

Die Impulsänderung des Gesamtsystems ist damit

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = J_x \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_x + J_z \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_z .$$

Aus der Abbildung 16 entnehmen wir

$$|J_x \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_x| = J_x \Omega \omega_x \cos \alpha ,$$

$$|J_z \vec{\Omega} \times \vec{\omega}_z| = J_z \Omega \omega_z \sin \alpha .$$

Weiterhin entnehmen wir aus der Abbildung 16, dass der Vektor $d\vec{L}/dt$ wegen $d\vec{L}/dt \perp \vec{\Omega}$ in der Horizontalen liegt und deshalb den folgenden Betrag hat:

$$\frac{dL}{dt} = J_z \Omega \omega_z \sin \alpha - J_x \Omega \omega_x \cos \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow J_z \Omega \omega_z \sin \alpha > J_x \Omega \omega_x \cos \alpha .$$

Mit

$$\omega_x = \Omega \sin \alpha , \quad \omega_z = \omega_F + \Omega \cos \alpha$$

und unter Berücksichtigung von (28) erhalten wir daraus

$$\frac{dL}{dt} = r \cdot mg \cdot \sin \alpha = J_z \Omega (\omega_F + \Omega \cos \alpha) \sin \alpha - J_x \Omega \cdot \Omega \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow$$

$$mgr = M = J_z \omega_F \Omega + J_z \Omega^2 \cos \alpha - J_x \Omega^2 \cos \alpha ,$$

$$\boxed{M = J_z \omega_F \Omega \left(1 - \frac{(J_x - J_z) \Omega \cos \alpha}{J_z \omega_F} \right)} . \quad (30)$$

Bei schnell rotierendem Kreisel, d. h. bei $\omega_F \gg \Omega$, und bei horizontaler Figurenachse mit $\cos \alpha = 0$ geht (30) in die Näherung (29) über.

9.4.4 Drehimpulserhaltung beim Drehschemelversuch

In einem Labor befinde sich eine auf einem Drehschemel sitzende Person. Sie halte mit beiden Händen vor ihrem Körper einen Kreisel an dessen Achse fest. Die Beschreibung des Versuchs erfolge aus der Sicht des Laborsystems.

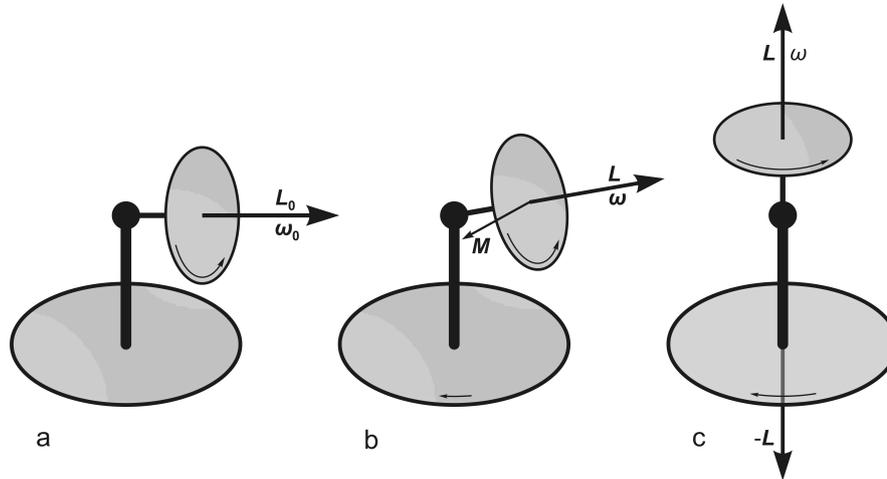


Abb. 17 Drehschemelversuch: a) vor dem Versuch, b) während des Versuchs, c) nach dem Versuch.

Vor dem Versuch (s. Abb. 17 a):

Der Drehschemel einschließlich der Person befinden sich in Ruhe. Die Kreiselachse verlaufe horizontal in Blickrichtung der Person. Der Kreisel drehe sich in Blickrichtung im Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_0$ und hat folglich bezüglich des Laborsystems einen Drehimpuls \vec{L}_0 und eine bestimmte Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = E_K$.

Während des Versuchs (s. Abb. 17 b):

Die Person kippe den Kreisel so, dass das körperferne Ende der Achse stets höher ist als das körpernahe und die Kreiselachse schließlich senkrecht verläuft. Das Kippen des Kreisels erzeugt dabei ein Drehmoment \vec{M} und dieses Drehmoment \vec{M} ist gleich der zeitlichen Drehimpulsänderung $d\vec{L}/dt$ (zeigt also in die gleiche Richtung wie \vec{M}), d. h. der Kreisel „will“ um die Senkrechte präzedieren. Wenn die Person jetzt auf einem feststehenden Schemel säße, könnte er das nicht, weil die Person die Kreiselachse festhielte und den Kreisel an seinem „Ausweichen“ nach rechts hindern würde. Das Bestreben des Kreisels zu präzedieren bewirkt also an der Person ein Drehmoment \vec{M}_Ω , dessen Vektor nach unten zeigt – entsprechend der Präzessionswinkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$. Da die Person aber auf einem Drehschemel sitzt, versetzt das Drehmoment \vec{M}_Ω sie tatsächlich in eine Rotation, deren Winkelgeschwindigkeitsvektor nach unten zeigt.

Nach dem Versuch (s. Abb. 17 c):

Die Kreiselachse verläuft senkrecht. Der Kreisel dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, die nach oben zeigt gemäß

$$\vec{\omega} \perp \vec{\omega}_0, \quad |\vec{\omega}| = |\vec{\omega}_0|.$$

Der Kreisel besitzt bezüglich des Laborsystems den Drehimpuls \vec{L} , der ebenfalls nach oben zeigt, also seine Richtung geändert hat, nicht aber seinen Betrag:

$$\vec{L} \perp \vec{L}_0, \quad |\vec{L}| = |\vec{L}_0|.$$

Person und Drehschemel drehen sich mit einer Winkelgeschwindigkeit, die der Präzessionswinkelgeschwindigkeit des Kreisels entspricht, in die entgegengesetzte Richtung. Folglich zeigt auch ihr Drehimpuls \vec{L}_{P+D} in die zu \vec{L} entgegengesetzte Richtung. Da jetzt nicht nur der Kegel sondern auch Person und Drehschemel rotieren, ist die Rotationsenergie

$$E_{\text{rot}} = E_K + E_{P+D} .$$

Auswertung Dieser Versuch zeigt, dass in einem abgeschlossenen System – hier im Laborsystem – jeder Drehimpuls einen (entgegengesetzt gerichteten aber) betragsgleichen Gegendrehimpuls besitzt und folglich die Vektorsumme aller Drehimpulse gleich Null und somit konstant ist, denn

$$|\vec{L}_0| = |\vec{L}| = |\vec{L}_{P+D}| , \quad \vec{L} = -\vec{L}_{P+D} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} + \vec{L}_{P+D} = \vec{0} .$$

Diese Aussage lässt sich mit einem Versuchsaufbau, der exakte Messbarkeit garantiert, z. B. mit zwei Kreisscheiben, leicht verifizieren.

Wenn die mit dem Drehschemel rotierende Person den Kegel auf umgekehrtem Wege in die Ausgangslage zurückführt, stellt sich wieder der Zustand wie „Vor dem Versuch“ ein. Und ändert man die Richtung der Kegelrotation, so ändert sich auch die Drehrichtung von Person und Drehschemel.

Es stellt sich die Frage, wo der vor dem Versuch in horizontaler Richtung vorhandene Drehimpuls während des Versuchs seinen horizontalen Gegendrehimpuls gefunden hat, denn nach dem Versuch war nichts mehr von einem horizontalen Drehimpuls zu sehen. Tatsächlich ist diese Frage quantitativ-exakt schwer zu beantworten. Versuchen wir es qualitativ:

Anfangs war im Labor von einem horizontalen Drehimpuls nichts zu sehen. Dann wurde vor dem Versuch in irgendeiner Weise ein horizontaler Drehimpuls auf den Kegel übertragen, vielleicht von der Person auf dem Drehschemel selbst. Während des Versuchs wurde dieser Drehimpuls über die Person und den Drehschemel zurückübertragen und war wieder nicht zu sehen. Eine ähnliche Argumentation gilt auch für die Energieerhaltung. Die Rotationsenergie ist vor dem Versuch E_K und nach dem Versuch $E_K + E_{P+D}$, also nach dem Versuch größer als vorher. Es ist die Arbeit der Muskeln, mit deren Hilfe sich die Person von der Kegelachse abdrückt, die in Form von Rotationsenergie auf die Person und den Drehschemel übertragen wird.

9.4.5 Der Flugzeugpropeller als Kreisel

Nehmen wir an, ein Flugzeug fliege mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus und der Propeller drehe sich mit ebenfalls konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ in Flugrichtung rechtsherum, also im Uhrzeigersinn. Dann hat der Propeller den in Betrag und Richtung konstanten Drehimpuls \vec{L}_0 . Der Propeller ist in diesem Fall ein kräftefreier Kreisel, denn der Flugzeugkörper als Kreiseldrehachse ist bei stabilem Geradeausflug durch den Auftrieb in seinem drehmomentneutralen Punkt unterstützt und in allen Richtungen um diesen Punkt frei rotierbar.

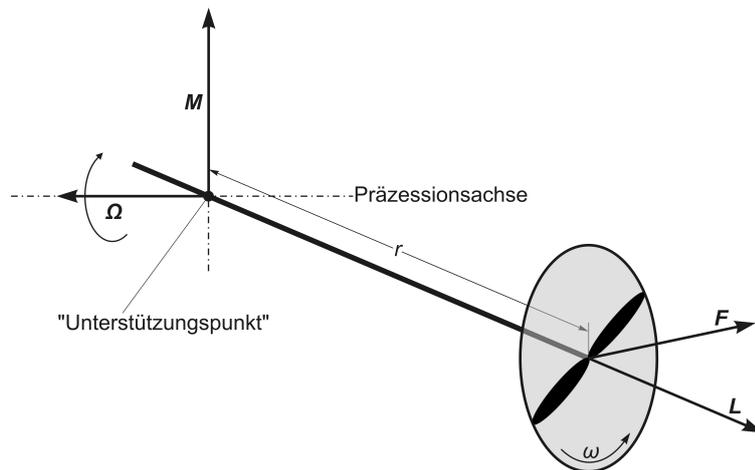


Abb. 18 Schematische Darstellung des Flugzeugpropellers als Kreisel in der **Linkskurve**. Funktionell verkörpert die verlängerte Rotationsachse des Propellers in dieser Abbildung den Flugzeugkörper.

Was passiert aber, wenn man die „Nase“ des Flugzeugs absenkt, also den Propeller nach vorn abkippt?

Bei diesem Problem handelt es sich prinzipiell um den Sachverhalt, den wir im Abschnitt 9.4.2 Spielkreisel diskutieren. Es wirkt dann nämlich auf den Propeller eine Kraft \vec{F} nach unten (wie beim Spielkreisel), die einem in Flugrichtung nach links gerichteten Drehmoment $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ entspricht. Der Propeller ist jetzt ein schwerer Kreisel, bei dem das Drehmoment $d\vec{L}/dt$ eine Richtungsänderung (keine Betragsänderung!) des Drehimpulses \vec{L}_0 nach links und damit eine Präzession $\vec{\Omega}$ bewirkt, sodass das Flugzeug nach links vom Kurs abweicht. Um diese Kursabweichung z. B. beim plötzlichen Einleiten des Sinkflugs zu verhindern, muss der Pilot in das rechte Seitenruder treten.

Völlig analog verhält es sich bei den anderen plötzlichen Richtungsänderungen:

Bei plötzlich eingeleitetem Steigflug kommt es zu einer Kursabweichung nach rechts, in der Rechtskurve zieht die „Nase“ nach unten und in der Linkskurve (s. Abb. 18) noch oben. Die Richtung der Kursabweichung kehrt sich natürlich um, wenn sich der Propeller in Flugrichtung linksherum dreht.

9.5 Die Kompensation des schwerkraftbedingten Kippmoments \vec{M}_g durch das Coriolis-Kippmoment \vec{M}_c am Fahrradkreisel

Coriolis-Kippmoment

1. Anfangssituation – Modell eines in seinem Schwerpunkt SP unterstützten freien Kreisels:

Der Fahrradkreisel, kurz das Rad, sei mittig auf einer Achse gelagert. Die Gesamtmasse von Rad und auch Achse sei im Radreifen homogen verteilt. Die horizontal gestellte Achse sei an beiden Enden unterstützt. Das Rad führe ein gleichförmige (kräftefreie) Rotation aus mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und dem Drehimpuls \vec{L}_0 .

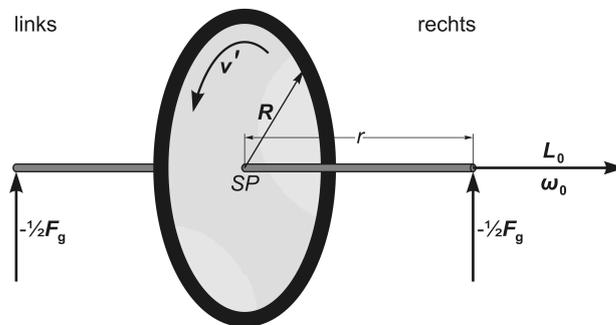


Abb. 19 Ein auf einer horizontalen Achse gleicher Schenkellänge gelagertes rotierendes Rad als Kreiselmmodell und als Modell zur Berechnung der Corioliskraft bzw. des Coriolis-Kippmoments.

2. Rotation um die durch den Schwerpunkt verlaufende vertikale Längsachse des Rades:

Es greife jetzt zusätzlich ein Kräftepaar $\{\vec{F}, -\vec{F}\}$ horizontal und rechtwinklig an den Achsenenden an. Dieses Kräftepaar entspricht dem Drehmoment \vec{M}_Q und bewirkt gleichzeitig eine Rotation um die Senkrechte mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$. Weil das Drehmoment \vec{M}_Q (bzw. das Kräftepaar) senkrecht auf $\vec{\omega}$ und \vec{L}_0 steht, kann es keine Rotationsenergie bezüglich $\vec{\omega}$ auf das Rad übertragen und damit auch keine Betragsänderung von \vec{L}_0 bewirken, wohl aber eine Richtungsänderung.

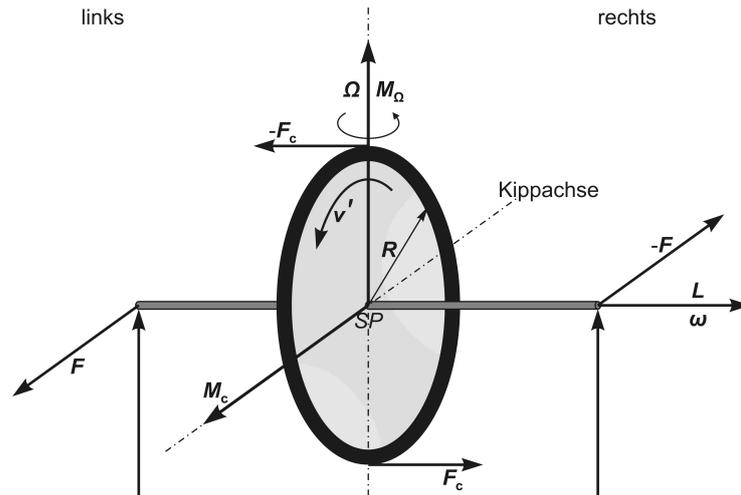


Abb. 20 Hervorrufen des Coriolis-Kippmoments durch Angriff eines Kräftepaares an den Achsenden in der Horizontalebene.

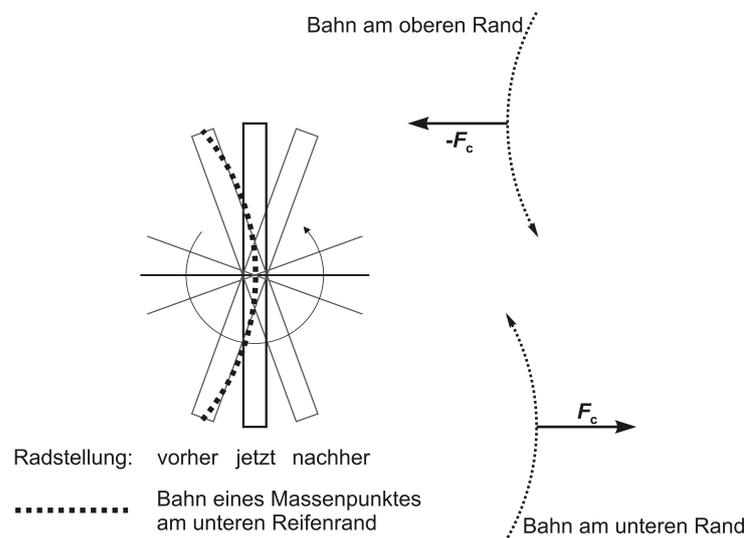


Abb. 21 Schematische Draufsicht auf das rotierende Rad zu drei unmittelbar aufeinander folgenden Zeitpunkten. Durch die Rotation des Rades um die vertikale Mittelachse ist die Bahn der Massenpunkte im Radreifen bezüglich des (ruhenden) Laborsystems gekrümmt.

3. Rotation bzw. Kippen des Rades um die durch den Schwerpunkt verlaufende horizontale Längsachse (Kippachse):

Die Geschwindigkeiten \vec{v}_i der Massenpunkte m_i haben auf Grund der Rotation um die Senkrechte die Corioliskräfte

$$\vec{F}_{ci} = 2m_i \cdot \vec{v}'_i \times \vec{\Omega}$$

zur Folge,¹⁴ die in ihrer Summe den Reifen des Rades oben nach links und unten nach rechts drücken. Auch hierbei handelt es sich um ein Kräftepaar

¹⁴**Achtung!** Die Corioliskraft entsteht hier in dem mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ rotierenden System, dem um seine vertikale Längsachse (Mittelsenkrechte) rotierenden Rad. Die Geschwindigkeit \vec{v}'_i ist die Geschwindigkeit der mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ im Radreifen umlaufenden Massenpunkte m_i und bezieht sich folglich auf das mit $\vec{\Omega}$ rotierende System und nicht auf das umgebende, ruhende Laborsystem.

mit resultierendem Drehmoment (Coriolis-Kippmoment) \vec{M}_c um die Kippachse des Rades (s. Abb. 20). Dieses Drehmoment \vec{M}_c ist Ausdruck dafür, dass das Rad (der Kreisel) einer Richtungsänderung des Drehimpulses \vec{L}_0 entziehen „will“ (Drehimpulserhaltungssatz).

4. (Siehe auch „Wer verhindert das Kippen?“¹⁵)

Um das Coriolis-Kippmoment \vec{M}_c zu berechnen, listen wir zunächst die erforderlichen physikalische Größen auf:

$ \vec{v}'_i = v = R \cdot \omega$	Umlaufgeschwindigkeit des Radreifens,
φ_i	Winkel zwischen $\vec{\omega}$ und der Strecke vom Radmittelpunkt zu einem bestimmten Massenpunkt m_i des Radreifens,
$a_{ci} = 2 \cdot v \cos \varphi_i \cdot \Omega$	Betrag der Coriolisbeschleunigung von m_i ,
$F_{ci} = m_i \cdot a_{ci}$ $= 2 m_i v \cos \varphi_i \Omega$	Betrag der Corioliskraft, die auf den Massenpunkt m_i wirkt,
R	Radius des Rades,
$m = \sum_i m_i$	Gesamtmasse des Rades,
$J = mR^2$	Trägheitsmoment des Rades,
$\sum_i \cos^2 \varphi_i = \overline{\cos^2 \varphi}$	bei homogener Verteilung der m_i im Radreifen,
$\overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{2}$	Mittelwert von $\cos^2 \varphi$.

Damit ist der Betrag des Coriolis-Kippmoments für einen Massenpunkt m_i

$$\begin{aligned} M_{ci} &= R \cos \varphi_i \cdot F_{ci} \\ &= R \cos \varphi_i \cdot 2 m_i v \cos \varphi_i \Omega \\ &= m_i R v \Omega \cdot 2 \cdot \cos^2 \varphi_i . \end{aligned}$$

Summieren wir über alle M_{ci} , so erhalten wir den Betrag des Coriolis-Kippmoments des Rades:

$$\begin{aligned} M_c &= \sum_i M_{ci} = \sum_i m_i R v \Omega \cdot 2 \cdot \cos^2 \varphi_i \\ &= m R \cdot v \cdot \Omega \cdot 2 \cdot \sum_i \cos^2 \varphi_i \\ &= m R \cdot v \cdot \Omega = m R \cdot R \omega \cdot \Omega \\ M_c &= m R^2 \cdot \omega \cdot \Omega , \end{aligned}$$

$$\boxed{M_c = J \cdot \omega \cdot \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \Omega = \frac{M_c}{J \cdot \omega}} .$$

¹⁵Gerthsen Physik, H. Vogel, Springer-Lehrbuch, Berlin, Heidelberg, 20. Auflage, 1999, Seite 1033.

Schwerkraftbedingtes Kippmoment

Zur Herleitung des schwerkraftbedingten Kippmoments am Fahrradkreisel können wir die Ergebnisse des Abschnitts 9.4.2 Spielkreisel verwenden unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Rotationsachse des Rades horizontal verläuft und wir demzufolge für den Winkel $\alpha = 90^\circ$ setzen müssen.

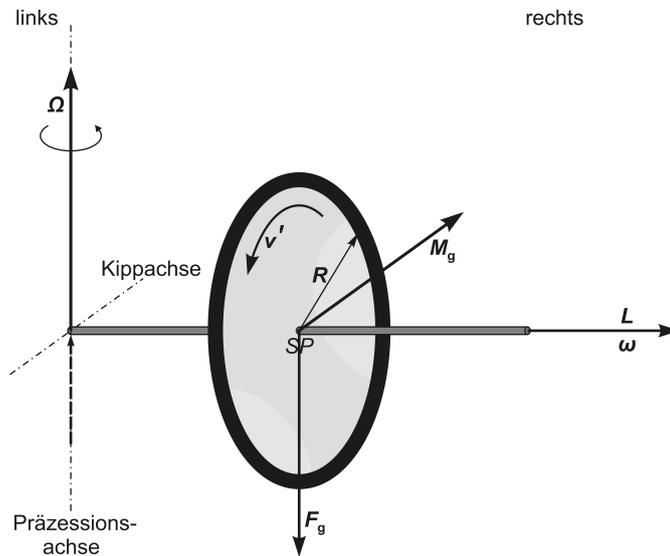


Abb. 22 Das rotierende Rad als Kreiselmodell ist hier nur am linken Achsenende unterstützt und präzediert in der Horizontalebene durch den Unterstützungspunkt. Man kann den Ursprung des Vektors \vec{M}_g auch in den Unterstützungspunkt legen.

Wenn in dem in Abbildung 20 dargestellten Kreiselmodell plötzlich die Unterstützung am rechten Achsenende entfällt, ist aus dem freien ein schwerer Kreisel geworden und das Rad droht der Schwerkraft folgend nach rechts abzukippen (s. Abb. 22). Die Schwerkraft \vec{F}_g bewirkt folglich das Kippmoment \vec{M}_g um den Unterstützungspunkt am linken Achsenende. \vec{M}_g ist entgegengesetzt gerichtet zum Coriolis-Kippmoment \vec{M}_c . Wie beim Spielkreisel beschrieben, resultiert aus \vec{M}_g die Präzession mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ um die Senkrechte entsprechend

$$\alpha = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{r \cdot m \cdot g}{J \cdot \omega} = \frac{r \cdot F_g}{J \cdot \omega} = \frac{M_g}{J \cdot \omega} \quad \Leftrightarrow \quad M_g = J \cdot \omega \cdot \Omega .$$

Das Rad kippt nicht, sondern es präzediert (mit horizontal verlaufender Radachse) um die Senkrechte durch den Unterstützungspunkt am linken Achsenende, weil das Coriolis-Kippmoment das schwerkraftbedingte Kippmoment unseres Fahrradkreisels kompensiert:

$$\vec{M}_c \updownarrow \vec{M}_g \quad \wedge \quad M_c = J \cdot \omega \cdot \Omega = M_g . \quad (31)$$

Präzediert das Rad wegen des schwerkraftbedingten Kippmoments M_g mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$, so entspricht $\vec{\Omega}$ dem am Rad angreifenden Kräftepaar $(\vec{F}, -\vec{F})$, welches wiederum das bezüglich M_g betragsgleiche aber entgegengesetzt gerichtete Coriolis-Kippmoment M_c zur Folge hat.

Dabei ist hinsichtlich unseres Fahrradkreisel-Modells folgendes zu bedenken: Das Coriolis-Kippmoment hängt nicht unmittelbar von r ab, sondern von der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ des Rades um seine vertikale Längsachse. Das schwerkraftbedingte Kippmoment dagegen hängt unmittelbar von r , also von der Länge des „Hebelarms“ ab. Schon aus diesem Grund sind die Beträge der Kräfte $(\vec{F}, -\vec{F})$ und der Betrag von \vec{F}_g allgemein voneinander verschieden.

Rotiert das Rad unter dem Einfluss des Kräftepaars $(\vec{F}, -\vec{F})$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ ein mal um seine vertikale Längsachse (ein mal um sich selbst), so rotiert auch das unter dem Einfluss der Schwerkraft mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ präzedierende Rad gleichzeitig ein mal um sich selbst, auch wenn die Drehachse dabei die Senkrechte durch das linke Achsenende und nicht die vertikale Längsachse des Rades ist.

10 Die geführt-rotierende Hantel

Nach:

Paul A. Tipler, Physik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, deutsche Auflage 2000, Seite 262 bis Seite 263.

Die in der Abbildung 23 dargestellte geführt-rotierende Hantel dreht sich nicht um eine ihrer freien Achsen (Hauptträgheitsachsen). Rotiert ein Körper nicht um eine freie Achse, so erzeugt er von sich aus ein Drehmoment, das durch eine Fixierung seiner Drehachse im Raum kompensiert werden muss, um eine stabile Rotation zu ermöglichen. Diese Fixierung wird in der Praxis gewährleistet z. B. durch entsprechende Lager, die das erforderliche betragsgleiche Gegendrehmoment erzeugen und dadurch verschleifen. Ein System, das – wie unsere Hantel – in dieser Weise geführt werden muss, befindet sich im **dynamischen Ungleichgewicht**.

Achtung!

Unser System, die geführt-rotierende Hantel, befindet sich im **statischen Gleichgewicht**, was man durch eine rotationsfreie Aufhängung im Drehpunkt überprüfen kann. Der Drehpunkt ist in diesem Fall nämlich der Schwerpunkt des Systems. Dynamische Ungleichgewichte wie z. B. Unwuchten an Autoreifen kann man nicht am ruhenden System feststellen.

Da unsere geführt-rotierende Hantel nicht nur in einem Punkt unterstützt wird, sondern seine Drehachse (eine Gerade) geführt bzw. festgehalten werden muss, um eine stabile Rotation zu ermöglichen, handelt es sich definitionsgemäß nicht um einen Kreisel. Wir wollen aber trotzdem überprüfen, ob es Gemeinsamkeiten in der mathematischen Beschreibung gibt. Tragen wir also zunächst die mathematischen Gegebenheiten zusammen.

1. Die Massenpunkte $m_1 = m_2 = m$ seien durch einen masselosen Stab in Form einer Hantel miteinander verbunden. Der Stab sei in seiner Mitte drehbar und derart schräg gelagert, dass die Rotationsachse bzw. der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ stets einen Winkel α mit $0 < \alpha < 90^\circ$ einschließen.
2. Das Drehmoment $-\vec{M}$, hervorgerufen vom Zentrifugalkräftepaar $\vec{F}_{zf} = -\vec{F}_{zf}$ der Massenpunkte m , wird kompensiert durch das (betragsgleiche) Gegendrehmoment \vec{M} , hervorgerufen vom Zentripetalkräftepaar $\vec{F}_{zp} = -\vec{F}_{zp}$, welches durch

das Lager vermittelt wird. Die Kräftepaare leisten keine Arbeit, weil sie immer senkrecht zur Bewegungsrichtung \vec{v} bzw. $-\vec{v}$ der Massenpunkte wirken.

3. Die auf das Lager wirkenden Drehmomente sind

$$-\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{zf} + (-\vec{r}) \times (-\vec{F}_{zf}) = 2\vec{r} \times \vec{F}_{zf},$$

hervorgerufen durch die Zentrifugalkräfte infolge der Trägheit von m , und das Gegendrehmoment

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F}_{zp} + (-\vec{r}) \times (-\vec{F}_{zp}) = 2\vec{r} \times \vec{F}_{zp} \\ &= \vec{\ell} \times \vec{F}_{Lager} + (-\vec{\ell}) \times (-\vec{F}_{Lager}) = 2\vec{\ell} \times \vec{F}_{Lager} \end{aligned}$$

durch die lagerbedingt-zentripetal wirkenden Kräfte. Wie man sieht, kompensieren sich diese beiden Drehmomente im Lager der Drehachse.

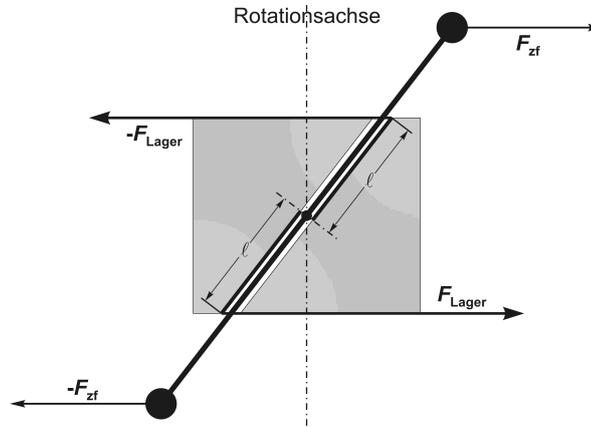


Abb. 24 Längsschnitt durch das Hantellager. Es ermöglicht die Rotation der Hantel um die raumfeste Rotationsachse, weil das vom Lager auf die Hantel wirkende Kräftepaar $(\vec{F}_{Lager}, -\vec{F}_{Lager})$ über die „Hebelarme“ $\vec{\ell}$ und $-\vec{\ell}$ dem Kräftepaar $(\vec{F}_{zf}, -\vec{F}_{zf})$ kompensatorisch entgegenwirkt.

4. Das Trägheitsmoment mit $|\vec{r}| = |-\vec{r}| = r$ um eine Achse durch den Stabmittelpunkt und senkrecht zu \vec{r} ist $2 \cdot mr^2$. Das Trägheitsmoment bezüglich der $\vec{\omega}$ -Rotationsachse, also mit $r_{\perp} = r \sin \alpha$, ist jedoch

$$J = 2 \cdot m \cdot (r \cdot \sin \alpha)^2 = 2mr^2 \sin^2 \alpha. \quad (32)$$

Das Trägheitsmoment um die Achse \vec{r} können wir vernachlässigen, weil wir von Massenpunkten m ausgehen.

5. Für die Bahngeschwindigkeit (Umlaufgeschwindigkeit) der Massenpunkte m gilt

$$v = r_{\perp} \cdot \omega = r \cdot \sin \alpha \cdot \omega = r \cdot \sin \alpha \cdot \frac{d\vartheta}{dt}.$$

6. Der Betrag der auf den Massenpunkt m wirkenden Zentripetalkraft ist gleich dem Betrag der radial nach außen gerichteten Zentrifugalkraft

$$F_{zp} = F_{zf} = m\omega^2 \cdot r_{\perp} = m\omega^2 \cdot r \sin \alpha.$$

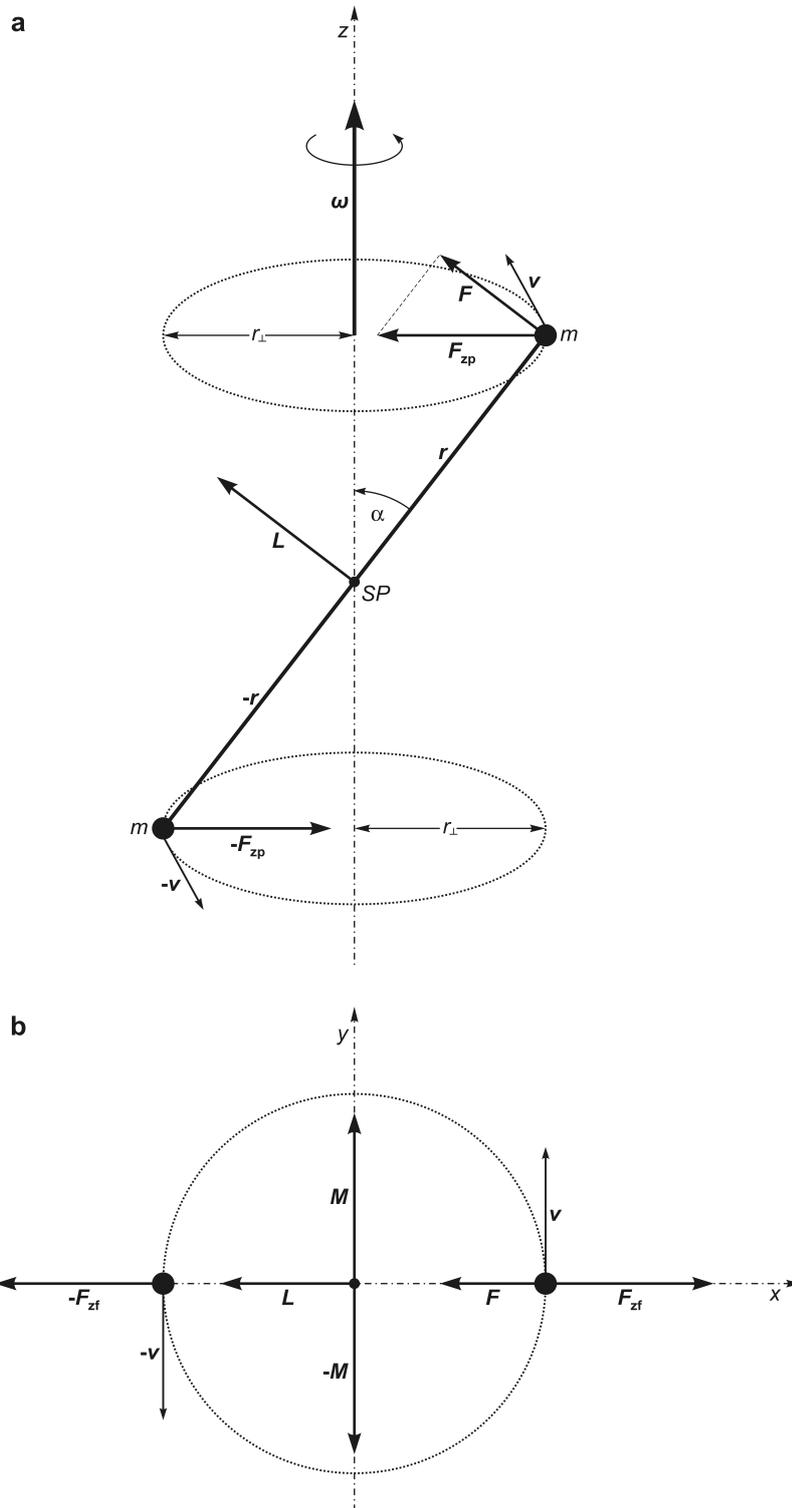


Abb. 23 Schematische Darstellung einer in ihrem Schwerpunkt SP mit Hilfe eines Lagers geführte Hantel: a) Seitenansicht. Das Lager sorgt dafür, dass der Winkel α zwischen Rotationsachse und Stab konstant ist. b) Draufsicht.

7. Unsere schräg rotierende Hantel besitzt den Drehimpuls

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} + m(-\vec{r}) \times (-\vec{v}) = 2m \vec{r} \times \vec{v} .$$

Dieser Drehimpulsvektor steht senkrecht auf der Ebene, die von \vec{r} und \vec{v} aufgespannt wird, und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass \vec{v} immer senkrecht auf \vec{r} steht, erhalten wir für den Drehimpulsbetrag

$$L = 2mr \cdot v = 2mr \cdot r\omega \sin \alpha = 2mr^2\omega \sin \alpha .$$

Wie wir sehen, ist zwar der Betrag des Drehimpulses konstant, nicht aber seine Richtung. Der Drehimpuls \vec{L} und damit auch sein Betrag lassen sich aufspalten in einen Anteil L_{\parallel} parallel und einen Anteil L_{\perp} senkrecht zur Rotationsachse:

$$\begin{aligned} L_{\parallel} &= L \cdot \sin \alpha = 2mr^2\omega \sin^2 \alpha , \\ L_{\perp} &= L \cdot \cos \alpha = 2mr^2\omega \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (33)$$

Jetzt sind wir in der Lage, das auf das Lager bzw. den **Unterstützungspunkt** wirkende Drehmoment \vec{M} einerseits auf Grund des Kräftepaars und andererseits auf Grund des sich zeitlich ändernden Drehimpulses zu berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= 2 \vec{r} \times \vec{F}_{\text{zp}} \quad \Rightarrow \\ M &= 2 r \cdot F_{\text{zp}} \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = 2 r \cdot F_{\text{zp}} \cdot \cos \alpha , \\ M &= 2 m r^2 \omega^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha . \\ \vec{M} &= \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L} \quad \Rightarrow \\ M &= \omega \cdot L \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = \omega \cdot L \cdot \cos \alpha , \\ M &= 2 m r^2 \omega^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha . \end{aligned}$$

Beide Wege führen zum gleichen Ergebnis, d. h., beide \vec{M} sind nicht nur betragsgleich, sondern stehen auch mit der gleichen Orientierung senkrecht auf der Ebene, in der \vec{r} , \vec{F}_{zp} , $\vec{\omega}$ und \vec{L} liegen. Das liegt daran, dass wir \vec{L} einem Kreisel entsprechend bezüglich eines Unterstützungspunktes, in diesem Fall bezüglich des Lagers im Mittelpunkt des Stabes, ermittelt haben.¹⁶ Auf diese Weise lassen sich die auf das Lager wirkenden Drehmomente erfassen.

Der Drehimpuls eines Massenpunktes m lässt sich aufspalten in seine Komponente senkrecht und in seine Komponente parallel zur $\vec{\omega}$ -Rotationsachse, indem wir bereits den zu m gehörenden Ortsvektor \vec{r} aufspalten in eine Abstandskomponente \vec{r}_{\perp} senkrecht zur $\vec{\omega}$ -Rotationsachse und eine Komponente \vec{r}_{\parallel} in Richtung der $\vec{\omega}$ -Rotationsachse gemäß $\vec{r} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \stackrel{\text{Entwicklungssatz}}{=} m \left[r^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \right] ,$$

¹⁶Der Drehimpuls bezieht sich immer auf einen Referenzpunkt, der im Allgemeinen frei gewählt werden kann.

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= m \left[r_{\perp}^2 \vec{\omega} + r_{\parallel}^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}) ((\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}) \cdot \vec{\omega}) \right] \\
&= m \left[r_{\perp}^2 \vec{\omega} + r_{\parallel}^2 \vec{\omega} - r_{\parallel} \omega \vec{r}_{\parallel} - r_{\parallel} \omega \vec{r}_{\perp} \right] \\
&= m \left[r_{\perp}^2 \vec{\omega} + r_{\parallel}^2 \vec{\omega} - r_{\parallel}^2 \vec{\omega} - r_{\parallel} \omega \vec{r}_{\perp} \right] \\
&= m \left[r_{\perp}^2 \vec{\omega} - r_{\parallel} \omega \vec{r}_{\perp} \right] \\
\vec{L} &= \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp} = J \vec{\omega} - r_{\parallel} \omega \vec{r}_{\perp} \quad \text{mit} \quad mr_{\perp}^2 = J. \tag{34}
\end{aligned}$$

Mit (34) lässt sich die Rotationsenergie des Massenpunktes m wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}
E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} \\
&= \frac{1}{2} (\vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp}) \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \left[r_{\perp}^2 \vec{\omega} - r_{\parallel} \omega \vec{r}_{\perp} \right] \cdot \vec{\omega}, \quad \text{mit} \quad \vec{r}_{\perp} \cdot \vec{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \\
E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} mr_{\perp}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2. \tag{35}
\end{aligned}$$

Zur Rotationsenergie trägt nur die Komponente $\vec{L}_{\parallel} = J \vec{\omega}$ des Drehimpulses bei.

Mit (35) und dem Trägheitsmoment $J = 2mr^2 \sin^2 \alpha$ der geführt-rotierenden Hantel können wir abschließend ihre Rotationsenergie berechnen:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot 2mr^2 \sin^2 \alpha \cdot \omega^2 = mr^2 \omega^2 \sin^2 \alpha.$$

Wird durch das Lager der Winkel $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nicht festgehalten, so wird sich durch die Fliehkraft \vec{F}_{zf} ein Winkel von $\alpha = 90^\circ$ einstellen und das Drehmoment $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ verschwindet. Beide Massenpunkte m kreisen dann mit dem Abstand r in einer Ebene um die senkrecht dazu verlaufende raumfeste Rotationsachse. Aus der geführten Hantel ist ein kräftefreier Kreisel geworden mit dem größeren Trägheitsmoment

$$J' = 2mr^2,$$

dem Drehimpuls

$$\vec{L}' \parallel \vec{\omega}' \quad \Rightarrow \quad |\vec{L}'| = L' = J' \omega' = 2mr^2 \cdot \omega'$$

und der Rotationsenergie

$$E'_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J' \omega'^2 = mr^2 \cdot \omega'^2.$$

Gehen wir wegen der Drehimpulserhaltung davon aus, dass nur der zur Drehachse parallel verlaufende Anteil L_{\parallel} des Drehimpulses erhalten geblieben ist. Dann ist mit (33) der Drehimpulsbetrag des kräftefreien Kreisels

$$L' = 2mr^2 \cdot \omega' = L_{\parallel} = 2mr^2 \cdot \omega \sin^2 \alpha$$

Somit hat der Betrag der Winkelgeschwindigkeit abgenommen:

$$L' = 2mr^2 \cdot \omega \sin^2 \alpha \quad \Rightarrow$$

$$\omega > \omega' = \omega \sin^2 \alpha .$$

Mit dem Winkelgeschwindigkeitsbetrag ω' können wir schließlich auch die Rotationsenergie der kräftefrei rotierenden Hantel angeben:

$$E'_{\text{rot}} = mr^2 \cdot \omega'^2 = mr^2 \cdot \omega^2 \sin^4 \alpha .$$

$$E_{\text{rot}} > E'_{\text{rot}} = mr^2 \omega^2 \sin^4 \alpha .$$

Die Differenz zwischen E'_{rot} und E_{rot} ist

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{rot}} &= E'_{\text{rot}} - E_{\text{rot}} \\ &= mr^2 \omega^2 \sin^4 \alpha - mr^2 \omega^2 \sin^2 \alpha = mr^2 \omega^2 \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) , \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta E_{\text{rot}} = -mr^2 \omega^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} .$$

Wir können feststellen, dass die Rotationsenergie der Massenpunkte abgenommen hat infolge der Radiusvergrößerung der Kreisbahn von $r \sin \alpha$ auf r . Dies lässt sich wie folgt erklären:

Die Zentrifugalkraft wirkt stets senkrecht zur Bahngeschwindigkeit und sorgt dafür, dass sich die Massenpunkte von der inneren Kreisbahn nach außen (zentrifugal) zur äußeren Kreisbahn bewegen. Längs des Weges von innen nach außen verrichten die Massenpunkte infolge der auf sie wirkenden Zentrifugalkraft (stets senkrecht zur Kreisbahn) Arbeit, die aus ihrer Rotationsenergie gespeist wird. Somit muss ihre Rotationsenergie abnehmen.

Wir überprüfen ΔE_{rot} . Dabei verwenden wir wieder die Erhaltung der Drehimpulskomponente \vec{L}_{\parallel} und schreiben vereinfachend $\sin \alpha = u$:

$$L_{\parallel} = 2mr^2 \omega u^2 = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \omega(u) = \frac{L_{\parallel}}{2mr^2 \cdot u^2} ,$$

$$F_{\text{zf}}(u) = mr \cdot u \cdot \omega^2(u) = mr \cdot u \cdot \frac{L_{\parallel}^2}{4m^2 r^4 \cdot u^4} ,$$

$$F_{\text{zf}}(u) = \frac{L_{\parallel}^2}{4mr^3} \cdot u^{-3} .$$

Die Weg Δs verläuft von der inneren Kreisbahn mit $s_1 = r \sin \alpha = ru = s_1(u)$ zur äußeren Kreisbahn mit $s_2 = r \sin(90^\circ) = r$. Die Arbeit, die auf diesem Weg von den beiden Massenpunkten der rotierenden Hantel verrichtet wird, ist mit $\frac{ds(u)}{du} = r \Rightarrow ds = r du$

$$\begin{aligned} W &= 2 \int_{s_1}^{s_2} F_{\text{zf}} ds = 2 \int_u^{u=1} F_{\text{zf}}(u) r du = 2 \int_u^{u=1} \frac{L_{\parallel}^2}{4mr^3} u^{-3} \cdot r du \\ &= \frac{L_{\parallel}^2}{2mr^2} \int_u^{u=1} u^{-3} du = -\frac{1}{2} \frac{L_{\parallel}^2}{2mr^2} \cdot \frac{1}{u^2} \Big|_u^1 = \frac{L_{\parallel}^2}{4mr^2} \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) , \\ W &= \frac{L_{\parallel}^2}{4mr^2} \frac{1 - u^2}{u^2} . \end{aligned}$$

Wir setzen $L_{\parallel} = 2mr^2\omega u^2$ und $u = \sin \alpha$ ein und erhalten schließlich die verrichtete Arbeit

$$W = \frac{4m^2r^4\omega^2 \sin^4\alpha}{4mr^2} \frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

$$\boxed{W = mr^2\omega^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha = -\Delta E_{\text{rot}}}.$$

Damit haben wir bestätigt, dass der Energiebetrag ΔE_{rot} in mechanische Arbeit umgesetzt wird.
