Reinhard Weiß

Basisskript zur

Infinitesimalrechnung

mit Anwendungsbeispielen in der Physik

Eine Stoffsammlung für interessierte Abiturienten

21.10.2024

Inhaltsverzeichnis

1 Der Unendlichkeitsbegriff

Ortsräume mit mehr als drei Dimensionen kann sich niemand bildlich vorstellen. Ebenso entziehen sich unendlich große Objekte dem (bildlichen) Vorstellungsvermögen. Als unendlich groß bzw. unendlich ausgedehnt können beispielsweise der dreidimensionale Ortsraum und der Parameter Zeit angenommen werden. Und auch der unendlich kleine („gegen Null gehende“) Abstand zwischen zwei „benachbarten“ reellen Zahlen auf dem Zahlenstrahl ist nicht bildlich zu erfassen, sondern nur zu schlussfolgern.

Stellen wir uns beispielsweise vor, wir befänden uns in einem begrenzten dreidimensionalen Ortsraum. Dann verlangt unsere Vorstellung (intuitiv), dass sich jenseits dieser Grenze der Ortsraum fortsetzt. So erstreckt sich nach jeder beliebig gesetzten Grenze der Raum unserer Vorstellung weiter und weiter. Und wenn wir gedanklich unendlich viele derartige Raumbegrenzungen nacheinander überschreiten, haben wir den unendlichen Raum konstruiert bzw. geschlussfolgert, ohne ihn als Ganzes bildlich erfassen zu können. Hinter einer Raumgrenze kann nämlich nach unserer Vorstellung nicht nichts sein. Somit entzieht sich auch das Nichts unserem Vorstellungsvermögen. Formal-logisch existiert dort, wo nichts ist, das Nichts, also Etwas.

Dieser seltsame Sachverhalt, dass wir durch Überlegung bzw. logische Schlussfolgerungen und Analogien – das heißt durch die Mathematik – unanschauliche Zusammenhänge und Objekte beschreiben können, ist eine Grundlage der Theoriebildung und des Erkenntnisprozesses. So hatte James Clerk Maxwell bereits um 1868 die im Grunde genommen unsichtbaren elektromagnetischen Wellen mathematisch hergeleitet und ihre Existenz vorhergesagt. Experimentell nachgewiesen wurden diese aber erst von Heinrich Hertz im Jahre 1888.

„Unendlich“ (Symbol ∞) ist also ein unbestimmter Ausdruck und besitzt folglich in der Mathematik keinen (bestimmten) Zahlenwert.

∞ ist keine Zahl sondern ein unbestimmter Ausdruck.

An zwei einfachen Beispielen veranschaulichen wir, wie dies in der mathematischen Notation zu berücksichtigen ist. So resultiert der uneigentliche Grenzwert ∞ in **korrekter** Schreibweise

$$\text{z. B. für } k \in \mathbb{N}^* ,\ x \in \mathbb{R} \ : \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{k}{\pm x} \right) = \pm\infty \ .$$

Für die Division durch null gilt jedoch bekanntlich

$$\frac{k}{x} \overset{x=0}{\Longrightarrow} \frac{k}{0} \ \ \textbf{nicht definiert} \ .$$

∞ heißt uneigentlicher Grenzwert, weil ihm kein bestimmter Zahlenwert zugeordnet werden kann. Es ist also üblich, beim uneigentlichen Grenzwert „gleich“ unendlich zu sagen und zu schreiben. Es ist aber nicht korrekt, Unendlich mit einer Zahl gleichzusetzen, obwohl man dies in der Literatur gelegentlich findet:

$$\frac{k}{\pm x} \Longrightarrow \frac{k}{\pm\infty} = 0 \ \ \textbf{nicht korrekt} \ .$$

Man schreibt **korrekt**

$$\text{z. B. für } x \in \mathbb{R} \ : \qquad \lim_{x\to \infty} \left(\frac{k}{\pm x} \right) = 0 \ .$$

2 Zahlenfolgen

Zahlenfolgen, kurz Folgen, notieren wir wie folgt:

$$\{a_k\} = a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k,\, \ldots,\, a_n \quad \text{mit dem Laufindex } k \in \mathbb{N}^*\,,$$

dem Anfangsglied a_1, dem allgemeinen bzw. k-ten Glied a_k und dem Endglied a_n.

Beispiele

- $a_{k+1} = a_k \;\; \forall k$
  $\Rightarrow$ **konstante** Folge:
  $$5,\, 5,\, 5,\, \ldots,\, 5$$

- $a_{k+1} \geq a_k \;\; \forall k$ bzw. $a_{k+1} \leq a_k \;\; \forall k$
  $\Rightarrow$ **monoton** wachsende bzw. monoton fallende Folge:
  $$1,\, 3,\, 6,\, 6,\, 6,\, 10,\, 15 \quad \text{bzw.} \quad 13,\, 9,\, 8,\, 8,\, 7,\, 6$$

- $a_{k+1} > a_k \;\; \forall k$ bzw. $a_{k+1} < a_k \;\; \forall k$
  $\Rightarrow$ **streng monoton** wachsende bzw. streng monoton fallende Folge, d. h., der Nachfolger ist **immer** größer bzw. kleiner als der Vorgänger:
  $$1,\, 3,\, 6,\, 10,\, 15 \quad \text{bzw.} \quad 13,\, 9,\, 8,\, 7,\, 6$$

- $a_{k+1} \cdot a_k \leq 0 \;\; \forall k$
  $\Rightarrow$ **alternierende** Folge:
  $$1,\; -2,\; 5,\; -9,\; 15,\; -21,\; 45$$

- Die bisher aufgeführten Folgen sind **endliche** Folgen. **Unendliche** Folgen werden durch ihr Bildungsgesetz oder durch drei Fortsetzungspunkte dargestellt:
  $$\begin{aligned} \{a_k\} &= \{k^{-3}\} = 1\,,\ \frac{1}{8}\,,\ \frac{1}{27}\,,\ \frac{1}{64}\,,\ \frac{1}{125}\,,\ \frac{1}{216}\,,\ \ldots \\ \{a_k\} &= \{2^k\} = 2\,,\ 4\,,\ 8\,,\ 16\,,\ 32\,,\ 64\,,\ \ldots \end{aligned}$$

- $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = g$
  $\Rightarrow$ **konvergente** Folge:
  Nähern sich die Glieder a_k einer unendlichen Folge mit unbegrenzt wachsender Gliedernummer k immer weiter einer eindeutig angebbaren Zahl g, so ist diese Folge konvergent. g ist der Grenzwert der Folge. Eine konvergente Folge mit $g = 0$ heißt **Nullfolge**. Konstante Folgen sind konvergent.
  $$\begin{aligned} \{a_k\} &= \left\{3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\} = 2\,,\ 2\frac{1}{2}\,,\ 2\frac{3}{4}\,,\ 2\frac{7}{8}\,,\ 2\frac{15}{16}\,,\ \ldots; \quad g = 3 \\ \{a_k\} &= \left\{-4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\} = -3\,,\ -4\frac{1}{2}\,,\ -3\frac{3}{4}\,,\ -4\frac{1}{8}\,,\ -3\frac{15}{16}\,,\ \ldots; \quad g = -4 \end{aligned}$$
  Die harmonische Folge $\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\} = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots$ und die geometrischen Folgen $\{a_k\} = \{a_1 \cdot q^{k-1}\}$ für $0 < |q| < 1$ sind Nullfolgen.

- Eine Funktion $f(x)$ mit einem Sattelpunkt an der Stelle x_s ist streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend, weil es nur einen einzigen Punkt mit dem Funktionswert $f(x_s)$ bzw. der Steigung $f'(x_s) = 0$ gibt, nämlich den Sattelpunkt.

- Alle Folgen, die nicht konvergent sind, sind **divergent**, haben also keine eindeutig angebbare Zahl als Grenzwert. Dabei unterscheiden wir zwei Arten der Divergenz. Folgen mit **bestimmter Divergenz** streben entweder den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ oder den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$ an. Deshalb wird die bestimmte Divergenz auch **uneigentliche Konvergenz** genannt:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty \quad \textbf{oder} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = -\infty \,.$$

Von **unbestimmter Divergenz** sprechen wir, wenn eine Folge für $k \to \infty$ mehr als einem Grenzwert, mehr als einem uneigentlichen Grenzwert oder sowohl einem Grenzwert als auch einem uneigentlichen Grenzwert zustrebt. Beispiel:

$$\{a_k\} = \left\{1 + (-1)^k \frac{2k}{k+1}\right\} =$$

$$0\,,\ +2\tfrac{1}{3}\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ +2\tfrac{3}{5}\,,\ -\frac{2}{3}\,,\ +2\tfrac{5}{7}\,,\ -\frac{3}{4}\,,\ +2\tfrac{7}{9}\,,\ -\frac{4}{5}\,,\ \ldots$$

ist eine unendliche alternierende Folge, die in zwei Folgen aufgeteilt werden kann, wobei eine der beiden Folgen einem oberen Grenzwert g_a und die andere einem unteren Grenzwert g_b zustrebt:

$$2\tfrac{1}{3}\,,\ 2\tfrac{3}{5}\,,\ 2\tfrac{5}{7}\,,\ 2\tfrac{7}{9}\,,\ \ldots\ = \left\{1 + \frac{2k}{k+1}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{2k}{k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} 1 + \frac{\lim\limits_{k\to\infty} 2}{\lim\limits_{k\to\infty} 1 + \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}} = 3 = g_\mathrm{a}\,,$$

$$0\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ -\frac{2}{3}\,,\ -\frac{3}{4}\,,\ -\frac{4}{5}\,,\ \ldots\ = \left\{1 - \frac{2k}{k+1}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{2k}{k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{\lim\limits_{k\to\infty} 2}{\lim\limits_{k\to\infty} 1 + \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}} = -1 = g_\mathrm{b}\,.$$

3 Beispiele für Folgen und Reihen

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ sei eine Folge bzw. Zahlenfolge.

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k \quad \text{mit} \quad k, N \in \mathbb{N}^*$$

heißt N-te Partialsumme und ist ein Glied der Partialsummenfolge $\{S_N\}$. Strebt die Folge $\{S_N\}$ für $N \to \infty$ gegen *einen* Grenzwert s, dann ist die **unendliche Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konvergent**:

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k \quad \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s\ .$$

Die Summe einer unendlichen Reihe ist also der Grenzwert der Partialsummenfolge. Konvergiert eine Reihe nicht, so ist sie divergent.

3.1 Geometrische Folgen und Reihen

Wegen ihrer herausragenden Bedeutung in der Physik betrachten wir im Folgenden geometrische Folgen und leiten die Formel für deren Reihensumme her.
Dabei übernehmen wir im Wesentlichen den Abschnitt „16.3.2. Geometrische Folgen und Reihen“ aus dem Nachschlagebuch für Grundlagenfächer – Mathematik von Hans Simon, Kurt Stahl und Helmut Grabowski, 13. Auflage 1979, VEB Fachbuchverlag Leipzig, Seite 458 bis Seite 460.

Für **geometrische Folgen** $\{a_k\}$ gilt:

- $$\{a_k\} = \underbrace{a_1 \cdot q^0}_{a_1}, \quad \underbrace{a_1 \cdot q^1}_{a_2}, \quad \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3}, \quad \underbrace{a_1 \cdot q^3}_{a_4}, \quad \underbrace{a_1 \cdot q^4}_{a_5}, \quad \ldots, \quad \underbrace{a_1 \cdot q^{k-1}}_{a_k}, \quad \ldots$$

  $$a_1 \in \mathbb{R}\,,\ a_1 \neq 0\,, \qquad q \in \mathbb{R}\,,\ q \neq 0\,,\ q \neq 1\,, \qquad k \in \mathbb{N}\ .$$

- Der Betrag jedes Gliedes einer geometrischen Folge ist das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder – daher die Bezeichnung geometrische Folge:

  $$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_{k+1}}{a_k} = q \quad \Leftrightarrow \quad a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1} \qquad \Rightarrow \qquad |a_k| = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}\ .$$

- Die Glieder der geometrischen Folge sind eine Exponentialfunkion der Gliedernummern. Deshalb besitzen die Glieder der geometrischen Folgen ein ganz anderes Wachstumsverhalten als die Glieder der arithmetischen Folgen.

- Wachstumsverhalten geometrischer Folgen

  $$a_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q > 1 : & \text{wachsende Folge,} \\ 0 < q < 1 : & \text{fallende Folge,} \\ q < 0 : & \text{alternierende Folge,} \end{cases}$$

  $$a_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q > 1 : & \text{fallende Folge,} \\ 0 < q < 1 : & \text{wachsende Folge,} \\ q < 0 : & \text{alternierende Folge.} \end{cases}$$

Für **endliche geometrische Reihen** $\sum_{k=1}^{N} a_k = S_N$ gilt:

$$\begin{aligned}
S_N &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ \dots \ + a_1 q^{N-1} \\
&= a_1 \left(1 + q + q^2 + q^3 + \ \dots \ + q^{N-1}\right) , \\[1ex]
S_N \cdot q &= a_1 \left(q + q^2 + q^3 + q^4 + \ \dots \ + q^N\right) .
\end{aligned}$$

Die Subtraktion $S_N - S_N \cdot q$ liefert

$$\begin{aligned}
S_N(1-q) &= a_1 \big(1 \ + q + q^2 + q^3 + \ \dots \ + q^{N-1} \\
&\qquad\quad - q - q^2 - q^3 - \ \dots \ - q^{N-1} \ - q^N\big) , \\[1ex]
S_N(1-q) &= a_1 \left(1 - q^N\right) \quad \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k = a_1 \frac{1-q^N}{1-q} = a_1 \frac{q^N - 1}{q-1}} ,$$

wie man durch Erweitern des Bruchs mit -1 überprüfen kann.

Folglich gilt für **unendliche geometrische Reihen** mit

$$\lim_{N\to\infty} q^N = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad q > 1 \\ 0 & \text{für } 0 < q < 1 \end{cases} \quad :$$

$$q > 1 \ : \quad \lim_{N\to\infty} \left(a_1 \frac{1-q^N}{1-q}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{für } a_1 > 0 \, , \\ -\infty & \text{für } a_1 < 0 \, , \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty} \left(a_1 \frac{1-q^N}{1-q}\right) = a_1 \frac{1}{1-q} , \quad 0 < q < 1} . \tag{1}$$

3.2 Die unendliche harmonische Reihe

Wir zeigen, dass die unendliche harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ \cdots$$

divergiert. Betrachten wir dazu die Partialsumme

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\sigma_1 = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\sigma_2 > \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\sigma_3 > \frac{1}{2}}$$

mit

$$\sigma_m = \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{k}$$

und dem Laufindex $m \in \mathbb{N}^*$ für σ. Am Beispiel von

$$\sigma_3 = \sum_{k=2^2+1}^{2^3} \frac{1}{k}$$

stellen wir fest, dass in σ_3 die Anzahl der Summanden $2^3 - 2^2 = 4$ beträgt und dass der kleinste Summand $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ ist. Allgemein gilt also für

$$\begin{aligned} \sigma_m \ : \quad & \text{Anzahl der Summanden:} \quad 2^m - 2^{m-1} \ , \\ & \text{kleinster Summand:} \quad \frac{1}{2^m} \quad \text{mit} \quad 2^m = k \ , \\ & \Rightarrow \quad \sigma_m \geq (2^m - 2^{m-1}) \cdot \frac{1}{2^m} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Die Partialsummen sind folglich

$$\begin{aligned} S_N \ &= \ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ \cdots \ + \frac{1}{k} + \ \cdots \ + \frac{1}{N} \\ &= \ 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ \cdots \ + \sigma_m + \ \cdots \ + \sigma_M \\ S_N \ &= \ 1 + \sum_{m=1}^{M} \sigma_m \qquad \text{mit} \qquad N = 2^M \ \Rightarrow \ M = \log_2 N \ , \\ S_N \ &\geq \ 1 + M \cdot \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Für $N \to \infty$ geht auch $M \to \infty$, sodass die Partialsummenfolge $\{S_N\}$ nicht beschränkt ist und somit die unendliche harmonische Reihe gemäß $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ \to \ \infty$ divergiert.

3.3 Die unendliche Teleskopreihe

Die unendliche Teleskopreihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} = \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ \cdots$$

ist konvergent, weil mit $\dfrac{1}{(k-1) \cdot k} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ gilt:

$$S_N = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ \cdots \ + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{1}{N} \ ,$$

$$\lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1 = s \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=2}^{\infty} = \frac{1}{(k-1)k} = 1 \ . \ \square$$

Folglich ist auch die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots}_{< 1 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots} = \frac{\pi^2}{6}$$

konvergent, wie der Vergleich mit der Teleskopreihe beweist.

4 Paradoxon des Zenon - Standardbeispiel für ein Grenzwertproblem

Achilles (entsprechend Index A) und die Schildkröte (entsprechend Index B) sollen einen Wettlauf bestreiten. Achilles läuft mit der Geschwindigkeit v_A, die Schildkröte ist natürlich langsamer und kriecht mit der Geschwindigkeit $v_B = \frac{1}{k} \cdot v_A$, wobei $k > 1$ gilt. Deshalb gewährt Achilles der Schildkröte einen Vorsprung der Länge a. Beide starten zum selben Zeitpunkt $t = 0$, Achilles am Streckennullpunkt $s = 0$ und und die Schildkröte am Streckenpunkt $s = a$. Der Wettlauf wird jetzt in (zeitliche) Beobachtungsschritte eingeteilt:

1. Teilschritt:
   Achilles legt die Strecke a zurück und erreicht $s = a$.
   Die Schildkröte legt die Strecke $a \cdot \frac{1}{k}$ zurück und erreicht
   $s = a + a \cdot \frac{1}{k}$.

2. Teilschritt:
   Achilles erreicht $s = a + a \cdot \frac{1}{k}$.
   Die Schildkröte erreicht $s = a + a \cdot \frac{1}{k} + a \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}$, also
   $s = a + a \cdot \frac{1}{k} + a \cdot \frac{1}{k^2}$.

3. Teilschritt:
   Achilles erreicht $s = a + a \cdot \frac{1}{k} + a \cdot \frac{1}{k^2}$.
   Die Schildkröte erreicht
   $s = a + a \cdot \frac{1}{k} + a \cdot \frac{1}{k^2} + a \cdot \frac{1}{k^3}$.

N. Teilschritt: [1]
   Achilles erreicht $s = a + a \cdot \frac{1}{k} + a \cdot \frac{1}{k^2} + \cdots + a \cdot \frac{1}{k^{N-1}}$.
   Die Schildkröte erreicht
   $s = a + a \cdot \frac{1}{k} + a \cdot \frac{1}{k^2} + a \cdot \frac{1}{k^3} + \cdots + \cdots + a \cdot \frac{1}{k^{N-1}} + a \cdot \frac{1}{k^N}$.

Und so geht es mit immer kürzer werdenden Teilschritten unendlich weiter. Obwohl der Vorsprung der Schildkröte sehr schnell schrumpft, behält sie bei jedem der unendlich vielen Teilschritte einen Vorsprung, also z. B. beim N-ten Teilschritt den Vorsprung von $a \cdot \frac{1}{k^N}$.

[1] N ist eine frei wählbare aber feste positive ganze Zahl. n ist der Laufindex. Beim Grenzübergang $N \to \infty$ „verschwindet“ $a \cdot \frac{1}{k^N}$. Man darf nicht „$N = \infty$“ schreiben, den ∞ ist keine Zahl sondern ein unbestimmter Ausdruck. $N \to \infty$ ist in diesem Zusammenhang äquivalent zu $n \to \infty$.

Es stellt sich die Frage, wie es möglich ist, dass Achilles trotz der erforderlichen unendlich vielen Teilschritte mit jeweils verbleibendem Vorsprung der Schildkröte, diese dennoch bei einem bestimmten Streckenpunkt s einholt bzw. überholt. Es gibt zwei Möglichkeiten zur Auflösung dieses Paradoxons:

1) Erfahrung bzw. experimentelle Methode - Berücksichtigung des Geschwindigkeitsunterschiedes

Erfahrungsgemäß holt Achilles die Schildkröte selbstverständlich ein, weil seine Geschwindigkeit k mal größer ist als die der Schildkröte. Diese Tatsache kann man wie folgt zeigen:

Zum Zeitpunkt t, in dem Achilles die Schildkröte einholt, hat Achilles mit seiner Geschwindigkeit $v_A = k \cdot v_B$ die Strecke $s = v_A \cdot t = k \cdot v_B \cdot t$ zurückgelegt, während die Schildkröte mit ihrer Geschwindigkeit v_B nur die Strecke $s - a = v_B \cdot t$ zurückgelegt hat. Wir bilden die Gleichung für t und lösen nach s auf:

$$t = \frac{s}{v_A} = \frac{s-a}{v_B} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_B}{v_A} = \frac{s-a}{s} = 1 - \frac{a}{s} = \frac{1}{k} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{s} = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} \quad \Leftrightarrow$$

$$s = a \cdot \frac{k}{k-1} .$$

2) Mathematische Methode der Grenzwertbildung

Auf diese Form der Auflösung des Paradoxons kommt es uns in diesem Zusammenhang an. Wie oben dargestellt, hat Achilles nach N Teilschritten den Streckenpunkt

$$s = a + a \cdot \frac{1}{k} + a \cdot \frac{1}{k^2} + \cdots + a \cdot \frac{1}{k^{N-1}} = a \cdot \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \cdots + \frac{1}{k^{N-1}}\right) = a \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{k^n}$$

erreicht, während die Schildkröte mit dem verbliebenen Vorsprung $a \cdot \frac{1}{k^N}$ den Streckenpunkt

$$s = a + a \cdot \frac{1}{k} + a \cdot \frac{1}{k^2} + \cdots + a \cdot \frac{1}{k^{N-1}} + a \cdot \frac{1}{k^N} = a \cdot \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \cdots + \frac{1}{k^{N-1}} + \frac{1}{k^N}\right) = a \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{k^n}$$

erreicht. Untersuchen wir jetzt s nach unendlich vielen Teilschritten, also für $N \to \infty$. Nach der Mengenlehre ist $\infty = \infty - 1$. Deshalb gilt nach unendlich vielen Teilschritten sowohl für Achilles als auch für die Schildkröte die

$$\text{unendliche Reihensumme} \quad s = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n} .$$

Zwischenrechnung:

$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{k^n}$ heißt die Reihensumme der endlichen geometrischen Reihe. Diese wollen wir zunächst berechnen. Dabei berücksichtigen wir $\frac{1}{k^0} = \frac{1}{1} = 1$.

$$S_N = \frac{1}{k^0} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \cdots + \frac{1}{k^{N-1}}$$

mit $\dfrac{1}{k}$ multipliziert liefert

$$S_N \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \cdots + \frac{1}{k^N} \, .$$

Jetzt subtrahieren wir $S_N \cdot \frac{1}{k}$ von S_N und erhalten

$$S_N - \left(S_N \cdot \frac{1}{k}\right) = S_N \left(1 - \frac{1}{k}\right) =$$

$$\frac{1}{k^0} + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \cdots + \frac{1}{k^{N-1}}\right) - \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \cdots + \frac{1}{k^{N-1}}\right) - \frac{1}{k^N} = \frac{1}{k^0} - \frac{1}{k^N} = 1 - \frac{1}{k^N} \, .$$

Auflösen nach S_N ergibt schließlich

$$S_N = \frac{1 - \dfrac{1}{k^N}}{1 - \dfrac{1}{k}} \, .$$

Die geometrische Folge $\{\frac{1}{k^n}\}$ ist für $k > 1$ eine Nullfolge. Dies verwenden wir bei der Grenzwertbilung von S_N für $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{k^n} = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{k^N}}{1 - \dfrac{1}{k}} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{k}} = \frac{k}{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n} \, .$$

Zwischenergebnis:
Für die **Reihensumme der unendlichen geometrischen Reihe** gilt somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{k}{k-1} \, .$$

Dieses Zwischenergebnis setzen wir in die unendliche Reihensumme s ein und erhalten ebenfalls das mit der Erfahrung übereinstimmende Resultat

$$s = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n} = a \cdot \frac{k}{k-1} = a \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \, , \quad k > 1 \, .$$

Dieses spezielle Ergebnis stimmt überein mit der Gleichung (1) der allgemeinen Herleitung im Abschnitt 3.1.

Schlussfolgerungen aus dem Paradoxon des Zenon

1. Eine unendliche Reihe kann eine endliche Summe haben. Im Fall des Zenon-Paradoxons handelt es sich um die geometrische Reihe $a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ mit $k > 1$.
2. Die durchlaufene Wegstrecke bis zum Einholpunkt kann beliebig bzw. unendlich oft in Vorsprungsteilstrecken der Schildkröte unterteilt werden, ohne dass die durchlaufene Wegstrecke dadurch unendlich lang wäre bzw. ohne dass unendlich viel Zeit erforderlich wäre, um sie zurückzulegen.
3. Sinngemäß lässt sich dieses Grenzwertproblem wie folgt veranschaulichen:
   Die Reihenglieder gehen mit wachsendem Laufindex n schneller gegen Null als die Anzahl N der Glieder gegen Unendlich, so dass die Glieder am Ende zur Reihensumme nichts mehr beitragen und die Reihe einen endlichen Grenzwert besitzt.

5 Grenzwertsätze

Für den Laufindex k schreiben wir jetzt n, weil wir in der folgenden Rahmenbox den Abschnitt „16.4.2.4. Grenzwertsätze“ aus dem Nachschlagebuch für Grundlagenfächer – Mathematik von Hans Simon, Kurt Stahl und Helmut Grabowski, 13. Auflage 1979, VEB Fachbuchverlag Leipzig, Seite 465, teilweise zitieren.

Die vier folgenden Grenzwertsätze gelten nicht nur für Zahlenfolgen, d. h. für diskrete Funktionen wie beispielsweise

$$\{a_n\} \;=\; f(n)\,, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

sondern auch für kontinuierliche Funktionen wie z. B.

$$y \;=\; f(x)\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Bei der Bestimmung von Grenzwerten gewisser Zahlenfolgen sind mitunter umformende Operationen erforderlich, die Beziehung zu den vier Grundrechenoperationen haben. Sie werden durch vier sog. Grenzwertsätze festgelegt, die hier ohne Beweis mitgeteilt seien:

Sind $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zwei konvergente Zahlenfolgen, d. h., existieren $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ als eindeutig feststellbare Zahlen, so sind auch die Zahlenfolgen $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ und (unter gewissen Bedingungen) $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ konvergent, und ihre Grenzwerte für $n \to \infty$ lassen sich aus den Grenzwerten der Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ folgendermaßen berechnen:

I. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

III. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

IV. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, falls $b_n \neq 0$ für alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Bei der Bestimmung von Grenzwerten mit Hilfe dieser Sätze ist zweierlei wichtig:

1. solange der Grenzwert noch nicht gebildet, das lim-Symbol also noch vorhanden ist, kann der unter diesem stehende zu untersuchende Ausdruck noch in üblicher Weise, selbst unter Einbeziehung der die Grenzwertbildung verursachenden Größe n, arithmetisch umgeformt werden.
2. Der Grenzwert einer konstanten Zahlenfolge ist gleich dieser Konstanten.

Beachte:

Die Umkehrung der Grenzwertsätze ergibt keine wahre Aussage. So folgt z. B. aus der Konvergenz von $\{a_n + b_n\}$ nicht unbedingt die Konvergenz von $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$. Für IV. folgt aus $\lim b_n = 0$ nicht unbedingt die Nichtkonvergenz der Folge $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$. ...

Die für Zahlenfolgen gültigen Grenzwertsätze ... gelten sinngemäß auch für Grenzwerte von Funktionen. Die Grenzwertsätze können oft mit Vorteil bei der Bestimmung von Grenzwerten von Funktionen herangezogen werden.

An vier einfachen Beispielen zeigen wir den Übergang von den Folgen (diskreten Funktionen)

$$f(n) = \{a_n\}\,; \quad n \in \mathbb{N}^*,\, a_n \in \mathbb{R}$$

auf dem Definitionsbereich $\mathbb{N}^*$ zu den zugehörigen kontinuierlichen Funktionen (im Folgenden nur noch kurz Funktionen genannt)

$$f(x) = y\,; \quad y, x \in \mathbb{R}$$

auf dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\{a_n\} &= \{n^2\} && \longrightarrow \quad y = x^2\ , \\
\{a_n\} &= \left\{\frac{1}{n}\right\} && \longrightarrow \quad y = \frac{1}{x}\ , \\
\{a_n\} &= \{a_1 \cdot q^{n-1}\} && \longrightarrow \quad y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x\ , \\
\{a_n\} &= \{a_1 + (n-1)\,b\} && \longrightarrow \quad y = b \cdot x + a_1 - b\ .
\end{aligned}$$

Weil man Folgen in Funktionen überführen kann, lassen sich die vier Grenzwertsätze auch auf Funktionen anwenden.

Grenzwerte von elementaren Funktionen

Bei den trigonometrischen Funktionen, der Potenz-, Wurzel-, Exponential- und Logarithmusfunktion ist der Grenzwert an jeder Stelle des Definitionsbereichs D gleich dem Funktionswert:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\ , \quad x_0 \in D\ :$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \sin x &&= \sin x_0\ , && D = \mathbb{R} \\
&\lim_{x \to x_0} \cos x &&= \cos x_0\ , && D = \mathbb{R} \\
&\lim_{x \to x_0} \tan x &&= \tan x_0\ , && D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3}{2}\pi,\ \pm\frac{5}{2}\pi,\ \cdots\right\} \\
&\lim_{x \to x_0} \cot x &&= \cot x_0\ , && D = \mathbb{R} \setminus \{0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \cdots\} \\
&\lim_{x \to x_0} x^n &&= (x_0)^n\ , && n \in \mathbb{Z}^* \\
&\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} &&= \sqrt[n]{x_0}\ , && D = \mathbb{R}_{\geq 0}\ , \quad n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \\
&\lim_{x \to x_0} a^x &&= a^{x_0}\ , && a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\} \\
&\lim_{x \to x_0} \log_a(x) &&= \log_a(x_0)\ , && D = \mathbb{R}_{>0}\ , \quad a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}
\end{aligned}$$

Betragsfunktion

Den Grenzwert der Betragsfunktion bestimmt man, indem man zuerst den Grenzwert der zugehörigen Funktion ermittelt und anschließend den Betrag bildet:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x \to x_0} f(x)\right|\ .$$

Verkettete Funktion

Den Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} h\Big(f(x)\Big) = b$$

der verketteten Funktion

$$h\Big(f(x)\Big) = h(y) \quad \text{mit} \quad y = f(x)$$

bestimmt man, indem man zuerst den Grenzwert der inneren Funktion $y = f(x)$ gemäß

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

ermittelt und anschließend den Grenzwert der äußeren Funktion an der Stelle a, dem Grenzwert der inneren Funktion, berechnet gemäß

$$\lim_{y \to a} h(y) = b \; .$$

Beispiel:

	verkettete Funktion:	$h\Big(f(x)\Big) = \sqrt{\sin x}$.
	innere Funktion:	$f(x) = y = \sin x$,
	äußere Funktion:	$h(y) = \sqrt{y}$.

6 Verhalten und Grenzwerte von Funktionen

6.1 Konvergenz, Divergenz und Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Allerdings ist zu berücksichtigen, dass der Definitionsbereich von Funktionen sowohl in positiver als auch in negativer Richtung unbeschränkt sein kann, während der Definitionsbereich von Folgen, wenn überhaupt, nur in positiver Richtung unbeschränkt ist. Deshalb kann eine Funktion sowohl für $x \to +\infty$ als auch für $x \to -\infty$ konvergent, uneigentlich konvergent (divergent) oder zu einer Seite konvergent und zur anderen Seite uneigentlich konvergent (divergent) sein:

$$
\begin{array}{lll}
y = \tanh x & \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \tanh x = \pm 1 \longrightarrow & \textbf{Konvergenz} \text{ für } x \to \pm\infty\,, \\
y = x & \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty \quad\longrightarrow & \textbf{uneigentliche Konvergenz} \text{ für } x \to \pm\infty\,, \\
y = \mathrm{e}^x & \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^x = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases} \longrightarrow & \begin{cases} \textbf{uneigentliche Konvergenz} \text{ für } x \to +\infty \\ \textbf{Konvergenz} \text{ für } x \to -\infty \end{cases}.
\end{array}
$$

Eine Funktion $f(x)$ ist **unbestimmt divergent**, wenn sie, wie beispielsweise bei der Sinusfunktion, für $x \to \pm\infty$ zwischen zwei Zahlenwerten schwankt und sich dabei keiner Zahl annähert, sodass kein Grenzwert existiert: $y = f(x) = \sin x$ mit dem Definitionsbereich $-\infty < x < +\infty$ und dem Wertevorrat $-1 \le y \le 1$.

6.2 Konvergenz, Divergenz und Grenzwerte für $x \to x_0$

Sind Funktionen $f(x)$ an eindeutig angebbaren Stellen x_0 nicht definiert, so besitzen sie an diesen Stellen Definitionslücken (kurz Lücken) bzw. Unstetigkeiten. Deshalb werden Definitionslücken auch Unstetigkeitsstellen genannt. Die Definitionslücken werden nach dem dortigen Funktionsverhalten eingeteilt.

6.2.1 Hebbare Definitionslücken

Hebbare Lücken sind Definitionslücken an eindeutig angebbaren Stellen x_0, die durch Umformen des Funktionsterms und anschließende Grenzwertbildung $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ behoben bzw. geschlossen werden können. Durch Einsetzen von g in die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 erhalten wir eine stetige Funktion. Funktionen mit hebbarer Lücke **konvergieren** von beiden Seiten der Lücke gegen den (endlichen) Grenzwert g.

Beispiel: $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, Definitionslücke an der Stelle $x = x_0 = 2$.

$$
\begin{aligned}
g &= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2}(x + 2) = 4\,.
\end{aligned}
$$

Die Lücke an der Stelle $x_0 = 2$ kann durch Einsetzen von $g = 4$ geschlossen und damit die Unstetigkeit der Funktion $f(x)$ behoben werden.

6.2.2 Nicht hebbare Definitionslücken

- **Sprungstellen mit endlicher Sprunghöhe**

  Beispiel: $y = \dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}$, Definitionslücke an der Stelle $x = x_0 = 0$.

  $$\textbf{Grenzwert von rechts:} \quad g_+ = \lim_{x\to 0+} \frac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0$$

  $$\text{mit} \quad \lim_{\substack{x\to 0_+ \\ x>0}} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}} = „2^{\infty}“ = \infty\ .$$

  $$\textbf{Grenzwert von links:} \quad g_- = \lim_{x\to 0-} \frac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 2$$

  $$\text{mit} \quad \lim_{\substack{x\to 0_- \\ x<0}} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0_+ \\ x>0}} 2^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}} = „\frac{1}{\infty}“ = 0\ .$$

  Außerdem gilt mit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$:

  $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-2^{\frac{1}{x}}} = 1\ .$$

  Die (endliche) Sprunghöhe an der Stelle $x_0 = 0$ ist somit gleich 2 und die Funktion strebt für $\pm\infty$ gegen 1.

- **Sprungstellen mit unendlicher Sprunghöhe**

  Sprungstellen (Definitionslücken) mit unendlicher Sprunghöhe sind **Unendlichkeitsstellen** einer Funktion, in deren Nähe die Funktionswerte von der einen Seite gegen den endlichen Grenzwert g und von der anderen Seite gegen den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ streben.[2]

  Beispiel:

  $y = 10^{\frac{1}{x}}$ besitzt die Sprungstelle $x = x_0 = 0$. Dort strebt der linke Funktionsast gegen den Grenzwert $g = 0$ und der rechte gegen den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$. Für $x \to \pm\infty$ geht die Funktion gegen 1.

- **Polstellen** (kurz Pole)

  Eine Unendlichkeitsstelle x_0, an der eine Funktionen $f(x)$ sowohl einen links- als auch einen rechtsseitigen uneigentlichen Grenzwert hat, heißt Polstelle und man sagt, die Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 einen Pol. Strebt $f(x)$ an der Stelle x_0 von beiden Seiten gegen $+\infty$ oder $-\infty$, handelt es sich um eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Strebt $f(x)$ an der Stelle x_0 von der einen Seite gegen $+\infty$ und von der anderen Seite gegen $-\infty$, handelt es sich um eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel. Die Vielfachheit der Nullstellen einer rationalen Funktion ist gleich der Ordnung der Polstellen – Polstellen mit Vorzeichenwechsel besitzen

[2] Unüblicherweise werden Sprungstellen mit unendlicher Sprunghöhe auch als einseitige Polstellen bezeichnet. In Analogie dazu werden Pole dann zweiseitige Polstellen genannt.

also eine ungerade und Polstellen ohne Vorzeichenwechsel eine gerade Ordnung. Polstellen gehören zu den isolierten Singularitäten.

Beispiele:

$y = \frac{1}{x}$ besitzt die Polstelle $x = x_0 = 0$. Dort strebt der linke Funktionsast gegen $-\infty$ und der rechte gegen $+\infty$. Es handelt sich um eine **Polstelle mit Vorzeichenwechsel** (erster bzw. ungerader Ordnung).

$y = \frac{1}{x^2}$ besitzt die Polstelle $x = x_0 = 0$. Dort strebt die Funktion, also sowohl der linke als auch der rechte Funktionsast, gegen $+\infty$. Es handelt sich um eine **Polstelle ohne Vorzeichenwechsel** (zweiter bzw. gerader Ordnung).

Definitionslücken (Unstetigkeitsstellen) mit unendlicher Sprunghöhe lassen sich nicht schließen, d. h., sie sind nicht hebbar.

7 Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Siehe und vergleiche Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1, 10. Auflage, Verlag Vieweg, 2001, Abschnitt 4.2 und 4.3 , Seite 169 bis Seite 178.

Definition: Grenzwert einer Funktion für $\boldsymbol{x \to x_0}$

Ist eine Funktion $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 definiert und gilt für **jede** im Definitionsbereich der Funktion liegende und gegen die Stelle x_0 konvergierende Zahlenfolge $\{x_n\}$ mit $x_n \neq 0$ **stets**

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \ ,$$

so heißt g der Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x_0 , d. h., der Grenzwert g ist gleich dem Limes von $f(x)$ für x gegen x_0 :

$$g = \lim_{x \to x_0} f(x) \ .$$

$f(x)$ muss nicht an der Stelle x_0 selbst, aber unbedingt in der Umgebung von x_0 definiert sein! Beispielsweise besitzt die gebrochenrationale Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

eine Definitionslücke (Unstetigkeitsstelle) an der Stelle $x = x_0 = -1$, allerdings mit dem dortigen Grenzwert

$$g_+ = g_- = g = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2 \ .$$

Wie man sieht, ist diese Definitionslücke hebbar, sodass mit g aus der unstetigen Funktion $f(x)$ die stetige Funktion

$$\phi(x) = \left\{ \begin{array}{lll} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1 & \text{für} & x \neq -1 \\ \\ \quad g = -2 & \text{für} & x = -1 \end{array} \right\} = x - 1 \quad \forall \mathbb{R}$$

resultiert.

Definition: Grenzwert einer Funktion für $\boldsymbol{x \to \pm\infty}$

Besitzt eine Funktion $f(x)$ die Eigenschaft, dass die Folge ihrer Funktionswerte $\{f(x_n)\}$ für **jede** über alle Grenzen hinaus wachsende bzw. kleiner werdende Zahlenfolge $\{x_n\}$ mit $x_n \in D$ gegen eine Zahl g strebt, so heißt g der Grenzwert der Funktion für $x \to \infty$ bzw. für $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = g \ .$$

Die nicht endlichen Grenzwerte $+\infty$ und $-\infty$ heißen uneigentliche Grenzwerte.

Rechenregeln

Die Rechenregeln für Grenzwerte g von Funktionen $f(x)$ gehen hervor aus den Grenzwertgesetzen für Zahlenfolgen. Voraussetzung für ihre Gültigkeit ist die Existenz der Grenzwerte.

- $$\lim_{x\to x_0}\Big[C\cdot f(x)\Big] = C\cdot\Big[\lim_{x\to x_0} f(x)\Big] \qquad (C:\ \text{Konstante}) \tag{2}$$
- $$\lim_{x\to x_0}\Big[f(x)\pm g(x)\Big] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{3}$$
- $$\lim_{x\to x_0}\Big[f(x)\cdot g(x)\Big] = \Big[\lim_{x\to x_0} f(x)\Big]\cdot\Big[\lim_{x\to x_0} g(x)\Big] \tag{4}$$
- $$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \qquad \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right) \tag{5}$$
- $$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} \tag{6}$$
- $$\lim_{x\to x_0}\Big[f(x)\Big]^n = \Big[\lim_{x\to x_0} f(x)\Big]^n \tag{7}$$
- $$\lim_{x\to x_0}\Big[a^{f(x)}\Big] = a^{[\lim_{x\to x_0} f(x)]} \tag{8}$$
- $$\lim_{x\to x_0}\Big[\log_a f(x)\Big] = \log_a\Big[\lim_{x\to x_0} f(x)\Big] \tag{9}$$

Diese Regeln gelten in gleicher Weise für Grenzwerte $x\to+\infty$ und $x\to-\infty$.

Grenzwerte von Funktionen lassen sich nicht nur rein rechnerisch, sondern manchmal auch durch logische Schlussfolgerungen ermitteln, wie wir im folgenden Standardbeispiel mit der Anwendung des **Einschließungssatzes** demonstrieren.

Beweis für
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \;=\; 1\ : \tag{10}$$
Wie man leicht graphisch veranschaulichen kann, gelten für den Winkelbereich (im Bogenmaß[3]) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ die Ungleichungen
$$\sin x \;<\; x \;<\; \tan x \quad \xrightarrow{:\sin x} \quad 1 \;<\; \frac{x}{\sin x} \;<\; \frac{1}{\cos x}\ .$$
Reziprok resultiert daraus die Ungleichung
$$1 \;>\; \frac{\sin x}{x} \;>\; \cos x\ .$$

[3]Winkel werden in der Wissenschaft vorzugsweise im Bogenmaß φ angegeben. Der Vollwinkel (des Vollkreises) beträgt $\varphi = 2\pi\,\text{rad}$ und ergibt sich aus dem Kreisradius r und der Bogenlänge b des Kreisumfangs $2\pi\cdot r = b$ mit $\varphi_{\text{Vollwinkel}} = \frac{b}{r} = \frac{2\pi\cdot r}{r} = 2\pi$. Allgemein ist also das Bogenmaß $\varphi = \frac{b}{r}$. Die dimensionslose Maßeinheit „rad“ (Radiant) wird allgemein nicht angegeben.

Mit den Grenzwerten $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ muss auf Grund des Einschließungssatzes auch der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ gelten.

8 Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen

Zu diesem Thema zitieren wir in den folgenden zwei Rahmenboxen auszugsweise den Abschnitt „17.4. Stetigkeit von Funktionen“ und den Abschnitt „18.1.1.5. Differenzierbarkeit und Stetigkeit“ aus dem Nachschlagebuch für Grundlagenfächer – Mathematik von Hans Simon, Kurt Stahl und Helmut Grabowski, 13. Auflage 1979, VEB Fachbuchverlag Leipzig, Seite 476 und Seite 485.

17.4. Stetigkeit von Funktionen

Definition

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **stetig an der Stelle** $x = x_g$, wenn gleichzeitig folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

1. An der Stelle $x = x_g$ existiert ein endlicher zweiseitiger Grenzwert g.
2. Die Funktion ist an dieser Stelle erklärt.
3. Der Funktionswert ist an dieser Stelle gleich dem Grenzwert g, also $g = \lim\limits_{x\to x_g} f(x) = f(x_g)$.

Trifft das bei einer Funktion für alle Stellen in einem gewissen Intervall zu, so wird die Funktion **stetig in diesem Intervall** genannt. Wenn eine Funktion an einer Stelle $x = x_g$ nicht stetig ist, so heißt sie dort **unstetig**. Es gibt verschiedene Arten von Unstetigkeit. Besonders wichtig sind die folgenden:

1. **Sprung**: An dieser Stelle existieren zwei verschiedene einseitige Grenzwerte $g_l \neq g_r \ldots$.
2. **Pol**: Sowohl links- als auch rechtsseitiger Grenzwert sind uneigentliche Grenzwerte. Dabei ist es unwesentlich, ob diese übereinstimmen oder nicht.
3. **Lücke**: In diesem Fall existieren an dieser Stelle zwei gleiche einseitige Grenzwerte $g_l = g_r$, die Funktion selbst ist dort aber nicht erklärt … .

Das Stetigkeitsverhalten hängt u. a. vom betrachteten Intervall ab.

Beispiel

Die Funktion $y = x^{-1}$ ist stetig für $0 < x < +\infty$ und für $-\infty < x < 0$, sie ist unstetig an der Stelle $x = 0$ (Pol).

Sicher sind die Funktionen $y = c$ und $y = x$ im Intervall $-\infty < x < +\infty$ stetig. Da aber als Folge der Grenzwertsätze mit zwei im Intervall $a < x < b$ stetigen Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ auch die Funktionen $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ und [falls $f_2 \neq 0$] $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ in diesem Intervall stetig sind, folgt hieraus:

1. Alle ganzrationalen Funktionen sind für $-\infty < x < +\infty$ stetig.
2. Die gebrochenrationalen Funktionen sind dort unstetig, wo die Nennerfunktion verschwindet. In den Zwischenintervallen sind sie stetig.

18.1.1.5. Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Ist eine Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ und in einer solchen Umgebung erklärt, daß auch $x = x_0 + h$ darin liegt, so gilt:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \quad (h \neq 0)$$

Ist $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ außerdem differenzierbar, so folgt … unter der Voraussetzung, daß die Grenzwerte existieren:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \big[f(x_0 + h) - f(x_0)\big] &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \,, \\
\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) - \lim_{h\to 0} f(x_0) &= f'(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} h \\
&= f'(x_0) \cdot 0 \;=\; 0 \,.
\end{aligned}$$

Also gilt $$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) \;=\; \lim_{h\to 0} f(x_0) \;=\; f(x_0)\,.$$
Das ist aber (vgl. 17.4.1.) die Bedingung für die Stetigkeit von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$, die offenbar aus der Differenzierbarkeit folgt.

- Ist eine Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.

Beachte:

1. Die Umkehrung dieses Satzes ergibt keine wahre Aussage; eine an einer Stelle stetige Funktion braucht dort nicht unbedingt differenzierbar zu sein.

   Beispiel
   $$y = f(x) = |x|$$
   Diese Funktion ist an der Stelle $x = x_0 = 0$ zwar stetig, aber dort nicht differenzierbar, da $\left\{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right\}$ für verschiedene Nullfolgen $\{h_n\}$ verschiedenen Werten, nämlich +1 und -1, zustrebt, also $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ nicht existiert.

2. Die Existenz einer Tangente in einem Punkt des Bildes einer Funktion bedeutet nicht, daß diese an dieser Stelle unbedingt differenzierbar sein müßte.

   Beispiel
   Das Bild der Funktion $y = \sqrt{x}$ hat im Punkt 0 $(0;0)$ die y-Achse zur Tangente. Als Differentialquotient ergibt sich aber:
   $$\begin{aligned}
   &\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}\right) \cdot \left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)}{h \cdot \left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} \\
   &= \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h\left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} \\
   &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \,.
   \end{aligned}$$
   Dieser Ausdruck ist aber für $x = x_0$ nicht erklärt.

Stetigkeit ist notwendig aber nicht hinreichend für Differenzierbarkeit – Differenzierbarkeit ist nicht notwendig aber hinreichend für Stetigkeit.

Die Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ bedeutet, dass die Funktionskurve an dieser Stelle **eine eindeutig** bestimmte Tangente mit **endlicher** Steigung besitzt.

Definition nach <www.math-grain.de> :

Eine Funktion ist an einer Stelle **nicht differenzierbar**, wenn dort die linksseitige und die rechtsseitige Ableitung verschieden sind. Bei einer **Knickstelle** ist das immer der Fall. Liegt eine solche Knickstelle in einem Intervall I , so wird die Funktion als nicht differenzierbar im Intervall I bezeichnet.

Standardbeispiel Betragsfunktion:

Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x = x_0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar. Um dies zu zeigen, zerlegen wir die Betragsfunktion die zwei abschnittsweise definierten Teilfunktionen g und h:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} g(x) = -x & \text{für} \quad x < 0 \quad \text{bzw. für} \quad x \leq 0 \\ h(x) = x & \text{für} \quad x \geq 0 \quad \text{bzw. für} \quad x > 0 \end{cases} \quad .$$

An der Knickstelle $x = x_0 = 0$ stimmt die linksseitige Ableitung

$$f'_{-}(0) = g'(0) = g'(x) = -1$$

nicht überein mit der rechtsseitigen Ableitung

$$f'_{+}(0) = h'(0) = h'(x) = 1 \ .$$

9 Das Rechnen mit Differentialen

Ohne die Beherrschung zumindest der Grundlagen der Differential- und Integralrechnung als Teilgebiete der Analysis ist eine tiefergehende Beschäftigung mit physikalischen Problemen kaum vorstellbar. Deshalb ist es ggf. ratsam, sich entsprechende Kenntnisse evl. auch im Selbststudium anzueignen. Hierfür besonders geeignet ist für den Anfang z. B. das Springer-Lehrbuch Mathematik für Physiker von Klaus Weltner.

Ohne den Anspruch auf mathematische Vollständigkeit wollen wir die Begriffe Differential und Differentialquotient anhand der Abbildung 1 und anschließend die Begriffe bestimmtes und unbestimmtes Integral skizzieren.

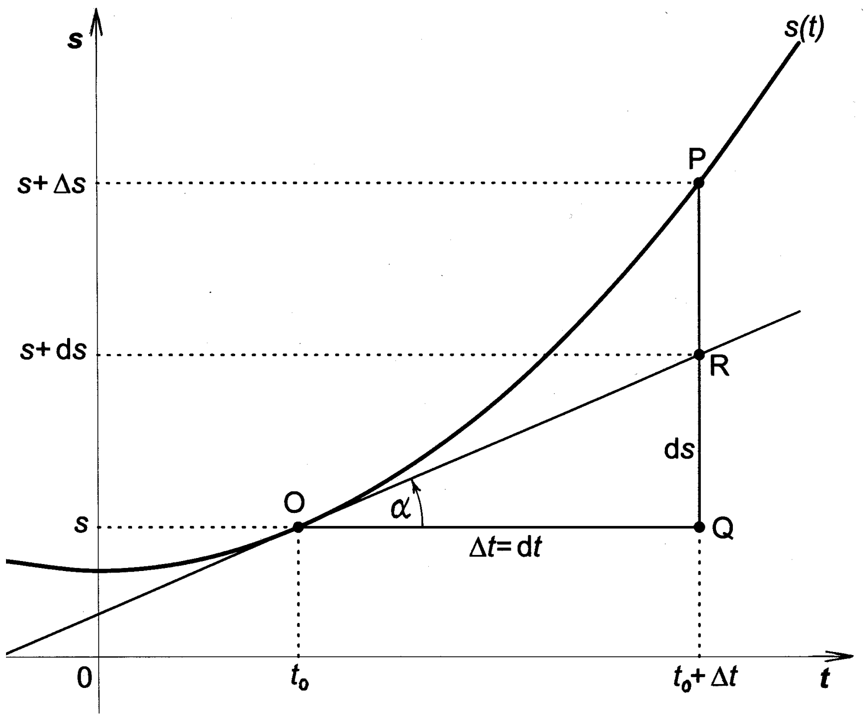


Abb. 1 Geometrische Veranschaulichung der Differentiale $\mathrm{d}s$ und $\mathrm{d}t$ sowie des Differentialquotienten $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \tan\alpha$ im Punkt $s(t_0)$ der Funktion $s(t)$.

9.1 Differentialrechnung

Gegeben sei eine glatte Funktion $s(t)$, also eine stetige, von t abhängige Funktion ohne „Knick“. Beispielsweise kann die unabhängige Variable t die Zeit und die abhängige Variable s die in der Zeit zurückgelegte Weglänge sein. Während die Zeit t ausgehend von t_0 um Δt (Strecke $\overline{\mathrm{OQ}}$) fortschreitet, ändert sich die Funktion $s(t)$ um $\Delta s = s(t_0{+}\Delta t){-}s(t_0)$ (Strecke $\overline{\mathrm{QP}}$). Jetzt legen wir im Punkt $s(t_0)$ (Punkt O) eine Tangente an die Kurve $s(t)$. Die Tangente schneidet die Strecke $\overline{\mathrm{OP}}$ im Punkt R. Die Strecke

$$\overline{\mathrm{QR}} =: \mathrm{d}s$$

ist die geometrische Darstellung des Differentials der Funktion $s(t)$ bzw. des **abhängigen Differentials**. Für das zugehörige Differential des Arguments bzw. der unabhängigen Variablen t, also für das **unabhängige Differential**, hatten wir dabei die

Strecke

$$\overline{\mathrm{OQ}} =: \Delta t = \mathrm{d}t$$

gewählt.

Das Differential $\mathrm{d}s$ ist folglich die lineare Näherung für die Änderung Δs . Die Näherung ist um so besser, je mehr sich der Punkt Q dem Punkt O nähert bzw. je kleiner wir das Differential $\mathrm{d}t$ wählen. Bei linearen Funktionen $s(t)$ ist die Tangente an jeden Punkt der Kurve identisch mit der Kurve selbst, so dass in diesem Fall $\mathrm{d}s = \Delta s$ gilt.

Der Quotient aus den Differentialen $\mathrm{d}s$ und $\mathrm{d}t$ bezüglich $s(t_0)$, also der **Differentialquotient** $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ an der Stelle t_0, ist geometrisch die Steigung $\tan\alpha$ der Tangente an den Kurvenpunkt $s(t_0)$ (Abbildung 1). Je kleiner wir im **Differenzenquotienten** $\Delta s/\Delta t$ das Intervall Δt wählen, desto mehr nähert sich der Differenzenquotient dem Differentialquotienten an, sodass für den Differentialquotienten von $s(t)$ an der Stelle t_0 gilt:

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = \lim_{\Delta t\to 0} \left.\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|_{t_0} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)\ .$$

Diesen Grenzwert können wir für alle t aus dem Definitionsbereich der Funktion $s(t)$ bilden, so dass wir eine Funktion des Grenzwertes bzw. des Differentialquotienten in Abhängigkeit von t erhalten. Diese Funktion heißt Ableitung

$$s'(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = v(t) \tag{11}$$

der Funktion $s(t)$. Die Ableitung $s'(t)$ der Funktion $s(t)$ liefert uns für jeden Zeitpunkt t die **momentane Änderung** des Weges s pro zugehöriger Änderung der Zeit t, also die Geschwindigkeit

$$v(t) = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\ . \tag{12}$$

Die Ableitung bzw. momentane Änderung von s zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = t_0$ ist schließlich die Änderung von s **pro Zeiteinheit**[4], also die Geschwindigkeit v , zum Zeitpunkt t_0 entsprechend der Tangente an die Kurve $s(t)$ an der Stelle t_0. Diese Tangente ist der Graph einer linearen Weg-Zeit-Funktion mit der Steigung bzw. Ableitung $v(t_0)$.

Ausgehend von (12) schreiben wir für das abhängige Differential, d. h. für das Weglängendifferential

$$\mathrm{d}s = s'(t)\mathrm{d}t = v(t)\mathrm{d}t\ .$$

9.2 Integralrechnung

Wir wollen jetzt aus der Funktion $s'(t)$ die Änderung Δs in den Grenzen von t_0 und t berechnen. Dazu teilen wir Δt in N Abschnitte Δt_i, so dass $\sum_{i=1}^{N} \Delta t_i = \Delta t$. Wenn die Teilbereiche Δt_i klein im Vergleich zu Δt gewählt werden, erhält man mit je einem

[4] Man kann sich überlegen, dass ein Quotient $\frac{Z}{N}$ immer die Anzahl der Z-Einheiten pro (einer) N-Einheit ergibt.

Funktionswert $s'(t_i)$ aus jedem Teilbereich Δt_i die Näherung bzw. die **Riemann-Summe**

$$\sum_{i=1}^{N} s'(t_i) \cdot \Delta t_i = \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t_i} \cdot \Delta t_i = \sum_{i=1}^{N} v(t_i) \cdot \Delta t_i \approx \Delta s \ . \tag{13}$$

Je kleiner wir die Intervalle Δt_i in der Riemann-Summe wählen, desto größer wird die Anzahl N der Intervalle in den Grenzen von t_0 bis $t_0 + \Delta t$ und desto besser wird die Näherung. Im Grenzfall für $\Delta t_i \to 0$ bzw. $N \to \infty$ erhalten wir aus der Näherungsgleichung (13) die exakte Änderung Δs :

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} s'(t_i) \cdot \Delta t_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} v(t_i) \cdot \Delta t_i =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} s'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} v(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{s(t_0)}^{s(t_0+\Delta t)} \mathrm{d}s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \Delta s \ .$$

Der Ausdruck

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} s'(t)\mathrm{d}t = \Delta s \tag{14}$$

heißt **bestimmtes Integral**[5]. Es hat nämlich wegen seiner Integrationsgrenzen einen eindeutig bestimmbaren Wert.

Wie wir sehen, ist das Integralzeichen der Befehl zur Summation über eine unendliche Anzahl von *infinitesimal kleinen Differentialen* $\mathrm{d}s = s'(t)\mathrm{d}t = v(t)\mathrm{d}t$. Geometrisch ist das bestimmte Integral (14) der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $s'(t)$ in den Grenzen von t_0 und $t_0 + \Delta t$.

Das **unbestimmte Integral** über $s'(t)$ hat keine Integrationsgrenzen und liefert uns die **Stammfunktion** zu $s'(t)$:

$$\int s'(t)\mathrm{d}t = s(t) + C \ . \tag{15}$$

Die **Integrationskonstante** C hängt von den Anfangsbedingungen ab. Bilden wir die Ableitung der Stammfunktion, so verschwindet die Integrationskonstante, weil die Änderung oder Ableitung einer Konstanten gleich Null ist. Wir erhalten deshalb aus (15) wieder

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(s(t) + C\big) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = s'(t) + 0 = s'(t) \ .$$

Differentiation und Integration sind zueinander Umkehroperationen. Sinngemäß liefern uns die Differentiation einen „Quotienten aus Differenzen“ und die Integration eine „Summe von Produkten“.

[5] Dieses bestimmte Integral als Beispiel wird gelesen: „Integral über $s'(t)$ $\mathrm{d}t$ in den Grenzen von t_0 bis $t_0 + \Delta t$ gleich Δs“ oder kurz: „Integral $s'(t)$ $\mathrm{d}t$ von t_0 bis $t_0 + \Delta t$ gleich Δs“.

9.3 Beispiele

Im Gegensatz zur Tatsache, dass die Integration über unendlich kleine Differentiale erfolgt, sind Differentiale allgemein keine unendlich kleinen Größen. Dessen ungeachtet ist es in der Physik üblich, Differentiale als unendlich kleine Änderungen von Größen anzusehen und mit ihnen zu rechnen, d. h., auf sie die Grundrechenarten anzuwenden. Das führt oft auf bequeme Weise zu exakten Ergebnissen, wenn die Differenzierbarkeit bzw. die Integrabilität der betrachteten Funktionen voraussetzt werden darf. Dies werde für die folgenden veranschaulichenden Beispiele angenommen.

- Gegeben sei die Weg-Zeit-Funktion $x(t) = t^2$. Die Differentiationsregel für Potenzfunktionen ist
  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a \cdot x^n + C) = a \cdot nx^{n-1} \ .$$
  Dann ist die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion
  $$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^2 = 2t$$
  und das abhängige Differential $\mathrm{d}x = v(t)\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}t$.

- Gegeben sei die verkettete Funktion $v \circ x = v\big(x(t)\big)$ mit $v(x) = x/2$ und $x(t) = t^2$. Die Ableitung von $v\big(x(t)\big) = t^2/2$ nach t erhalten wir durch Anwendung der Kettenregel:
  $$\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \cdot 2t = \frac{\mathrm{d}v\big(x(t)\big)}{\mathrm{d}t} = t \ .$$
  Man kommt direkt zum Ergebnis, wenn man $\mathrm{d}x$ „herauskürzt“ und für v die Funktion $v\big(x(t)\big)$ einsetzt.

- Im kartesischen Koordinatensystem gilt für das Geschwindigkeitsquadrat unter Berücksichtigung von (11)
  $$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ &= \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{(\Delta t)^2} \\ v^2 &= \frac{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}{(\mathrm{d}t)^2} \ . \end{aligned} \tag{16}$$
  Es ist üblich, bei Potenzen der Koordinatendifferentiale zur Vereinfachung auf die Klammern zu verzichten. So erhalten wir aus (16) für das Geschwindigkeitsquadrat
  $$v^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2}$$
  und für das Differential des räumlichen Abstandsquadrats
  $$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = v^2\mathrm{d}t^2 \ .$$

- Ein Körper werde ab dem Zeitpunkt $t = 0$ mit $a(t) = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = t$ beschleunigt. Bei $t = 0$ habe der Körper die Anfangsgeschwindigkeit $C = v_0 = 4$. Welche Geschwindigkeit hat er dann bei $t_1 = 2$ und bei $t_2 = 8$?

  Die Integrationsregel für Potenzfunktionen ist

$$\int a \cdot x^n \mathrm{d}x = a \cdot \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \, .$$

  Aus dem Geschwindigkeitsdifferential $\mathrm{d}v(t) = a(t)\mathrm{d}t$ erhalten wir

$$v(t) = \int \mathrm{d}v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + v_0 = \frac{1}{2}t^2 + 4 \, .$$

  Die gesuchten Geschwindigkeiten sind also $v(t_1) = v_1 = 6$ und $v(t_2) = v_2 = 36$. Der Körper hat also seine Geschwindigkeit in der Zeit von t_1 bis t_2 von 6 auf 36 erhöht. Diese Geschwindigkeitsänderung um 30 liefert uns das bestimmte Integral:

$$v_2 - v_1 = \int\limits_{v_1}^{v_2} \mathrm{d}v = \int\limits_{t_1=2}^{t_2=8} t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 \bigg|_{t_1=2}^{t_2=8} = 32 - 2 = 30 \, .$$

  Die Integrationskonstante $v_0 = 4$ brauchen wir beim bestimmten Integral nicht zu berücksichtigen, denn sie fällt bei der Subtraktion $v_2 - v_1 = (32+4) - (2+4)$ heraus.

10 Veranschaulichung der Integralrechnung am Beispiel des Arbeitsintegrals

An drei einfachen Beispielen wollen wir uns den Begriff des bestimmten Integrals veranschaulichen. Dabei werden wir uns zur Vereinfachung nur auf dem positiven Ast der x-Achse bewegen. Für den Weg verwenden wir also die Variable x und für die zurückgelegte Weglänge von $x = 0$ bis $x = b$

$$b - 0 = b =: \text{zurückgelegte Weglänge} \tag{17}$$

sowie von $x = a$ bis $x = b$ für $0 < a < b$

$$b - a =: \text{zurückgelegte Weglänge.} \tag{18}$$

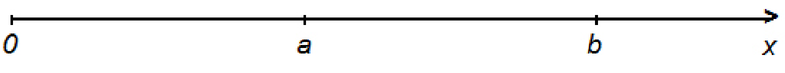


Abb. 2 In Richtung der x-Achse zurückgelegte Weglängen.

Weiterhin werden die Begriffe unbestimmtes Integral und Stammfunktion eingeführt und es wird auf den Zusammenhang zwischen Integral- und Differentialrechnung hingewiesen sowie die Integrationsregel für Potenzfunktionen erwähnt. Ebenfalls zur Vereinfachung werden wir auf die Maßeinheiten der physikalischen Größen verzichten.

Die mathematisch-korrekte Herleitung der Integralrechnung mit den entsprechenden Beweisführungen und die Darstellung der Integrabilitätsbedingungen sowie die Herleitung der Integrationsregeln sind Angelegenheiten des Mathematikunterrichts. In den folgenden Ausführungen kommt es uns nur auf Veranschaulichung und nicht auf mathematische Vollständigkeit an.

10.1 (I) $F = const = c$

Im einfachsten Fall ist die längs eines Weges wirkende Kraft konstant. Z. B. wirke auf einen Rollwagen auf einer schiefen Ebene die konstante Hangabtriebskraft F_H, die den Wagen gleichmäßig bergab beschleunigt, wenn keine anderen Kräfte auf ihn wirken. Auch wollen wir „Reibungsverluste“ ausschließen. Ziehen wir jetzt diesen Wagen mit konstanter Geschwindigkeit bergauf, so ziehen wir entlang des Weges mit konstanter Kraft F, die betragsgleich aber entgegengesetzt zu F_H gerichtet ist. Dabei müssen wir mechanische Energie[6] aufwenden, d. h., wir verrichten Arbeit. In diesem Fall konstanter Kraft F ist die Arbeit ΔW das Produkt aus der längs des Weges wirkenden Kraft F und der zurückgelegten Weglänge b, also

$$\Delta W = F \cdot b \quad \text{für} \quad F = const = c \,. \tag{19}$$

Wir können $F = c$ als eine Funktion des Weges ansehen und über x auftragen:

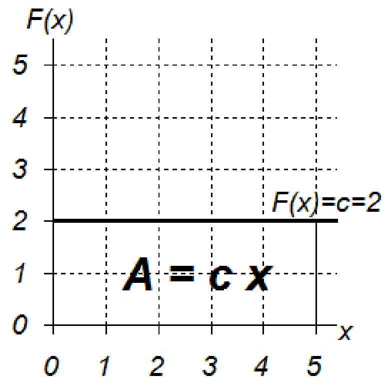


Abb. 3 Die Kraft F ist konstant längs des Weges x.

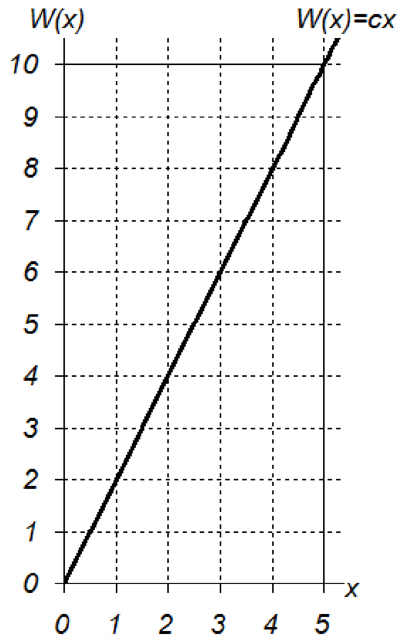


Abb. 4 Bei konstanter Kraft $F(x) = c$ wird die verrichtete Arbeit durch die lineare Funktion $W(x) = c \cdot x$ beschrieben.

[6] Die Energie ist eine abstrakte, allein rechnerisch ermittelbare physikalische Größe, also eine Bilanzgröße, die in verschiedenen Formen erscheint, welche unter bestimmten Voraussetzungen ineinander überführt werden können. Die mechanische Energie bzw. Arbeit ist eine dieser Energieformen. Allein in der Ruhemasse von Objekten nimmt die Energie auf Grund der relativistischen Masse-Energie-Äquivalenz $E_0 = m_0 \cdot c^2$ eine „greifbare“ Form an. Die Energie ist eine Erhaltungsgröße, d. h., sie bleibt in einem abgeschlossenen System erhalten, ist also dort konstant.

Wir sehen, dass die auf dem Weg von $x = 0$ bis b verrichtete Arbeit $\Delta W = F \cdot b$ genau dem Flächeninhalt A des Rechtecks unter dem Graphen von $F(x)$ im Bereich von $x = 0$ bis b entspricht. Wegen $F = const = c \quad \Rightarrow \quad \Delta W \propto b$ nehmen die Arbeit und der Flächeninhalt unter dem Graphen $F(x)$ linear mit dem zurückgelegten Weg zu. Wir können auch ΔW als Funktion des Weges ansehen und über x auftragen. Wenn wir willkürlich festlegen, dass $\Delta W(x = 0) = 0$ sei, können wir entsprechend der Abbildung 4 für $\Delta W(x)$ auch $W(x) = c \cdot x$ schreiben und „zählen" die verrichtete Arbeit $\Delta W(x) = W(x)$ ab $x = 0$.

10.2 (II) $F \neq const$ am Beispiel $F = x$

Betrachten wir eine Spiralfeder aus Federstahl, wie sie z. B. in Federwaagen Verwendung findet. Das elastische Verhalten von Spiralfedern lässt sich für kleine Auslenkungen in guter Näherung durch das **Hooke'sche Gesetz** beschreiben, dem zufolge der Betrag der rücktreibenden Kraft proportional zum Betrag der Auslenkung ist. In Ruhelage der Feder ist die rücktreibende Kraft gleich Null.

Die Ruhelage soll $x = 0$ sein. Um eine bestimmte Auslenkung b aus der Ruhelage zu erreichen, benötigen wir die auslenkende Kraft $F = F(b)$, die betragsgleich aber entgegengesetzt gerichtet ist zur rücktreibenden Kraft. Für die auslenkende Kraft in Ruhelage der Feder gilt also $F(x = 0) = 0$. Bei jeder Auslenkung x befinden sich entsprechend dem 3. Newton'schen Axiom (actio = reactio) die auslenkende Kraft F und die rücktreibende Federkraft im Gleichgewicht.

Wie in Abbildung 5 dargestellt, hänge die auslenkende Kraft mit der Funktion $F = F(x) = x$ linear von der Auslenkung ab:

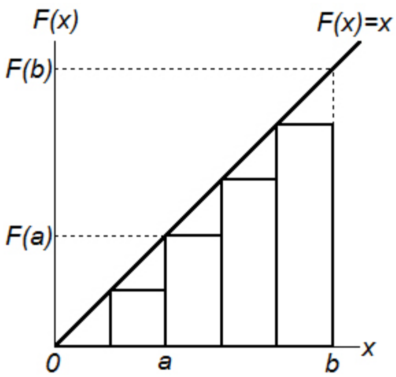


Abb. 5 Man beachte, dass die Höhe des ersten Rechtecks =0 ist.

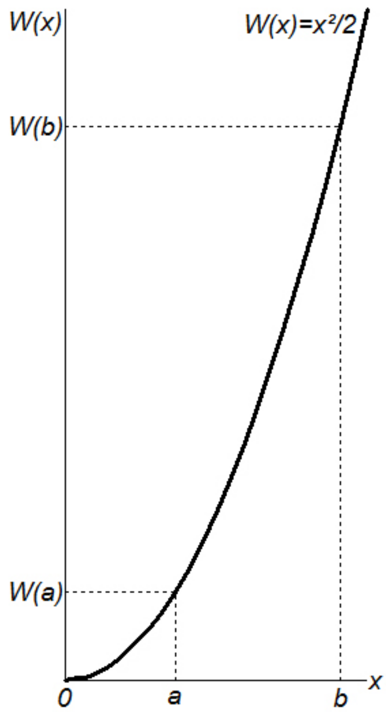


Abb. 6 Die $W(x)$-Achse ist gestaucht dargestellt.

Wir „zählen" die verrichtete Arbeit von $x = 0$ bis b. Da aber die Kraft nicht konstant ist, lässt sich die Arbeit nicht einfach als Produkt aus Kraft und zurückgelegter Weglänge bzw. Auslenkung berechnen. Deshalb bestimmen wir die verrichtete Arbeit zunächst nur näherungsweise, indem wir die Fläche unter dem Graphen $F(x)$ in $n = 5$ Rechtecke gleicher Breite $\Delta x_i = \Delta x$ unterteilen, wobei der Laufindex i von 1 bis $n = 5$ läuft. Die Breite dieser Rechtecke ist dann

$$\Delta x = \frac{b}{n} = \frac{b}{5} \tag{20}$$

und die linke Seite der Rechtecke hat jeweils die Höhe

$$F(x) = F\big(x_i\big) = F\big((i-1)\cdot\Delta x\big) = (i-1)\cdot\Delta x\ , \quad i = 1,\,2,\,3,\,\dots\,,n\ .$$

Jetzt können wir für jeden der $n = 5$ Wegabschnitte Δx_i die zugehörige (genäherte) Arbeit

$$\Delta W_i = F\big(x_i\big)\cdot\Delta x_i = F\big(x_i\big)\cdot\Delta x = (i-1)\cdot\Delta x\cdot\Delta x = (i-1)\cdot\big(\Delta x\big)^2 \tag{21}$$

berechnen. Es handelt sich hierbei wohlgemerkt nur um Näherungen, weil wir annehmen, dass die Kraft $F\big(x_i\big)$ innerhalb des jeweils zugehörigen Wegabschnitt Δx_i konstant sei. Schließlich addieren wir alle n Teilarbeiten ΔW_i und erhalten die genäherte verrichtete Gesamtarbeit

$$\Delta W \approx \sum_{i=1}^{n}\Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F\big(x_i\big)\cdot\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(i-1)\cdot\big(\Delta x\big)^2\ .$$

Der Abbildung 5 entnehmen wir außerdem, dass wir uns den exakten Werten der Teilarbeiten ΔW_i um so mehr annähern, je schmaler wir die Rechtecke wählen, d. h. je kleiner wir Δx wählen und damit die Anzahl n der Rechtecke im Bereich von $x = 0$ bis b vergrößern. Im Grenzfall für $\Delta x \to 0$ bzw. für $n \to \infty$ erhalten wir dann die exakte Gesamtarbeit

$$\Delta W = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} F\big(x_i\big)\cdot\Delta x = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n}(i-1)\cdot\big(\Delta x\big)^2\ . \tag{22}$$

Wir bestimmen jetzt diesen Grenzwert. Dazu setzen wir (20) in (22) ein und erhalten ersteinmal

$$\Delta W = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n}(i-1)\cdot\big(\Delta x\big)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2 = b^2\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)}{n^2}\ . \tag{23}$$

Für die unendliche Reihe können wir schreiben:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2}\frac{(i-1)}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2\cdot(i-1)}{n^2}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{[0+1+2+3+\cdots(n-1)]+[0+1+2+3+\cdots(n-1)]}{n^2}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{[1+(n-1)]+[2+(n-2)]+[3+(n-3)]+\cdots+[(n-1)+1]}{n^2}\\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\cdot n}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}(1-0)\ ,
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{n^2} = \frac{1}{2} \; . \tag{24}$$

(24) in (23) eingesetzt liefert die exakte Gesamtarbeit

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot b^2 \; ,$$

die bei der Auslenkung der Spiralfeder von $x = 0$ bis $x = b$ verrichtet wird. Wie wir sehen, entspricht die Arbeit ΔW dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks unter dem Graphen $F(x) = x$ von $x = 0$ bis b.
Unter der Voraussetzung, dass in Ruhelage $x = 0$ die verrichtete Arbeit $\Delta W = 0$ ist, können wir jetzt die verrichtete Arbeit für **alle** Auslenkungen $b = x \geq 0$ berechnen. Sie wird somit beschrieben durch die Funktion

$$W(x) = \frac{x^2}{2} = W(x) - W(0) = \Delta W \; , \quad W(0) = 0 \; .$$

Entsprechend Abbildung 6 wachsen die verrichtete Arbeit ΔW und die zugehörige Funktion $W(x)$ quadratisch mit x.
In Analogie zur Differentialrechnung führen wir jetzt die Notation für das bestimmte Integral ein. Wir schreiben:

$$\begin{aligned}
\Delta W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} F\big(x_i\big) \cdot \Delta x \quad &= \int\limits_{x=0}^{b} F(x) \cdot \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{x=0}^{b} x \cdot \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\bigg|_{x=b} - \frac{x^2}{2}\bigg|_{x=0} = \frac{b^2}{2} - 0 \\
&= W(b) - W(0) = W(b) \; ,
\end{aligned}$$

$$\Delta W \quad = \int\limits_{x=0}^{b} x \; \mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} \; . \tag{25}$$

$\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} F\big(x_i\big) \cdot \Delta x = \int\limits_{x=0}^{b} F(x) \; \mathrm{d}x$ lautet gelesen:

„Limes von Summe über alle $F(x_i)$ mal Δx von $i = 1$ bis n für n gegen Unendlich bzw. für Δx gegen Null ist gleich **Integral über** $F(x)$ dx **von** $x = 0$ **bis** b."

x ist die **Integrationsvariable**, nach der integriert wird und $F(x)$ heißt der **Integrand**. Dieses Integral heißt **bestimmtes Integral**, weil die Integration von einer bestimmten **unteren Integrationsgrenze**, hier $x = 0$, bis zu einer bestimmten **oberen Integrationsgrenze**, hier $x = b$, erfolgt und deshalb einen bestimmten Wert ΔW liefert.

Die Arbeit, die bei der Auslenkung der Spiralfeder von a bis b verrichtet wird, erhalten wir entsprechend den Abbildungen 5 und 6 und mit (25), indem wir die Arbeit von $x = 0$ bis a berechnen und diese dann von der Arbeit von $x = 0$ bis b subtrahieren:

$$\Delta W = \int\limits_{x=0}^{b} F(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{x=0}^{a} F(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{b^2}{2} - 0\right] - \left[\frac{a^2}{2} - 0\right] ,$$

$$\Delta W = W(b) - W(a) = \int\limits_{x=a}^{b} F(x)\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} .$$

10.3 (III) $F \neq const$ am Beispiel $F = x^2/2$

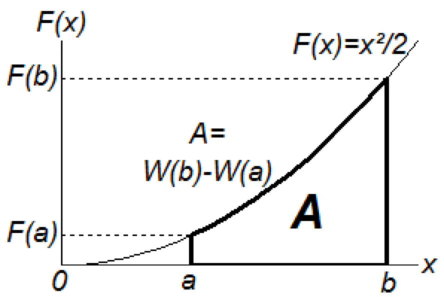


Abb. 7

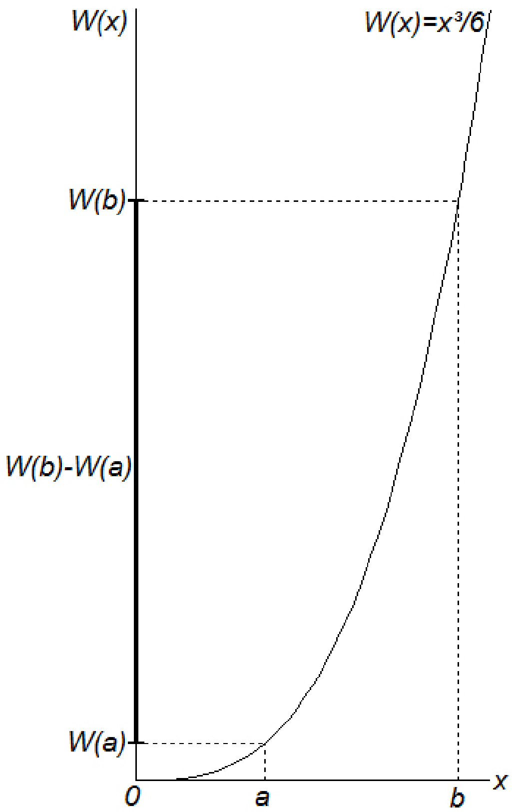


Abb. 8

Die Vorgehensweise bei der Herleitung des bestimmten Arbeitsintegrals ist hier die gleiche wie unter (II). Die verrichtete Arbeit bei $x = 0$ wird wieder gleich Null gesetzt. Gesucht wird also die Funktion $W(x)$ unter der Voraussetzung $W(0) = 0$. Wir ersetzen in den Gleichungen ab (21) die Kraft durch

$$F\big(x_i\big) = F\big((i-1)\cdot\Delta x\big) = \frac{1}{2}x_i^2 = \frac{1}{2}\Big[(i-1)\cdot\Delta x\Big]^2 , \quad i = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots\, , n$$

und erhalten mit $\Delta x = \dfrac{b}{n}$

$$\Delta W_i = F\big(x_i\big)\cdot\Delta x = \frac{1}{2}\Big[(i-1)\cdot\Delta x\Big]^2\cdot\Delta x = \frac{1}{2}(i-1)^2\cdot\big(\Delta x\big)^3 ,$$

$$
\begin{aligned}
\Delta W &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} F\big(x_i\big)\cdot\Delta x = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(i-1)^2\cdot\big(\Delta x\big)^3 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(i-1)^2\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^3 \\
\Delta W &= \frac{1}{2}\cdot b^3 \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^3}\ . \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Nebenrechnung:

Für $6\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2$ kann man schreiben:

$n=1$:	$6\cdot 1^2$	$=$	$6(1)$	$=$	$6=$	$1\cdot 2\cdot 3=$	$1(1+1)(2\cdot 1+1)$
$n=2$:	$6\cdot(1^2+2^2)$	$=$	$6(1+4)$	$=$	$30=$	$2\cdot 3\cdot 5=$	$2(2+1)(2\cdot 2+1)$
$n=3$:	$6\cdot(1^2+2^2+3^2)$	$=$	$6(1+4+9)$	$=$	$84=$	$3\cdot 4\cdot 7=$	$3(3+1)(2\cdot 3+1)$
$n=4$:	$6\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2)$	$=$	$6(1+4+9+16)$	$=$	$180=$	$4\cdot 5\cdot 9=$	$4(4+1)(2\cdot 4+1)$
n :	$6\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)$	$=$				$=$	$n(n+1)(2\cdot n+1)$

Division durch 6 liefert

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ . \quad \text{(Beweis durch vollständige Induktion.)}$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) - n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{2n^3-3n^2+n}{6} \\
&= \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad \text{und} \\
\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^3} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\ . \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Wir setzen (27) in (26) ein und bilden den Grenzwert:

$$
\begin{aligned}
\Delta W &= \frac{1}{2}\cdot b^3 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot b^3\cdot\frac{1}{3} \\
\Delta W &= \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{3}\ .
\end{aligned}
$$

Für alle Weglängen $b = x \geq 0$ gilt hier die Funktion

$$W(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} = W(x) - W(0) = \Delta W\ ,\ \ W(0) = 0$$

und das bestimmte Integral von $x = a$ bis b hat die Form

$$\Delta W = W(b) - W(a) = \int\limits_{x=a}^{b} F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)\ .$$

10.4 (IV) Integrationsregel für Potenzfunktionen

Wir haben aus den Funktionen $F(x)$ folgende Funktionen $W(x)$ ermittelt:

$$F(x) = c = c \cdot x^0 \quad \underset{\text{Differentiation}}{\overset{\text{Integration}}{\rightleftarrows}} \quad W(x) = c \cdot x = c \cdot \frac{x^1}{1} \; ,$$

$$F(x) = x = 1 \cdot x \quad \underset{\text{Differentiation}}{\overset{\text{Integration}}{\rightleftarrows}} \quad W(x) = \frac{x^2}{2} = 1 \cdot \frac{x^2}{2} \; ,$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \quad \underset{\text{Differentiation}}{\overset{\text{Integration}}{\rightleftarrows}} \quad W(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \; .$$

Wir erkennen in dieser Tabelle, dass die Differentiation die Umkehroperation der unbestimmten Integration ist. Der Begriff unbestimmtes Integral wird im folgenden Abschnitt (V) erläutert. Weiterhin zeigt die Tabelle die Regel für die Integration von Potenzfunktionen:

$$\int c \cdot x^a \; \mathrm{d}x = c \cdot \int x^a \; \mathrm{d}x = c \cdot \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \text{mit } c = const \text{ und Integrationskonstante } C \; .$$

Damit lassen sich alle Potenzfunktionen integrieren und auch Funktionen, die auf Potenzreihen zurückgeführt werden können.

10.5 (V) Erläuterungen

Das bestimmte Integral „verrichtete Arbeit" $\Delta W = W(b) - W(a)$ ist keine Zustandsgröße[7]. Die Arbeit wird verrichtet längs eines Weges, d. h., sie existiert immer nur zwischen zwei verschiedenen Punkten $W(x = a)$ und $W(x = b)$ der Funktion $W(x)$, welche man durch Integration der Funktion $F(x)$ erhält. $W(x)$ ist **eine** Stammfunktion von $F(x)$. Wenn man eine integrierbare Funktion, bezeichnen wir sie hier mit $F(x)$, ohne Verwendung von Integrationsgrenzen integriert, so erhält man eine Schar von äquidistanten Stammfunktionen $W(x) + C$, die in unserem Fall senkrecht zur x-Achse jeweils um C parallel verschoben sind. Es existiert also eine unendliche Anzahl von Stammfunktionen:

$$\int F(x)\mathrm{d}x = W(x) + C \; , \quad C = const \; .$$

Bei der Bildung des bestimmten Integrals von $x = a$ bis $x = b$ verschwindet die Integrationskonstante:

$$\Delta W = \Big(W(b) + C\Big) - \Big(W(a) + C\Big) = W(b) - W(a) \; .$$

[7] Der Zustand eines Systems wird charakterisiert durch Zustandsgrößen wie z. B. seine innere Energie. Die innere Energie hat zu jedem Zeitpunkt einen bestimmten, z. B. von der Temperatur des Systems abhängigen Funktionswert. Die Arbeit jedoch charakterisiert nicht den Zustand eines Systems, denn Arbeit wird vom System auf Kosten seiner inneren Energie verrichtet. Die Arbeit ist gleich der Änderung der inneren Energie des Systems, was mit der Schreibweise ΔW für die Differenz zwischen zwei Energiezuständen in ihren zugehörigen Weg- bzw. Zeitpunkten zum Ausdruck gebracht werden soll.

$\int F(x)\mathrm{d}x$ ist das **unbestimmte Integral** von $F(x)$. Die **Integrationskonstante** C verschwindet bei der Differentiation der Stammfunktionen, weil die Ableitung einer Konstanten gleich Null ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(W(x)+C\big)=\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}+0=\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}=F(x)\ .$$

Mit der Integrationskonstanten C werden bei der unbestimmten Integration die Anfangs- oder Randbedingungen in verallgemeinerter Form berücksichtigt. In unseren Herleitungen (I) bis (III) haben wir zur Vereinfachung $C=0$ gesetzt, indem wir $W(x)+C=W(0)+C=0+C=0$, also $W(0)=0$ vorausgesetzt haben. Bei der Lösung der folgenden anwendungsorientierten Übungsaufgabe sollte die Bedeutung von C deutlich werden.

Das Integrieren ist allgemein wesentlich aufwendiger als das Differenzieren. Deshalb gibt es Integraltabellen, deren Entstehung man sich etwa folgendermaßen vorstellen kann: Man differenziert alle möglichen und als Stammfunktionen bezeichnete (differenzierbare) Funktionen, sortiert und tabelliert die resultierenden Ableitungen und schreibt die zugehörigen Stammfunktionen rechts daneben. Leider sind analytisch bzw. mit Hilfe der Integrationsregeln exakt integrierbare Funktionen die Ausnahme. Fast alle Integrale sind nur numerisch und damit nur näherungsweise lösbar.

Sinngemäß ist das **Integral** eine **Summe von Produkten**, wobei die Anzahl der Produkte gegen Unendlich geht und die Produkte selbst Rechtecken entsprechen, deren Breite und damit auch deren Flächeninhalt gegen Null gehen.

10.6 (VI) Übungsaufgabe

Eine Punktmasse bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit v_0 in Richtung der x-Achse. Ab dem Punkt $x(t)=x(0)=x_0,\ x_0\neq 0$ wirke eine Kraft derart auf die Punktmasse, dass sie in Richtung der x-Achse mit $a(t)=12\,t^2$ beschleunigt wird. Wie lauten die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion $v(t)$ und die Weg-Zeit-Funktion $x(t)$ bis zum Zeitpunkt $t=0$ und ab dem Zeitpunkt $t=0$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $v(t)=v(0)=v_0$ und $x(t)=x(0)=x_0$? Skizziere alle Funktionen über t !

10.7 (VII) Lösung der Übungsaufgabe

Bis zum Punkt $x(t) = x(0)$ gilt:

- **Geschwindigkeit-Zeit-Funktion** $v(t) = v_0 = const\,.$
- Die Weg-Zeit-Funktion ist das unbestimmte Integral der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion über die Zeit:

$$x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int v_0\,\mathrm{d}t = v_0 \cdot t + x_0\ , \quad \text{Integrationskonstate } C = x_0\,.$$

  Weg-Zeit-Funktion $x(t) = v_0\,t + x_0$.

Ab dem Punkt $x(t) = x(0)$ gilt:

- Die **Anfangsbedingungen** sind $v(0) = v_0\ , \quad x(0) = x_0$.
- **Beschleunigung-Zeit-Funktion** $a(t) = 12\,t^2\,.$
- Die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion ist das unbestimmte Integral der Beschleunigung-Zeit-Funktion über die Zeit:

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int 12\,t^2\,\mathrm{d}t = 12 \cdot \frac{t^3}{3} + v_0 = 4\,t^3 + v_0\ ,$$

$$\text{Integrationskonstate } C = \text{Anfangsbedingung } v_0\,.$$

  Geschwindigkeit-Zeit-Funktion $v(t) = 4\,t^3 + v_0\,.$

- Die Weg-Zeit-Funktion ist das unbestimmte Integral der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion über die Zeit:

$$\begin{aligned} x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t &= \int \left(4\,t^3 + v_0\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int 4\,t^3\,\mathrm{d}t + \int v_0\,\mathrm{d}t \\ &= 4 \cdot \frac{t^4}{4} + v_0 \cdot t + x_0 \\ &= t^4 + v_0\,t + x_0\ , \end{aligned}$$

$$\text{Integrationskonstate } C = \text{Anfangsbedingung } x_0\,.$$

  Weg-Zeit-Funktion $x(t) = t^4 + v_0\,t + x_0$.

11 Wichtige Sätze für die Differentialrechnung

11.1 Satz von Rolle

Für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, stetig in $[a,b]$, differenzierbar in $]a,b[$ und mit $a < b$ gilt für den Fall

$$f(a) = f(b) \ : \quad \text{Es existiert mindestens eine Stelle } x_0 \in]a,b[\ , \text{ an der } f'(x_0) = 0\ .$$

Der Satz von Rolle ist intuitiv klar uns lässt sich leicht graphisch veranschaulichen. Deshalb verzichten wir auf seinen Beweis.

11.2 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Für eine Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, stetig in $[a,b]$, differenzierbar in $]a,b[$ und mit $a < b$, gilt:

$$\text{Es gibt mindestens eine Stelle } x_0 \in]a,b[\ , \text{ an der } \boxed{f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}\ .$$

Beweis

Wir führen die Hilfsfunktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, stetig in $[a,b]$, differenzierbar in $]a,b[$ und mit $a < b$ ein:

$$\begin{aligned} h(x) &:= f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\ , \\ \stackrel{x=a}{\Longrightarrow} \quad h(a) &= f(a)\ , \\ \stackrel{x=b}{\Longrightarrow} \quad h(b) &= f(b) - f(b) + f(a) = f(a)\ , \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad h(a) = h(b)\ .$$

$h(a) = h(b)$ ermöglicht die Anwendung des Satzes von Rolle auf die Funktion $h(x)$. Es existiert also mindestens eine Stelle $x_0 \in]a,b[$, an der $h'(x_0) = 0$ ist. Differenzieren wir $h(x)$ an der Stelle x_0, folgt daraus schließlich

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ . \ \square$$

11.3 Erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Für die beiden Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, jeweils stetig in $[a,b]$, differenzierbar in $]a,b[$ und mit $a < b$, gilt:

Es gibt mindestens eine Stelle $x_0 \in]a,b[$, an der

$$f'(x_0)\,\big[g(b) - g(a)\big] = g'(x_0)\,\big[f(b) - f(a)\big]\ .$$

Wenn außerdem $g'(x) \neq 0$ in $]a,b[\Rightarrow g'(x_0) \neq 0$ und folglich auch $g(a) \neq g(b)$ gilt, erhält der erweiterte Mittelwertsatz der Differentialrechnung nach Äquivalenzumformung die übliche Form

$$\boxed{\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}} \; ,$$

was man durch Anwenden des Mittelwertsatzes auf die beiden Funktionen f und g zeigen kann:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \; . \; \square$$

Beweis

Der Beweis für den erweiterten Mittelwertsatz ist völlig analog zu dem für den „einfachen" Mittelwertsatz. Wir führen wieder eine Hilfsfunktion

$h : [a,b] \to \mathbb{R}$, stetig in $[a,b]$, differenzierbar in $]a,b[$ und mit $a < b$ ein:

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \big[g(x) - g(a)\big] \quad \Rightarrow \quad h(a) = h(b) \; .$$

$h(a) = h(b)$ ermöglicht die Anwendung des Satzes von Rolle auf die Funktion $h(x)$. Es existiert also mindestens eine Stelle $x_0 \in]a,b[$, an der $h'(x_0) = 0$ ist. Differenzieren wir $h(x)$ an der Stelle x_0, folgt daraus schließlich

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \, g'(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \; , \quad g'(x_0) \neq 0 \, , \; g(a) \neq g(b) \; . \; \square$$

11.4 Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital

Die Bernoulli-de L'Hospital'sche Regel

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \; , \quad \text{wenn } f(x_0) = g(x_0) = 0}$$

wird manchmal spöttisch „Krankenhausregel" genannt. Sie ermöglicht in vielen Fällen die Grenzwertbildung des unbestimmten Ausdrucks

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} \; ,$$

also für den Fall, dass f und g an der Stelle x_0 den endlichen Grenzwert

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

besitzen. Voraussetzung dafür ist natürlich, dass f und g in der Umgebung von x_0 differenzierbar sind.

Herleitung durch Taylor-Entwicklung von f und g um die Stelle x_0 und unter Berücksichtigung von $f(x_0) = g(x_0) = 0$, weshalb $f(x_0)$ und $g(x_0)$ in der Taylor-Entwicklung keinen Beitrag leisten:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 + \cdots}{g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!}\,(x-x_0)^1 + \frac{g''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 + \cdots} \\ &= \frac{f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{1}{2}\,f''(x_0)\,(x-x_0)^2 + \cdots}{g'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{1}{2}\,g''(x_0)\,(x-x_0)^2 + \cdots} \quad . \end{aligned}$$

Kürzen durch $(x - x_0)$ ergibt schließlich die Taylor-Entwicklung

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}\,f''(x_0)\,(x-x_0) + \cdots}{g'(x_0) + \frac{1}{2}\,g''(x_0)\,(x-x_0) + \cdots} \quad .$$

Jetzt führen wir den Grenzübergang $x \to x_0$ durch, wobei alle Glieder mit dem Faktor $(x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, verschwinden, sodass

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0) + \frac{1}{2}\,f''(x_0)\,(x-x_0) + \cdots}{g'(x_0) + \frac{1}{2}\,g''(x_0)\,(x-x_0) + \cdots} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ . \ \square$$

Wir erweitern jetzt die Bernoulli-de L'Hospital'sche Regel auf die Grenzwertbildung von unbestimmten Ausdrücken der Form

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = „\frac{\infty}{\infty}“ \ , \tag{28}$$

also für den Fall, dass f und g an der Stelle x_0 den uneigentlichen Grenzwert

$$f(x_0) = g(x_0) \to \infty$$

besitzen. Voraussetzung dafür ist natürlich wieder, dass f und g in der Umgebung von x_0 differenzierbar sind.

Herleitung

Die Grenzwertgesetze erlauben, für (28)

$$„\frac{\infty}{\infty}“ = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)}}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}} = „\frac{0}{0}“$$

zu schreiben, sodass wir auch auf den Fall „$\frac{\infty}{\infty}$“ die Bernoulli-de L'Hospital'sche Regel anwenden können:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\big[g(x)\big]^{-1}}{\big[f(x)\big]^{-1}} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[g(x)\big]^{-1}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[f(x)\big]^{-1}} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{-\big[g(x)\big]^{-2}\cdot g'(x)}{-\big[f(x)\big]^{-2}\cdot f'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\big[f(x)\big]^{2}\cdot g'(x)}{\big[g(x)\big]^{2}\cdot f'(x)} \ . \end{aligned} \tag{29}$$

Unter Anwendung der Grenzwertgesetze erhalten wir aus (29)

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}}_{q} = \underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}}_{q^2} \cdot \lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

mit $q = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Die Division der Gleichung durch q^2 liefert

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

mit dem Kehrwert

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{für} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}} \ . \ \square$$

12 Differentiationsregeln

Siehe und vergleiche Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1, 10. Auflage, Verlag Vieweg, 2001, Kapitel 2 , Seite 316 bis Seite 332.

- [8]„ **Die Ableitung als Funktion**

  Wenn eine stetige Funktion $y = f(x)$ in einem gewissen Intervall erklärt und differenzierbar ist, können die Ableitungen $f'(x_0)$ den jeweiligen Argumenten x_0 zugeordnet werden. Auf diese Weise kann in dem gleichen Intervall eine neue Funktion definiert werden:

  $$y' = \varphi(x) = f'(x)$$

  Beachte:

  Es muß streng unterschieden werden die Ableitung einer Funktion in einem bestimmten Intervall als Funktion von der Ableitung der Funktion an einer bestimmten Stelle als eindeutig bestimmbare Zahl."

- [8]„ Der Quotient der Differentiale $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ hat für einen bestimmten Punkt P_0 für jedes beliebige $\mathrm{d}x$ denselben Wert($\tan\tau_0$), der Quotient der Differenzen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ändert für denselben Punkt P_0 aber seinen Wert ($\tan\sigma$) mit der Wahl von Δx. Im Grenzfall $\Delta x \to 0$ stimmen beide Quotienten überein:

  $$\lim_{\Delta x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\bigg|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$$

  Der Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ kann deshalb wie ein echter Quotient behandelt und umgeformt werden."

- $\mathrm{d}y$ heißt **Differential der Funktion** $y = f(x)$ an einer Stelle x_0 , $\mathrm{d}x$ heißt **Differential des Argumentes** und stets gilt:

  $$\mathrm{d}x \neq 0 \,.$$

- Die Reihenfolge der sich jetzt anschließenden Differentiationsregeln ist von Bedeutung, denn die Herleitungen greifen aufeinander zurück. Weiterhin setzen wir voraus, dass die in den Herleitungen verwendeten Funktionen auf den betrachteten Intervallen definiert und differenzierbar sind.

12.1 Faktorregel

Konstante Faktoren bleiben beim Differenzieren erhalten:

$$\boxed{y = C \cdot f(x) \qquad \Rightarrow \qquad y' = C \cdot f'(x)\,, \quad \text{Konstante } C} \,. \tag{30}$$

[8]Dieser Punkt ist zitiert aus dem Nachschlagebuch für Grundlagenfächer Mathematik von Hans Simon, Kurt Stahl und Helmut Grabowski, 13. Auflage, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1979, Seite 485.

Beweis mit der Grenzwertregel (2):

$$y = g(x) = C \cdot f(x) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
y' = g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C \cdot f(x+\Delta x) - C \cdot f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} C \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= C \cdot f'(x) \; .
\end{aligned}$$

12.2 Summenregel

Eine endliche Summe von Funktionen wird gliedweise differenziert:

$$\boxed{y = f(x) = \sum_n f_n(x) \qquad \Rightarrow \qquad y' = f'(x) = \sum_n f_n'(x)} \; . \tag{31}$$

Beweis mit der Grenzwertregel (3):

$$\begin{aligned}
y' = f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sum_n f_n(x+\Delta x) - \sum_n f_n(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_n \left[\frac{f_n(x+\Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} \right] = \sum_n \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_n(x+\Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} \right] \\
&= \sum_n f_n'(x) \; .
\end{aligned}$$

12.3 Ableitung der Potenzfunktion $y = x^n \, , \quad n \in \mathbb{N}^*$

Für die Bildung des Differenzenquotienten verwenden wir den Binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \; \ldots \; + b^n \\
\Rightarrow (x+\Delta x)^n &= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot (\Delta x)^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \; \ldots \; + (\Delta x)^n
\end{aligned}$$

und erhalten für $y = f(x) = x^n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot (\Delta x)^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \; \ldots \; + (\Delta x)^n \quad - x^n}{\Delta x} \\
&= \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} \cdot (\Delta x)^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \; \ldots \; + (\Delta x)^n}{\Delta x} \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot (\Delta x)^1 + \; \ldots \; + (\Delta x)^{n-1} \; .
\end{aligned}$$

Die Differentiation erfolgt mit der Summenregel. Beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ verschwinden alle Summanden, die einen Faktor Δx enthalten:

$$\frac{\mathrm{d}(x^n)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\cdot(\Delta x)^1 + \ \dots\ + (\Delta x)^{n-1}\right] = \binom{n}{1}x^{n-1} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y = x^n \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = n\cdot x^{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*} \,. \tag{32}$$

Folglich ist die erste Ableitung der Funktion $g(x) = C\cdot x^n$ gemäß der Faktorregel: $g'(x) = C\cdot n\,x^{n-1}$.

12.4 Produktregel

Die Differentiation des Produktes y zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ erfolgt nach der Produktregel:

$$\boxed{y = f(x) = u(x)\cdot v(x) \qquad \Rightarrow \qquad y' = f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x)} \,. \tag{33}$$

Beweis mit den Grenzwertregeln (2), (3) und (4):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\ -\ u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)\ \overbrace{-\big[u(x)\cdot v(x+\Delta x)\big] + \big[u(x)\cdot v(x+\Delta x)\big]}^{=0}\ -u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x) \ + \ u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\,,$$

$$y' = \left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right]\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\right] + u(x)\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = \underbrace{u'v + v'u}_{\text{übliche Kurzschreibweise}} \,.$$

12.5 Quotientenregel

Der Quotient y zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ wird differenziert nach der Quotientenregel:

$$\boxed{y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}\,, \quad v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - v'(x)\cdot u(x)}{\big[v(x)\big]^2}} \,. \tag{34}$$

Beweis in Kurzschreibweise mit der Produktregel der Differentiation:

$$y = \frac{u}{v} \quad \Leftrightarrow \quad u = y\cdot v \qquad \Rightarrow \qquad u' = y'v + v'y\,.$$

Auflösen nach y' liefert schließlich

$$y' = \frac{u'}{v} - \frac{v'y}{v} = \frac{u'}{v} - \frac{v'u}{v^2} = \frac{u'v - v'u}{v^2} \ .$$

Die Quotientenregel ermöglicht uns, die erste Ableitung von Potenzfunktionen $y = x^n \ , \quad n \in \mathbb{Z}, \ n < 0$, also für negative ganzzahlige Exponenten, herzuleiten. Für den Fall $n = -m$ erhalten wir aus $y = x^n$

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m} \ , \quad m \in \mathbb{N}^* \ .$$

Darauf wenden wir die Quotientenregel an:

$$u = 1 \, , \quad v = x^m \, , \quad u' = 0 \, , \quad v' = m \cdot x^{m-1} \, ,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0 \cdot x^m - 1 \cdot m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot x^{-m-1} \ = \ n \cdot x^{n-1} \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ . \tag{35}$$

Die Differentiationsregel für Potenzfunktionen gilt auch für negative, also für alle ganzzahligen Exponenten n.

12.6 Kettenregel

Die Differentiation einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion

$$y = \varphi(z) = \varphi\big[z(x)\big] = f(x)$$

mit $y = \varphi(z) \xrightarrow{\text{Substitution } z=z(x)} y = f(x)$ erfolgt nach der Kettenregel:

$$\boxed{f'(x) = \varphi'(z) \cdot z'(x) \qquad \text{bzw.} \qquad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}} \ . \tag{36}$$

$\varphi'(z) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$ heißt äußere Ableitung der (äußeren) Funktion $y = \varphi(z)$.

$z'(x) = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ heißt innere Ableitung der (inneren) Funktion $z = z(x)$.

Beweisskizze mit der Grenzwertregel (4):

Mit $\frac{\Delta z}{\Delta z} = 1$ lässt sich der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wie folgt schreiben:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta z} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \ .$$

Wir berücksichtigen, dass wegen der Abhängigkeit $z(x)$ im Fall $\Delta x \to 0$ auch Δz gegen Null geht, und bilden mit der Grenzwertregel (3) den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta z} \right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta z} \right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta x} \right) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \ . \end{aligned}$$

Die Kettenregel ermöglicht die **implizite Differentiation**, d. h., die Differentiation von Funktionen, die in der impliziten Form $F(x,y)=0$ mit $y=f(x)$ dargestellt sind. Wenn die Äquivalenzumformung von F in die explizite Form, also die Auflösung von F nach y, aufwendig oder unmöglich ist, kann die implizite Differentiation hilfreich sein. Wir wollen dies an einem einfachen Beispiel demonstrieren:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 9 = 0\ ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^2+y^2-9\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-9) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}0 \\ &= 2x \ + \ 2y\cdot y' \ + \ 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}\ .\end{aligned}$$

In $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[y(x)\big]^2$ ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^2 = 2y$ die **äußere Ableitung** und

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = y'$ die **innere Ableitung**.

12.7 Ableitung der Potenzfunktion $y = x^n\ , \quad n \in \mathbb{Q}$

Wir zeigen jetzt, dass die Differentiationsregel für Potenzfunktionen nicht nur für ganze Zahlen im Exponenten gilt, sondern auch für rationale Zahlen gemäß

$$\boxed{y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = n\cdot x^{n-1}\ , \quad n\in\mathbb{Q}}\ . \tag{37}$$

Mit den rationalen Zahlen

$$n = \frac{p}{q}\ \in\ \mathbb{Q}\ , \quad p,q\in\mathbb{Z}\ ,\ q>0$$

schreiben wir die Potenzfunktion um:

$$y = x^n = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}\ .$$

Das Ergebnis potenzieren wir mit q und bilden anschließend die implizite Form der entstandenen Funktionsgleichung:

$$y^q = x^p \qquad \Rightarrow \qquad y^q - x^p = 0\ .$$

Diese implizite Funktionsgleichung differenzieren wir nach x und lösen das Ergebnis schließlich nach y' auf:

$$\begin{aligned} q\cdot y^{q-1}\cdot y' - p\cdot x^{p-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad y' &= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{x^{\frac{p}{q}(q-1)}} = \frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1} = n\cdot x^{n-1}\ .\ \square\end{aligned}$$

12.8 Umkehrregel – Ableitung der Umkehrfunktion

Ist die Funktion $y = f(x)$ umkehrbar, so schreiben wir für ihre Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x) = u(x)$. Wir erhalten $u(x)$ aus $f(x)$ in zwei Schritten:

1. Auflösung von $y = f(x)$ nach x:
$$y = f(x) \quad \longrightarrow \quad x = f^{-1}(y) = u(y) \ .$$
2. Umbenennung der Variablen: $x \longrightarrow y$, $y \longrightarrow x$. Es resultiert die gesuchte **Umkehrfunktion** von $y = f(x)$:
$$y = f^{-1}(x) = u(x) \ .$$

Wie erhalten wir die Ableitung $u'(x)$ aus $f(x)$?
Mit $x = u(y)$ ergibt sich der Zusammenhang zwischen $y = f(x)$ und $x = u(y)$ in der Form
$$f(x) = f\big[u(y)\big] = y \ .$$
Wie man sieht, handelt es sich bei $f\big[u(y)\big]$ um eine verkettete Funktion mit der äußeren Funktion $f(u)$ und der inneren Funktion $u(y)$. Diese verkettete Funktion wollen wir jetzt nach y differenzieren:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f\big[u(y)\big] \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\, y \ .$$
$$\frac{\mathrm{d}\,f(u)}{\mathrm{d}u} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}\,u(y)}{\mathrm{d}y}}_{=\,u'(y)} \;=\; 1 \ .$$
Wegen $u(y) = x$ gilt schließlich $\dfrac{\mathrm{d}\,f(u)}{\mathrm{d}u} = \dfrac{\mathrm{d}\,f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ und somit
$$f'(x) \cdot u'(y) \;=\; 1 \;=\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \ .$$
Daraus folgt durch Äquivalenzumformung die **Umkehrregel**:
$$u'(y) = \frac{1}{f'(x)} \ , \quad f'(x) \neq 0 \tag{38}$$
bzw.
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}} \ . \tag{39}$$
Aus (38) erhalten wir die gesuchte Ableitung der Umkehrfunktion wieder in zwei Schritten:

1. Zunächst substituieren wir in der Ableitung $f'(x)$ die Variable x durch $u(y)$, drücken also $f'(x)$ durch die Variable y aus.
2. Anschließend benennen wir x in y und y in x um.

Für die Ableitung der Umkehrfunktion benötigen wir im Grunde nur die Ableitung $f'(x)$ und – durch Äquivalenzumformung aus $f(x)$ – die Funktion $u(y)$.

12.9 Ableitung der Exponentialfunktion $y = a^x\,, \quad a > 0$

Dieser Abschnitt wird größtenteils inhaltlich übernommen und auch zitiert aus dem Nachschlagebuch für Grundlagenfächer – Mathematik von Hans Simon, Kurt Stahl und Helmut Grabowski, 13. Auflage 1979, VEB Fachbuchverlag Leipzig, Seite 497 bis Seite 499.

Standardgemäß beginnen wir die Differentiation der Funktion $y = a^x$ wie folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^x \cdot a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \cdot a^x\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} a^x = k_a \cdot a^x = y'\,.$$

k_a ist eine nur von a abhängige Konstante, die wir im Folgenden noch bestimmen werden.

Einschub: Die Zahl e **und die Ableitung von** e^x

Aus $y' = k_a \cdot a^x$ folgt für $y = a^x = a^0 = 1$ bzw. an der Stelle $x = 0$

$$y'\big|_{x=0} = k_a \cdot a^0 = k_a\,.$$

Der Proportionalitätsfaktor k_a ist also gleich dem Anstieg der Tangente an die jeweilige Exponentialkurve $y = a^x$ im Punkt $(x = 0,\ y = 1)$. Unter diesen Exponentialkurven gibt es offensichtlich eine mit dem Anstieg gleich 1. Deren Basis $a = a_0$ muss also der Bedingung

$$k_{a0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a_0^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

genügen. Die daraus resultierenden Grenzwerte existieren und liefern die irrationale (transzendente) Zahl

$$a_0 = \mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2{,}718\,281\,828\,\ldots\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m \to \infty} \left(1 + m\right)^{\frac{1}{m}}\,, \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{k!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\,.$$

Mit $k_a = k_{a0} = 1$ und der zugehörigen Basis $a = a_0 = \mathrm{e}$ erhalten wir aus $y = a^x \;\Rightarrow\; y' = k_a \cdot a^x$ die **Differentiationsregel für die natürliche Exponentialfunktion**:

$$y = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x\,. \tag{40}$$

Die natürlichen Exponentialfunktionen $y = C \cdot \mathrm{e}^x$ sind die einzigen Funktionen, die mit ihren sämtlichen Ableitungen übereinstimmen.

Wir haben jetzt alle Voraussetzungen zusammengetragen, um die Konstante k_a zu bestimmen. Die Exponentialfunktion $y = a^x$ kann mit $a = \mathrm{e}^{\ln a}$ geschrieben werden:

$$y = a^x = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}\,, \quad a > 0\,.$$

Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich daraus die erste Ableitung der Exponentialfunktion $y = a^x\,,\ \ a > 0\,$, wie folgt:

$$\begin{array}{rcl|rcl} y &=& f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x\cdot\ln a} & z &=& \varphi(x) = x\cdot\ln a \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} &=& \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x\cdot\ln a} = a^x & \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &=& \ln a \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (\ln a)\cdot a^x\ .$$

Mit dem Proportionalitätsfaktor $k_a = \ln a$ lautet die Differentiationsregel für Exponentialfunktionen

$$\boxed{y = a^x \qquad \Rightarrow \qquad y' = (\ln a)\cdot a^x\ , \quad a > 0}\ . \tag{41}$$

Man erkennt leicht, dass für höhere Ableitungen der Exponentialfunktion gilt:

$$y^{(n)} = (\ln a)^n\cdot a^x\ .$$

12.10 Ableitung der Logarithmusfunktion $y = \log_a x\,,\quad a > 0$

Dieser Abschnitt wird größtenteils inhaltlich übernommen und auch zitiert aus dem Nachschlagebuch für Grundlagenfächer – Mathematik von Hans Simon, Kurt Stahl und Helmut Grabowski, 13. Auflage 1979, VEB Fachbuchverlag Leipzig, Seite 499.

Gemäß der Umkehrregel (39)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

erhalten wir aus

$$y = \log_a x\ , \quad x = a^y\ , \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = a^y\cdot\ln a = x\cdot\ln a$$

die erste Ableitung der Logarithmusfunktion wie folgt:

$$\boxed{y = \log_a x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a x = \frac{1}{x\cdot\ln a}\ , \quad a > 0} \tag{42}$$

und für den natürlichen Logarithmus, d. h. für $a = \mathrm{e} \ \Rightarrow\ \ln\mathrm{e} = 1$

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x\cdot\ln\mathrm{e}} = \frac{1}{x}\ . \tag{43}$$

Sämtliche Ableitungen der Logarithmusfunktion $y = \log_a x\,,\ a > 0\,$, von denen es unbegrenzt viele gibt, sind echt gebrochenrationale Funktionen

$$y^{(n)} \ = \ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\log_a x \ = \ \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{x^n\cdot\ln a}\ .$$

12.11 Ableitung der Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen werden auch trigonometrische Funktionen genannt.

Ableitung der Sinusfunktion

Beginnen wir wieder standardmäßig mit der Differentiation der Sinusfunktion $y = f(x) = \sin x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \; .$$

Mit dem Additionstheorem

$$\sin\alpha - \sin\beta \;=\; 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

und den Substitutionen

$$\alpha = x + \Delta x \,, \quad \beta = x \,, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\alpha+\beta}{2} = x + \frac{\Delta x}{2} \,, \quad \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\Delta x}{2}$$

erhält der Differenzenquotient die Gestalt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \;=\; \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \; .$$

Daraus bilden wir jetzt den Differentialquotienten

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}}_{=1\,,\ \text{siehe}\,(10)} = \cos x \; .$$

Die erste Ableitung der Sinusfunktion erhalten wir also gemäß

$$\boxed{y = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad y' = \sin' x = \cos x} \; . \tag{44}$$

Ableitung der Kosinusfunktion

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos x \;=\; \left(1 - \sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos' x \;=\; \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 - \sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}}_{=\frac{1}{\cos x}} \cdot (-2\sin x) \cdot \cos x$$

$$\boxed{\cos' x \;=\; -\sin x} \; . \tag{45}$$

Ableitung der Tangensfunktion

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \tan' x &= \frac{\sin' x \cdot \cos x - \cos' x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x} \; . \tag{46}$$

Ableitung der Kotangensfunktion

$$\begin{aligned}\cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ \cot' x &= \frac{\cos' x \cdot \sin x - \sin' x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)} \; . \tag{47}$$

Die Umkehrfunktionen zu den Winkelfunktionen sind die Arcusfunktionen, auch **zyklometrische Funktionen** genannt. Wir werden auf sie nicht weiter eingehen, sondern nur beispielhaft an der Arcussinus-Funktion zeigen, wie man mit der Umkehrregel und analog zur Logarithmusfunktion ihre erste Ableitung erhält:

$$y = \arcsin x \; , \quad x = \sin y \; , \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \; ,$$

$$\arcsin' x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \; , \quad \text{für } -1 < x < +1 \text{ und } +1 \leq y < +\infty \; .$$

$$\boxed{\arcsin' x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \; , \quad \text{für } -1 < x < +1 \text{ und } +1 \leq y < +\infty} \; . \tag{48}$$

13 Die wichtigsten Regeln des partiellen Differenzierens

Funktionen mehrerer (unabhängiger) Variablen, d. h. mehrdimensionale Funktionen[9] wie beispielsweise $f(x, y, z, t, \dots)$ lassen sich – Differenzierbarkeit vorausgesetzt – partiell bzw. teilweise jeweils nach einer der Variablen differenzieren, wobei die übrigen Variablen als Konstanten betrachtet werden. In diesem Fall schreiben wir für die **partielle Ableitung** von f beispielsweise nach z

$$\frac{\partial f(x, y, z, t, \dots)}{\partial z} \equiv \partial_z f \equiv f_z \quad \text{(manchmal auch redundant } f'_z) \,.$$

Die Sprechweise von $\frac{\partial f}{\partial z}$ lautet „d partiell f nach d z“. Man beachte das ∂-Symbol für die partielle Differentiation.[10]

Wegen der Anschaulichkeit gehen wir bei der Herleitung der Regeln des partiellen Differenzierens aus von der zweidimensionalen Funktion $f(x, y)$ im $\mathbb{R}^3$, also von der **3D-Flächenfunktion** $f(x, y)$ im kartesischen (x, y, z)-Koordinatensystem. Die f-Werte entsprechen dann z-Koordinaten senkrecht „über“ den entsprechenden (x, y)-Ebenenpunkten und liefern graphisch eine Fläche, die aus den Punkten $P\big(x, y,\ z = f(x, y)\big)$ gebildet wird. Weiterhin benötigen wir das

$$\textbf{totale Differential } \mathrm{d}f = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{49}$$

der Funktion $f(x, y)$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ der Koeffizient von $\mathrm{d}x$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ der Koeffizient von $\mathrm{d}y$.

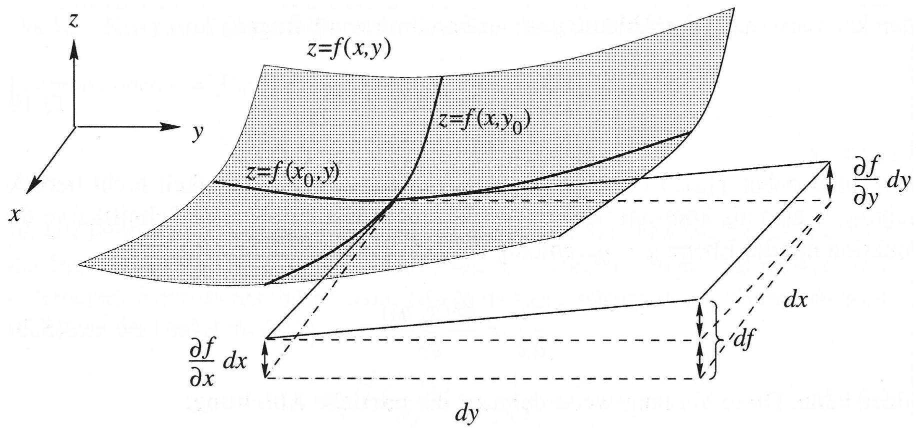


Abb. 9 Graphische Veranschaulichung des totalen Differentials der Funktion $f(x, y) = z$. Die Funktionwerte z bilden die punktierte gekrümmte Fläche über der (x, y)-Koordinatenebene. „ Das totale Differential (49) ist die Gleichung für die Tangentialebene im Punkt $\big(x, y, z = f(x, y)\big)$.“ Zitat (in Anführungzeichen gesetzt) und Abbildung aus dem Hochschultaschenbuch von Christian B. Lang und Norbert Pucker, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1998, Seite 84.

Wir wollen die Problematik des totalen bzw. vollständigen Differentials hier nicht weiter vertiefen, weil sich dazu im Internet viele gute Beiträge finden lassen.

---

[9]Die drei analytischen Darstellungsformen mehr- bzw. n-dimensionaler Funktionen sind
1. **Explizite Darstellung** $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. 2. **Implizite Darstellung** $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.
3. **Parameterdarstellung** z. B. einer 3-dimensionalen Funktion $u = f(r, s, t)$ mit Parametern r, s, t:
$u = f(r, s, t),\ \ x = \alpha(r, s, t),\ \ y = \beta(r, s, t),\ \ z = \gamma(r, s, t) \ \Rightarrow$

Kurzschreibweise als Ortsvektor im $\mathbb{R}^3$: $\vec{\boldsymbol{u}} = \Big(x(r, s, t),\ y(r, s, t),\ z(r, s, t)\Big)^{\mathrm{T}}$.

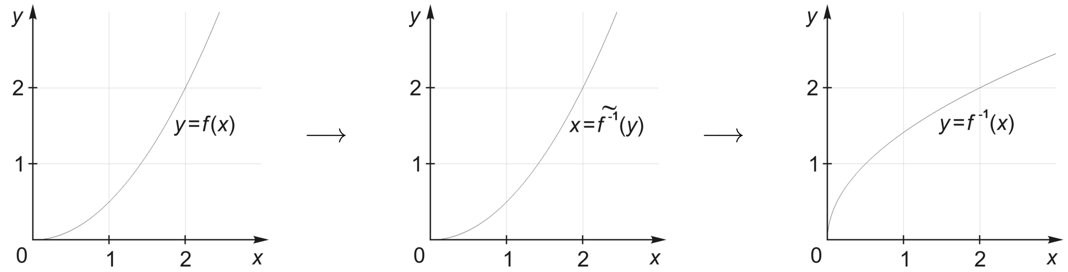
[10]Der LaTeX-Code für das ∂-Symbol ist `\partial`.

Einschub

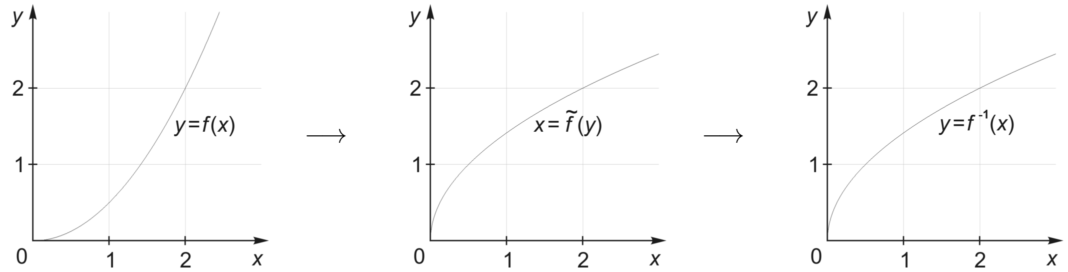
- **Invertieren bzw. Umkehren von Funktionen $y = f(x)$:**

Achtung! Während der Umkehrungsprozedur von f bleibt das (kartesische) Koordinatensystem unverändert. Das bedeutet, dass bei einem Variablentausch wie beispielsweise $x \leftrightarrow y$ die Koordinatenachsen dieselben bleiben, also nicht umbenannt werden. In diesem Fall muss sich bei einem Variablentausch der Verlauf des Graphen von f verändern (außer natürlich für $y = f(x) = x$).

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$, allerdings *nur im ersten Quadranten*, und schicken voraus, dass deren Umkehrfunktion bzw. inverse Funktion dort $y = f^{-1}(x) = \sqrt{2x}$ lautet:



$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \xrightarrow[\text{nach } x]{\text{Auflösung}} & x = \widetilde{f^{-1}}(y) = \sqrt{2y} & \xrightarrow[\text{tausch}]{\text{Variablen-}} \\ \xrightarrow[\text{tausch}]{\text{Variablen-}} & x = \widetilde{f}(y) = \frac{1}{2}y^2 & \xrightarrow[\text{nach } y]{\text{Auflösung}} \end{array} \right\} \quad y = f^{-1}(x) = \sqrt{2x}$$



Die Vertauschung der Variablen in den Funktionen f (oben) bzw. f^{-1} (unten) wurde hier durch eine Tilde gekennzeichnet, also durch $\widetilde{f}$ bzw. $\widetilde{f^{-1}}$. Und wie aus unserem Beispiel sofort hervorgeht, dient der hochgestellte Index „-1“ in f^{-1} zur Kennzeichnung der inversen Funktion zu f. „-1“ ist hier folglich **keine Potenz(zahl)** wie beispielsweise im Fall $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

- **Invertieren der zweidimensionalen Funktion $z = f(x, y)$ bezüglich y und $x = \text{const}$:**

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2}x\,y + \frac{1}{3}y^2 \quad \text{für} \quad x = x_0 = \text{const}$$

allerdings *nur im ersten Quadranten*. Unter der Bedingung $x = x_0 = \text{const}$ lautet die inverse Funktion dazu

$$z = f^{-1}(x_0, y) = \sqrt{\frac{9}{16}x_0 + 3y} - \frac{3}{4}x_0 \ ,$$

wie in der Abbildung 10 für $x_0 = 2$ zu sehen ist.

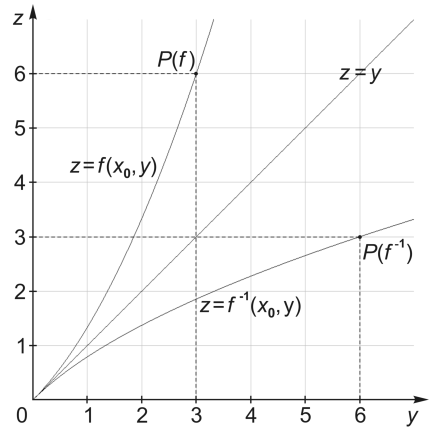


Abb. 10 Die Bildung der Umkehrfunktion $z = \sqrt{\frac{9}{16}x_0 + 3y} - \frac{3}{4}x_0$ zur Funktion $z = \frac{1}{2}x_0\,y + \frac{1}{3}y^2$ für $x_0 = 2$. Wegen $x = x_0 = \text{const}$ konnte die x-Achse unterdrückt werden. Die dargestellte (y,z)-Ebene verläuft somit durch x_0. Und wie man sieht, erhält man die Umkehrfunktion f^{-1} graphisch durch Spiegelung der Funktion f an der sog. Winkelhalbierenden, hier also an der Geraden $z(y) = y$.

Wir überprüfen die Werte von Abbildung 10:

Die 1-dimensionale Funktion

$$\boxed{z = f(x_0, y) = \frac{1}{2}x_0\,y + \frac{1}{3}y^2}$$

liefert bezüglich y die quadratische Gleichung

$$y^2 + \frac{3}{2}x_0 \cdot y - 3z \;=\; 0\,.$$

Diese Gleichung lässt sich durch Anwendung der sog. (p,q)-Formel[11] lösen, wobei in unserem Fall $p = \frac{3}{2}x_0$ und $q = -3z$ ist:

$$y_{1,2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,x_0 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\,x_0\right)^2 + 3z} = \pm\sqrt{\frac{9}{16}\,x_0^2 + 3z} - \frac{3}{4}\,x_0\,.$$

Damit haben wir $z = f(x_0, y)$ nach y aufgelöst. Jetzt verwenden wir nur den positiven Wurzelterm

$$y = \sqrt{\frac{9}{16}\,x_0^2 + 3z} - \frac{3}{4}\,x_0\,,$$

vertauschen die Variablen y und z und erhalten schließlich die inverse Funktion

$$\boxed{z = f^{-1}(x_0, y) = \sqrt{\frac{9}{16}\,x_0^2 + 3y} - \frac{3}{4}\,x_0}\,.$$

Der Vergleich mit der Abbildung 10 zeigt

$$x_0 = 2,\; y = 3 \quad\Rightarrow\quad z \;=\; f(x_0,y) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 3^2 \;=\; 6 \qquad\Rightarrow\quad P_{(f)} \;:=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\,,\;\square$$

$$x_0 = 2,\; y = 6 \quad\Rightarrow\quad z \;=\; f^{-1}(x_0,y) = \sqrt{\frac{9}{16}\cdot 2^2 + 3\cdot 6} - \frac{3}{4}\cdot 2 \;=\; 3 \qquad\Rightarrow\quad P_{(f^{-1})} := \begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\,.\;\square$$

[11] Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$: $\quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$

Wenn wir im Koeffizienten $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ statt der unabhängigen Variablen y die unabhängige Variable z verwenden, schreiben wir für den genannten Koeffizienten $\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}$ und erhalten aus (49) die **Identität**

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{50}$$

$$= \frac{\partial f(x,z)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,. \tag{51}$$

Zwischen (50) und (51) erfolgte lediglich der Variablentausch $y \leftrightarrow z$ (siehe Einschub: Invertieren bzw. Umkehren von Funktionen $y = f(x)$). Infolge der Spiegelsymmetrie der Graphen der Funktionen $f(x_0, y)$ und $\widetilde{f}(x_0, z)$ bezüglich $z(y) = y$ sind die Werte dieser Funktionen im Fall $z = y$ gleich. Deshalb können wir im Folgenden auf die Tilde über dem f in $\widetilde{f}(x_0, z)$ verzichten. Wegen der Spiegelsymmetrie der Funktionsgraphen müssen aber auch die einander entsprechenden Tangialebenen an die Flächen $f(x,y)$ und $f(x,z)$ spiegelsymmetrisch sein, sodass die Differentiale $\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y$ und $\frac{\partial f(x_0,z)}{\partial z}\,\mathrm{d}z$ bezüglich der Punkte $P\big(x_0,\, y_0,\, z(x_0,y_0)\big)$ und $P\big(x_0,\, y(x_0,z_0),\, z_0\big)$ für $y_0 = z_0$ gleichwertig sind (siehe Abbildung 11).

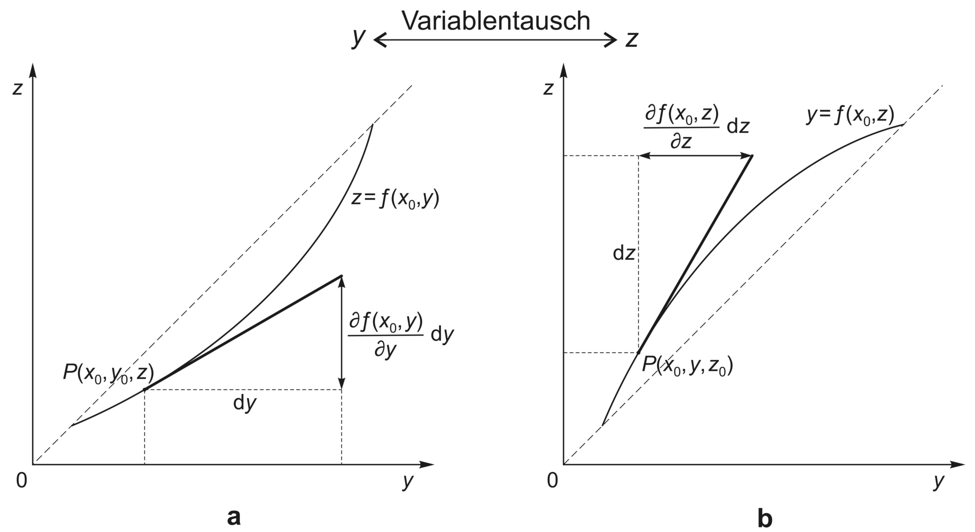


Abb. 11 Veranschaulichung des Variablentauschs $y \leftrightarrow z$.
Wegen $x = x_0 = \text{const}$ wurde die z-Achse unterdrückt. Dargestellt ist also die (y,z)-Ebene, die die x-Achse im Punkt x_0 schneidet. Eine 3D-Flächenfunktion f wie auch die zugehörigen Tangentialebenen erscheinen demzufolge in der dargestellten (y,z)-Ebene als Kurve bzw. Gerade, also nur eindimensional.

a Darstellung eines Teilstücks der Schnittlinie der Funktion $z = f(x_0,\, y)$ und eines Teilstücks der Schnittlinie der zugehörigen Tangentialebene an den Punkt $P\big(x_0,\, y_0,\, z(x_0,y_0)\big)$.

b Darstellung eines Teilstücks der Schnittlinie der Funktion $y = f(x_0,\, z)$ und eines Teilstücks der Schnittlinie der zugehörigen Tangentialebene an den Punkt $P\big(x_0,\, y(x_0,z_0)\,, z_0\big)$.

In der Funktion $f(x,y) = z$ hängt z genau wie f von x und y ab gemäß $z = z(x,y)$. Deshalb kann man (50) auch wie folgt ausdrücken:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,. \tag{52}$$

Durch Einsetzen von (52) in (51) resultiert

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{53}$$

$$= \frac{\partial f(x,z)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\left[\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial f(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right]}_{\text{Koeffizient von } \mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \underbrace{\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}}_{\text{Koeffizient von } \mathrm{d}y}\mathrm{d}y\ , \tag{54}$$

wobei zu beachten ist, dass f und damit auch $\mathrm{d}f$ von den unabhängigen Variablen x und y abhängen. Schließlich ergibt der **Koeffizientenvergleich** von (54) mit (53) die folgenden zwei Regeln:

$$\textbf{1.}\quad \boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}}\ ,$$

$$\textbf{2.}\quad \boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\qquad (\textbf{Kettenregel})}\ .$$

Wir können y aber auch als Funktion von x und $z = f$ ausdrücken[12] und erhalten dann aus $y = y(x, f)$ das totale Differential

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y(x,f)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial y(x,f)}{\partial f}\,\mathrm{d}f\ . \tag{55}$$

Das Ersetzen von $\mathrm{d}y$ in (49) durch (55) ergibt wieder eine **Identität**, nämlich

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\left[\frac{\partial y(x,f)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial y(x,f)}{\partial f}\,\mathrm{d}f\right]$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y(x,f)}{\partial x}\right]}_{=0,\ \text{Koeffizient von } \mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y(x,f)}{\partial f}}_{=1,\ \text{Koeffizient von } \mathrm{d}f}\mathrm{d}f = \mathrm{d}f\ .$$

Wie man sieht, muss der Koeffizient von $\mathrm{d}x$ verschwinden und der Koeffizient von $\mathrm{d}f$ muss gleich eins sein. Durch entsprechende Äquivalenzumformung ergeben sich aus diesen Koeffizienten zwei weitere Regeln:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y(x,f)}{\partial x} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \textbf{3.}\quad \boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y(x,f)}{\partial x}}\ ,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y(x,f)}{\partial f} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \textbf{4.}\quad \boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\dfrac{\partial y(x,f)}{\partial f}}}\ .$$

[12] Siehe **Einschub**, Invertieren der zweidimensionalen Funktion $z = f(x,y)$ bezüglich y und $x = \mathrm{const}$: Auflösung von $f(x_0, y)$ nach y.

14 Integralrechnung – Regeln, Verfahren, Sätze

„Die Differenzierbarkeit von Funktionen unterliegt viel strengeren Bedingungen als die Integrierbarkeit. Gerade umgekehrt verhält es sich mit der formalen Ausführbarkeit dieser Operation. Während im allgemeinen jede differenzierbare Funktion geschlossen, d. h. in der Form $y = f(x)$, differenziert werden kann, ist das Integrieren in geschlossener Form nur für solche Integranden möglich, die sich durch geeignete Umformungen auf Grundintegrale zurückführen lassen. Dazu dienen zwei der Differentialrechnung entsprechende Integrationsregeln sowie einige besondere Integrationsverfahren.“
Zitiert aus dem Nachschlagebuch für Grundlagenfächer – Mathematik von Hans Simon, Kurt Stahl und Helmut Grabowski, 13. Auflage 1979, VEB Fachbuchverlag Leipzig, Seite 521 und Seite 522.

14.1 Faktorregel und Summenregel

Analog zur Differentialrechnung gelten gleichermaßen auch für die Integralrechnung die Faktorregel und die Summenregel:

$$\int C \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; C \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{Konstante } C\,, \tag{56}$$

$$\int \big[f_1(x) \pm f_2(x)\big]\,\mathrm{d}x \;=\; \int f_1(x)\,\mathrm{d}x \pm \int f_2(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{57}$$

14.2 Substitutionsverfahren

Analog zur Kettenregel der Differentiation kann bei der Integration in vielen Fällen und unter bestimmten Voraussetzungen die Substitution einer neuen Integrationsvariablen zweckmäßig sein. Wir zeigen im Folgenden die beiden wichtigsten Verfahren:

1. **Lineare Substitution** (Substitution linearar Terme in x)

   Beispiel $\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$:

   $$\text{Substitution} \quad -x = z \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = -dz \quad \Rightarrow$$

   $$\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{z}\,(-1)\,\mathrm{d}z = -\int \mathrm{e}^{z}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{z} + C\,, \tag{58}$$

   $$\text{Rücksubstitution} \quad -\mathrm{e}^{z} + C \;=\; -\mathrm{e}^{-x} + C = \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Die **Substitution der Nennerfunktion** bei gebrochenem Integranden, wenn die Zählerfunktion die erste Ableitung der Nennerfunktion ist, führt immer zum Ziel:

   $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \quad \text{ergibt mit} \quad f(x) = z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{f'(x)}$$

   $$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{f'(x)}{z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{f'(x)} = \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln|z| + C$$

   $\Longrightarrow$ Rücksubstitution

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C} \ . \tag{59}$$

14.3 Partielle Integration

Das Verfahren der partiellen Integration ergibt sich aus der Produktregel der Differentiation wie folgt:

$$\frac{\mathrm{d}(u\cdot v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = u'v + uv' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v \;=\; \frac{\mathrm{d}(u\cdot v)}{\mathrm{d}x} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v\,dx \;=\; \mathrm{d}(u\cdot v) - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v\,dx \;=\; \int\mathrm{d}(u\cdot v) - \int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\boxed{\int u'v\,dx \;=\; uv - \int uv'\,\mathrm{d}x} \ . \tag{60}$$

Hinweise für die Anwendung der partiellen Integration:

- Der Integrand des Aufgabenintegrals $\int u'v\,dx$ muss als Produkt zweier Funktionen geschrieben werden können.
- Zu einer dieser beiden Funktionen muss eine Stammfunktion existieren, sodass gilt $\int u'\,\mathrm{d}x = u$.
- Das zweite Integral $\int uv'\,\mathrm{d}x$ muss
  - geschlossen auswertbar sein oder
  - gleich dem Aufgabenintegral $\int u'v\,dx$ sein oder
  - gleichen Typs wie das Aufgabenintegral, aber einfacher sein (Reduktion des Integrals durch wiederholtes, rückläufiges Einsetzen der Teilergebnisse).

  Andernfalls ist das Aufgabenintegral nicht lösbar.
- Einige Integrale mit nur einer Funktion v im Integranden lassen sich sich durch partielle Integration zweckmäßig lösen, indem man als zweite Funktion $u' = 1$ ansetzt.

14.4 Partialbruchzerlegung

Echt gebrochene rationale Funktionen lassen sich in Partialbrüche zerlegen. Jeder Partialbruch lässt sich dann anschließend mühelos integrieren. Auf die Integration nach Partialbruchzerlegung wollen wir aber nicht näher eingehen.

14.5 Grundregeln für bestimmte Integrale

1. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\;.$

2. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0\;.$

3. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\;,$
   d. h., die Vertauschung der Integrationsgrenzen bzw. die Änderung der Integrationsrichtung ändert das Vorzeichen des Integrals.

4. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int\limits_a^b f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \;=\; \ldots\;,$
   weil die Integrationsvariable beim bestimmten Integral im Ergebnis nicht erscheint.

14.6 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Dieser Abschnitt ist auszugsweise zitiert aus dem Nachschlagebuch für Grundlagenfächer – Mathematik von Hans Simon, Kurt Stahl und Helmut Grabowski, 13. Auflage 1979, VEB Fachbuchverlag Leipzig, Seite 532.

Das arithmetische Mittel aller Funktionswerte $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ heißt **Mittelwert m_a der Funktion $f(x)$ in diesem Intervall**:

$$m_a \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{b-a} \sum_i f(x_i)\cdot\Delta x \;=\; \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\;, \qquad a \leq x \leq b\;. \tag{61}$$

Falls $y = f(x)$ in diesem Intervall stetig ist, existiert sicher eine Stelle $\xi(a \leq \xi \leq b)$ mit $f(\xi) = m_a$. Die Multiplikation von (61) mit $(b-a)$ liefert den

Mittelwertsatz der Integralrechnung:
Ist $y = f(x)$ eine im Intervall $a \leq x \leq b$ stetige Funktion, gibt es mindestens ein $\xi(a \leq \xi \leq b)$, so dass gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; (b-a)\,f(\xi)\;. \tag{62}$$

Geometrische Bedeutung:
Der Inhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Bild von $y = f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ ist gleich dem Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten $(b-a)$ und $f(\xi)$, wobei ξ mit $a \leq \xi \leq b$ ein ganz bestimmtes Argument im genannten Intervall ist.

14.7 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Dieser Abschnitt ist auszugsweise zitiert aus dem Nachschlagebuch für Grundlagenfächer – Mathematik von Hans Simon, Kurt Stahl und Helmut Grabowski, 13. Auflage 1979, VEB Fachbuchverlag Leipzig, Seite 534 und Seite 535.

Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** stellt eine Beziehung zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral her:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a) \quad \text{mit} \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(x) + C\,. \tag{63}$$

Dieser Satz erlaubt, ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ von einer im Intervall $a \leq x \leq b$ stetigen Funktion $f(x)$ mit Hilfe einer beliebigen Stammfunktion $F(x)$ des entsprechenden unbestimmten Integrals $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ zu ermitteln.

15 Taylor-Entwicklung

Zitiert aus: H. Nickel und Mitarbeiter, Mathematik für Ingenieur- und Fachschulen, Band II, 6. Aufl., VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1983, Seite 246 bis Seite 255.

„Die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe kann nach verschiedenen Methoden erfolgen. Eine verhältnismäßig universell anwendbare Formel stammt von Taylor (Brook Taylor, 1685 bis1731, englischer Mathematiker). Zu ihrer Herleitung wird für die gegebene Funktion $y = f(x)$ eine Potenzreihenentwicklung mit noch unbekannten Koeffizienten a_k angesetzt:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{64}$$

Die Funktion $f(x)$ besitze stetige Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Zur Berechnung der a_k wird (64) beliebig oft nach x differenziert:

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + \cdots + n\,a_n\,x^{n-1} + \cdots \\ f''(x) &= 2\,a_2 + 2\cdot 3\,a_3\,x + \cdots + (n-1)n\,a_n\,x^{n-2} + \cdots \\ f'''(x) &= 2\cdot 3\,a_3 + \cdots + (n-2)(n-1)n\,a_n\,x^{n-3} + \cdots \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n!\,a_n + \cdots \end{aligned} \tag{65}$$

Die Funktion $y = f(x)$ und alle Ableitungen seien an der Stelle $x = 0$ definiert. Dann folgt aus (64) und (65) mit $x = 0$:

$$\begin{array}{lllll} f(0) &= a_0 & \text{und umgestellt} & a_0 &= f(0) \\ f'(0) &= a_1 & & a_1 &= f'(0) \\ f''(0) &= 2!\,a_2 & & a_2 &= \dfrac{1}{2!}\,f''(0) \\ f'''(0) &= 3!\,a_3 & & a_3 &= \dfrac{1}{3!}\,f'''(0) \\ \vdots & & & \vdots & \\ f^{(n)}(0) &= n!\,a_n & & a_n &= \dfrac{1}{n!}\,f^{(n)}(0) \end{array}$$

Damit wurden alle a_k durch die Funktion bzw. ihre Ableitungen an der Stelle $x = 0$ ausgedrückt, und für (64) läßt sich schreiben

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n}_{S_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\,x^{n+1} + \cdots}_{R_n(x)} \tag{66}$$

Die Reihe (66) heißt die **1. Form der Taylorschen Reihe** oder MacLaurin'sche Reihe (Colin MacLaurin, 1698 bis 1746, englischer Mathematiker):"

Taylor-Entwicklung von $f(x)$ an der Stelle $x = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

„Bei der Anwendung der 1. Form der Taylorschen Reihe wird die Funktion $y = f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = 0$, der Entwicklungsstelle, genähert durch ganzrationale Funktionen n-ten Grades dargestellt.

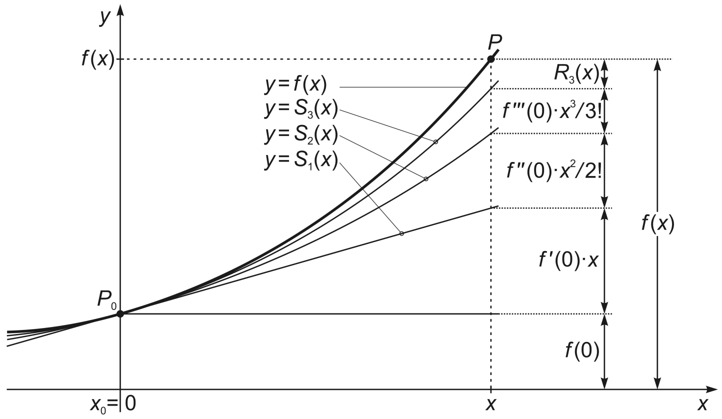


Bild 23.2 Erste Form der Taylor'schen Reihe, d. h. Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x)$ an der (Entwicklungs-)Stelle $x = 0$. Ohne Berücksichtigung des Restgliedes $R_n(x)$ handelt es lediglich um eine Entwicklung von $f(x)$ bis zur n-ten Ordnung[1)] und folglich nur um eine Näherung von $f(x)$ in der Umgebung der Entwicklungsstelle $x = 0$.
Die $S_n(x)$ sind die n-ten Teilsummen der Taylor-Reihe (Potenzreihe). Es handelt sich bei den $S_n(x)$ um Näherungspolynome (ganzrationale Funktionen, Summenfunktionen) n-ten Grades, also um Näherungsparabeln für $f(x)$, die die Kurve $f(x)$ im Punkt P_0 tangieren. Je höher der Grad n der Näherungsparabeln $S_n(x)$ ist, um so mehr schmiegen sie sich der Kurve $f(x)$ an, d. h. desto besser ist die Näherung. (nach H. Nickel und Mitarbeiter, 1983)

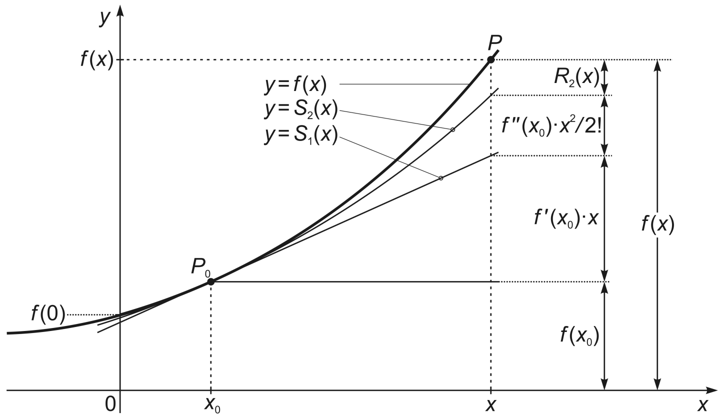


Bild 23.4 Zweite Form der Taylor'schen Reihe, d. h. Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x)$ an der (Entwicklungs-)Stelle $x = x_0$. (nach H. Nickel und Mitarbeiter, 1983)

Allgemeiner ist die Aufgabe, die Funktion in der Umgebung einer beliebigen Entwicklungsstelle $x = x_0$ durch ganzrationale Funktionen anzunähern. Die zugehörigen Näherungsparabeln berühren dann die Kurve der Funktion $y = f(x)$ im Punkt $P_0(x_0;\, y_0)$ entsprechend Bild 23.4. Ein Vergleich mit Bild 23.2 zeigt, daß nur eine Verschiebung in Richtung der x-Achse erfolgt. In Bild 23.2 ist x der Abstand der betrachteten Abszisse von der Entwicklungsstelle $x = 0$. Entsprechend ist in Bild 23.4 $x - x_0$ der Abstand von der Entwicklungsstelle x_0. Wird deshalb in (66) auf der rechten Seite für x die

Differenz $x - x_0$ und für 0 der Wert x_0 gesetzt, dann ergibt sich die **2. Form der Taylorschen Reihe"**

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1} + \cdots \end{aligned} \tag{67}$$

Taylor-Entwicklung von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n}$$

[1] Anmerkung zum Sprachgebrauch der Begriffe „Grad" und „Ordnung" :
Man sagt einerseits „Näherungspolynom n-ten Grades" bzw. „Näherungspolynom vom Grad n" und andererseits aber „Entwicklung n-ter Ordnung" bzw. „Entwicklung bis zur n-ten Ordnung".

16 Divergenz – Gauß'scher Integralsatz

Nach Rainer J. Jelitto, studien–text Elektrodynamik, Theoretische Physik 3, 3. Aufl., Aula-Verlag, Wiesbaden, 1994, Seite 24 bis Seite 26.

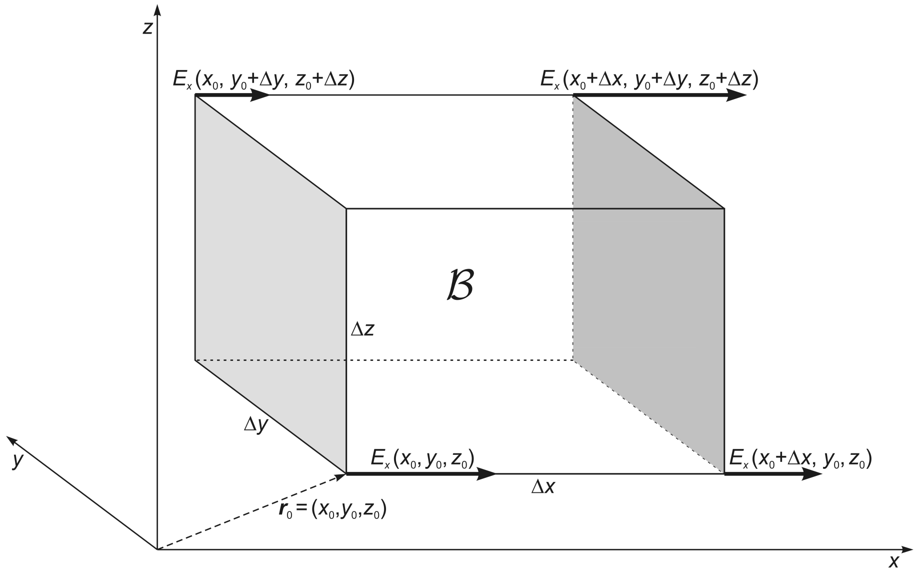


Abb. 14 Darstellung des Flusses der E_x-Komponente des Vektorfeldes $\vec{E}(\vec{r}\,)$ durch den quaderförmigen Raumbereich $\mathcal{B}$.

Wenn $\vec{E}(\vec{r}\,) = \vec{E}(x, y, z)$ ein im Raumbereich $\mathcal{B}$ differenzierbares Vektorfeld und

$$\Phi_{(\mathcal{B})}\big(\vec{E}\,\big) = \oint_{(\mathcal{B})} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{68}$$

der (Vektor-)Fluss von $\vec{E}$ durch die (geschlossene) Oberfläche des Bereichs $\mathcal{B}$ bzw. der Ausfluss von $\vec{E}$ aus dem Bereich $\mathcal{B}$ ist, dann lässt sich für jeden Raumpunkt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ von $\mathcal{B}$ die lokale Fluss- oder Quelldichte bzw. die Divergenz „div" von $\vec{E}$ bestimmen.

Dividieren wir den Ausfluss $\Phi_{(\mathcal{B})}\big(\vec{E}\,\big)$ durch das Volumen V von $\mathcal{B}$, so erhalten wir die **mittlere** Fluss- bzw. **Quelldichte**

$$\frac{1}{V} \oint_{(\mathcal{B})} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

für den Bereich $\mathcal{B}$. Lassen wir dann das um einen Punkt $\vec{r}_0$ gelegene Gebiet $\mathcal{B}$ schrumpfen, wodurch das Volumen $V(\mathcal{B})$ gegen null strebt, so resultiert für diesen Grenzfall die (**lokale**) Fluss- oder **Quelldichte** bzw. die **Divergenz** von $\vec{E}$ im Punkt $\vec{r}_0$ gemäß

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}_0) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_{(\mathcal{B})} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Vereinfachend sei $\mathcal{B}$ in der folgenden Herleitung der in Abbildung 14 dargestellte Quader, sodass die Vektorkomponenten von $\vec{E}$ parallel zu den Normaleneinheitsvektoren $\vec{n}^{\,0}_{yz} = \vec{e}_x$, $\vec{n}^{\,0}_{zx} = \vec{e}_y$, $\vec{n}^{\,0}_{xy} = \vec{e}_z$ der zugehörigen Flächenelemente des Quaders verlaufen:

$$A_x\,\vec{e}_x \parallel \mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\vec{e}_x\;, \quad A_y\,\vec{e}_y \parallel \mathrm{d}z\mathrm{d}x\,\vec{e}_y\;, \quad A_z\,\vec{e}_z \parallel \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\vec{e}_z\;.$$

Ausgehend von (68) ist damit der Ausfluss von $\vec{E}$ aus dem Volumen $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ des Quaders $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned}\oint_{(\mathcal{B})} \vec{E}\cdot\vec{n}^0 \mathrm{d}S \;=\; & \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{z_0}^{z_0+\Delta z} \Big[E_x(x_0+\Delta x, y, z) - E_x(x_0, y, z)\Big]\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ + & \int\limits_{z_0}^{z_0+\Delta z}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \Big[E_y(x, y_0+\Delta y, z) - E_y(x, y_0, z)\Big]\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ + & \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta y}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta z} \Big[E_z(x, y, z_0+\Delta z) - E_z(x, y, z_0)\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;.\end{aligned} \tag{69}$$

Gemäß der Taylor-Entwicklung

$$f(x) = f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x + \frac{1}{2}\,f''(x_0)\,(\Delta x)^2 + \cdots \tag{70}$$

erhalten wir beispielsweise für den Integranden in (69)

$$\begin{aligned}& E_x(x_0+\Delta x, y, z) - E_x(x_0, y, z) \\ = {} & E_x(x_0, y, z) + \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y, z)\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}(x_0, y, z)\,(\Delta x)^2 + \cdots - E_x(x_0, y, z) \\ = {} & \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y, z)\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}(x_0, y, z)\,(\Delta x)^2 + \cdots \;.\end{aligned}$$

Damit erhält das Integral für den Ausfluss von $\vec{E}$ aus dem Quader $\mathcal{B}$ die Gestalt

$$\begin{aligned}\oint_{(\mathcal{B})} \vec{E}\cdot\vec{n}^0 \mathrm{d}S = {} & \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y}\int\limits_{z_0}^{z_0+\Delta z} \left[\frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0, y, z)\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}(x_0, y, z)\,(\Delta x)^2 + \cdots\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ + & \int\limits_{z_0}^{z_0+\Delta z}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \left[\frac{\partial E_y}{\partial y}(x, y_0, z)\,\Delta y + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}(x, y_0, z)\,(\Delta y)^2 + \cdots\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ + & \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta y}\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta z} \left[\frac{\partial E_z}{\partial z}(x, y, z_0)\,\Delta z + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}(x, y, z_0)\,(\Delta z)^2 + \cdots\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;.\end{aligned} \tag{71}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = (x_1 - x_0)\,f(\tilde{x}) = f(\tilde{x})\,\Delta x \tag{72}$$

können wir für (71) schreiben

$$\begin{aligned}
\oint_{(\mathcal{B})} \vec{E}\cdot\vec{n}^0 \mathrm{d}S = \quad & \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0,\tilde{y},\tilde{z})\,\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}(x_0,\tilde{y},\tilde{z})\,(\Delta x)^2\Delta y\Delta z + \cdots \\
&+ \frac{\partial E_y}{\partial y}(\tilde{x},y_0,\tilde{z})\,\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}(\tilde{x},y_0,\tilde{z})\,\Delta x(\Delta y)^2\Delta z + \cdots \\
&+ \frac{\partial E_z}{\partial z}(\tilde{x},\tilde{y},z_0)\,\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}(\tilde{x},\tilde{y},z_0)\,\Delta x\Delta y(\Delta z)^2 + \cdots \;.
\end{aligned}$$

Die mittlere Quelldichte von $\vec{E}$ für den Quader $\mathcal{B}$ ist folglich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\oint_{(\mathcal{B})} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \;&= \frac{1}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}\oint_{(\mathcal{B})} \vec{E}\cdot\vec{n}^0\mathrm{d}S \\
&= \quad \frac{\partial E_x}{\partial x}(x_0,\tilde{y},\tilde{z}) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}(x_0,\tilde{y},\tilde{z})\,\Delta x + \cdots \\
&\quad + \frac{\partial E_y}{\partial y}(\tilde{x},y_0,\tilde{z}) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}(\tilde{x},y_0,\tilde{z})\,\Delta y + \cdots \\
&\quad + \frac{\partial E_z}{\partial z}(\tilde{x},\tilde{y},z_0) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}(\tilde{x},\tilde{y},z_0)\,\Delta z + \cdots \;.
\end{aligned}$$

Wenn wir schließlich das Quadervolumen V gegen Null streben lassen gemäß

$$\left.\begin{matrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{matrix}\right\} \to 0\,, \qquad \begin{matrix}\tilde{x} \to x_0\\ \tilde{y} \to y_0\\ \tilde{z} \to z_0\end{matrix}\;,$$

erhalten wir **exakt** die (lokale) Quelldichte bzw. die Divergenz von $\vec{E}$ für den Raumpunkt $(x_0, y_0, z_0) = \vec{r}_0$:

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}_0) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_{(\mathcal{B})} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\partial E_x}{\partial x}(\vec{r}_0) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(\vec{r}_0) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(\vec{r}_0)$$

oder kurz als Skalarprodukt mit dem Nabla-Operator $\nabla := \vec{e}_x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}$ und nach Austausch von $\vec{r}_0$ durch $\vec{r}$

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = \nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}\;.$$

Weil wir die Divergenz als Quelldichte (Ausflussdichte) eines Vektorfeldes bzw. als räumliche Ableitung (räumlichen Differentialquotienten) des Vektorflusses interpretieren können, muss das Volumenintegral dieser Dichte über einen endlichen Raumbereich den Ausfluss aus diesem Bereich liefern. Diesen Zusammenhang zwischen Volumenintegral und Hüllenintegral bei gegebenem Vektorfeld beschreibt der

Gauß'sche Integralsatz:

Das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes für einen bestimmten Raumbereich $\mathcal{B}$ ist gleich dem Flächenintegral über dieses Vektorfeld auf der geschlossenen Oberfläche (Hülle) von $\mathcal{B}$,

$$\int_{\mathcal{B}} \mathrm{div}\vec{E}\,\mathrm{d}V = \oint_{(\mathcal{B})} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \Phi_{(\mathcal{B})}\big(\vec{E}\,\big)\ .$$

Abschließend drei veranschaulichende Beispiele für den Fluss Φ des Vektorfeldes $\vec{E}(\vec{r}\,)$, falls $\vec{E}(\vec{r}\,)$ die Strömungs- bzw. Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}\,)$ ist.

1. Stationäre laminare Strömung einer homogenen Flüssigkeit in x-Richtung (durch die (y, z)-Ebene):

   In einer homogenen Flüssigkeit ist die Massendichte ϱ räumlich konstant gemäß

   $$\varrho(\vec{r}\,) = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} = const\ .$$

   Ist die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}\,) = (v_x(\vec{r}\,),\ 0,\ 0) = v \cdot \vec{e}_x$ ebenfalls räumlich konstant, dann erhält man für die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}\,)$

   $$j = \frac{\Delta m}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta A \cdot \Delta t} = \varrho \cdot v\ .$$

   Die durch eine gegebenen Fläche $\Delta A = \Delta y \cdot \Delta z$ pro Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsmasse ist der Fluss

   $$\Phi := \frac{\text{Flüssigkeitsmasse}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Flüssigkeitsmasse}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} \cdot \text{Fläche}$$

   bzw.

   $$\Phi = \varrho \cdot v \cdot \Delta A = j \cdot \Delta A = \frac{\Delta m}{\Delta t}\ .$$

2. Stationäre Strömung eines Gases:

   Die Strömung von Gasen ist allgemein nicht laminar. Auch ist die Dichte in strömenden Gasen allgemein nicht räumlich konstant. In diesem Fall gilt für Stromdichte und Fluss

   $$\vec{j}(\vec{r}\,) = \frac{\mathrm{d}m(\vec{r}\,)}{\mathrm{d}V} = \frac{\partial^3 m(x, y, z)}{\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \varrho(\vec{r}\,) \cdot \vec{v}(\vec{r}\,)\ ,$$

   $$\Phi = \iint\limits_{\vec{S}} \varrho(\vec{r}\,) \cdot \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_{A} \varrho(\vec{r}\,) \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}^{\,0} \mathrm{d}A\ .$$

3. Elektrostatisches Feld:

   Geht man von der Modellvorstellung aus, dass das elektrostatische Feld aus Feldquanten besteht, die von elektrischen Ladungen emittiert werden und sich mit Lichtgeschwindigkeit c im Raum ausbreiten, so erhält man für die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r}\,)$ mit der Feldquantendichte $\varrho(\vec{r}\,)$, mit $|\mathrm{d}\vec{S}\,| = \mathrm{d}S = |\vec{n}|\,\mathrm{d}A$ und mit dem Einheitsvektor $\vec{c}^{\,0}$ der Lichtgeschwindigkeit:

   $$\vec{E}(\vec{r}\,) = \vec{j}(\vec{r}\,) = \varrho(x, y, z) \cdot c \cdot \vec{c}^{\,0}\ ,$$

   $$\Phi = \iint\limits_{\vec{S}} \vec{E}(\vec{r}\,) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_{A} \varrho(x, y, z) \cdot c \cdot \vec{c}^{\,0} \cdot \vec{n}^{\,0} \cdot |\vec{n}|\,\mathrm{d}A\ .$$

17 Rotation – Satz von Stokes

Nach Rainer J. Jelitto, studien–text Elektrodynamik, Theoretische Physik 3, 3. Aufl., Aula-Verlag, Wiesbaden, 1994, Seite 26 bis Seite 28.

Wir gehen aus vom Umlauflinienintegral, kurz **Umlaufintegral** oder auch Ringintegral, über ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ längs einer beliebigen (geschlossenen) Jordankurve $\mathcal{C} = (\mathcal{F})$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\; \oint_{(\mathcal{F})} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\; Z_{\mathcal{C}} \; .$$

$Z_{\mathcal{C}}$ heißt **Zirkulation** des Vektorfeldes $\vec{A}$ längs $\mathcal{C}$. Die Zirkulation ist ein Skalar.

Handelt es sich bei dem Vektorfeld um ein Kraftfeld, so ist die Zirkulation gleich der Arbeit, die z. B. eine Punktmasse bei einem Umlauf längs $\mathcal{C}$ verrichtet. Und falls das Vektorfeld das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit ist, beschreibt die Zirkulation das Ausmaß der Wirbel in der Flüssigkeitsströmung.

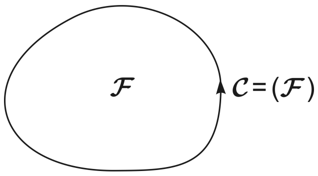


Abb. 15 Die Jordankurve $\mathcal{C}$ umrandet das ebene Flächenstück $\mathcal{F}$.

Wenn wir vereinfachend die in der Abbildung 15 dargestellte ebene Jordankurve $\mathcal{C} = (\mathcal{F})$ betrachten, deren Umlaufsinn eine Rechtsschraube bildet und die ein ebenes, positiv orientiertes Flächenstück $\mathcal{F}$ mit dem Flächeninhalt $F(\mathcal{F})$ und dem Einheitsnormalenvektor $\vec{n}^{\,0}$ umrandet, erhalten wir die Zirkulation pro Flächeneinheit, d. h. die **mittlere Zirkulationsflächendichte** gemäß

$$\frac{1}{F(\mathcal{F})}\, Z_{\mathcal{C}} = \frac{1}{F(\mathcal{F})} \oint_{(\mathcal{F})} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \; .$$

Lassen wir dann die um einen Punkt $\vec{r}_0$ gelegene Fläche $\mathcal{F}$ schrumpfen, wodurch der Flächeninhalt $F(\mathcal{F})$ gegen null strebt, so resultiert für diesen Grenzfall die (**lokale**) **Zirkulationsflächendichte** von $\vec{A}$ im Punkt $\vec{r}_0$ gemäß

$$\lim_{F \to 0} \frac{1}{F} \oint_{(\mathcal{F})} \vec{A}(\vec{r}\,) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{n}^{\,0} \cdot \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}_0) \; . \tag{73}$$

$\vec{n}^{\,0} \cdot \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}_0)$ ist die Normalkomponente des Vektors $\mathrm{rot}\vec{A}$ im Raumpunkt $\vec{r}_0$.

Im Folgenden werden wir das hier eingeführte Vektorfeld $\mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}\,)$, die Rotation von $\vec{A}$, herleiten und seine Bedeutung kennenlernen.

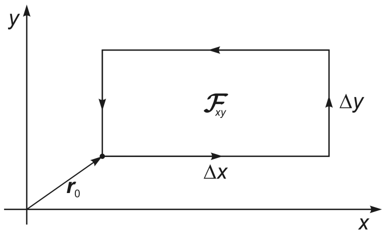


Abb. 16 Die Jordankurve $\mathcal{C}_{xy}$ umrandet das ebene, rechteckige, planparallel zur (x, y)-Ebene gelegene Flächenstück $\mathcal{F}_{xy}$.

Dazu betrachten wir, wieder vereinfacht, das in der Abbildung 16 dargestellte und planparallel zur (x,y)-Ebene gelegene (ebene) rechteckige Flächenstück $\mathcal{F}_{xy} := \Delta x \cdot \Delta y$, dessen eine Ecke im Raumpunkt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ liegt und den Flächeninhalt $F = \Delta x \cdot \Delta y$ besitzt. Der Umlaufsinn seiner Randkurve $\mathcal{C}_{xy} = (\mathcal{F}_{xy})$ sei mathematisch positiv, bilde also wieder eine Rechtsschraube, und der zugehörige Flächennormaleneinheitsvektor ist $\vec{n}^{\,0}_{xy} = \vec{e}_z$. Damit ist die Zirkulation von $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ längs $\mathcal{C}_{xy}$

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathcal{C}_{xy}} &= \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} A_x(x, y_0, z_0)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} A_y(x_0+\Delta x, y, z_0)\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0} A_x(x, y_0+\Delta y, z_0)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0+\Delta y}^{y_0} A_y(x_0, y, z_0)\,\mathrm{d}y \;,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathcal{C}_{xy}} &= \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} \Big[A_y(x_0+\Delta x, y, z_0) - A_y(x_0, y, z_0)\Big]\mathrm{d}y \\
&\quad - \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \Big[A_x(x, y_0+\Delta y, z_0) - A_x(x, y_0, z_0)\Big]\mathrm{d}x \;.
\end{aligned}
$$

Analog zur Herleitung der Divergenz liefert hier die Taylor-Entwicklung (70) der Integranden

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathcal{C}_{xy}} &= \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} \left[\frac{\partial A_y}{\partial x}(x_0, y, z_0)\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}(x_0, y, z_0)\,(\Delta x)^2 + \cdots\right]\mathrm{d}y \\
&\quad - \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} \left[\frac{\partial A_x}{\partial y}(x, y_0, z_0)\,\Delta y + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}(x, y_0, z_0)\,(\Delta y)^2 + \cdots\right]\mathrm{d}x \;.
\end{aligned}
$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (72) schreiben wir dafür

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathcal{C}_{xy}} &= \left[\frac{\partial A_y}{\partial x}(x_0, \tilde{y}, z_0)\,\Delta x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}(x_0, \tilde{y}, z_0)\,(\Delta x)^2 + \cdots\right]\Delta y \\
&\quad - \left[\frac{\partial A_x}{\partial y}(\tilde{x}, y_0, z_0)\,\Delta y + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}(\tilde{x}, y_0, z_0)\,(\Delta y)^2 + \cdots\right]\Delta x \;.
\end{aligned}
$$

Die mittlere Zirkulationsflächendichte von $\vec{A}$ für die Fläche $\mathcal{F}_{xy}$ ist folglich

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{F}\,Z_{\mathcal{C}_{xy}} &= \frac{1}{\Delta x\,\Delta y}\,Z_{\mathcal{C}} \\
&= \left[\frac{\partial A_y}{\partial x}(x_0, \tilde{y}, z_0) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}(x_0, \tilde{y}, z_0)\,\Delta x + \cdots\right] \\
&\quad - \left[\frac{\partial A_x}{\partial y}(\tilde{x}, y_0, z_0) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}(\tilde{x}, y_0, z_0)\,\Delta y + \cdots\right] \;.
\end{aligned}
$$

Wenn wir schließlich den Flächeninhalt $F(\mathcal{F}_{xy})$ gegen Null streben lassen gemäß

$$\left.\begin{matrix}\Delta x\\ \Delta y\end{matrix}\right\} \to 0\,, \qquad \begin{matrix}\tilde{x} \to x_0\\ \tilde{y} \to y_0\end{matrix}\,,$$

erhalten wir **exakt** die (lokale) Zirkulationsflächendichte in $\mathcal{F}_{xy}$ bzw. die skalare z-Komponente der Rotation von $\vec{A}$ für den Raumpunkt $(x_0, y_0, z_0) = \vec{r}_0$:

$$\lim_{F\to 0} \frac{1}{F}\, Z_{\mathcal{C}_{xy}} = \frac{\partial A_y}{\partial x}(\vec{r}_0) - \frac{\partial A_x}{\partial y}(\vec{r}_0) = \vec{e}_z \cdot \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}_0) = \mathrm{rot}_z\vec{A}(\vec{r}_0)\ .$$

Mit den ebenen rechteckigen Flächenstücken $\mathcal{F}_{yz} := \Delta y \cdot \Delta z$ und $\mathcal{F}_{zx} := \Delta z \cdot \Delta y$, die sich an das Flächenstück $\mathcal{F}_{xy}$ anschließen und dessen eine Ecke ebenfalls im Raumpunkt $\vec{r}_0$ liegt, erhalten wir in gleicher Weise sowohl die x-Komponente der Rotation von $\vec{A}$ für den Raumpunkt $\vec{r}_0$ mit

$$\mathrm{rot}_x\vec{A}(\vec{r}_0) = \frac{\partial A_z}{\partial y}(\vec{r}_0) - \frac{\partial A_y}{\partial z}(\vec{r}_0)$$

als auch die y-Komponente der Rotation von $\vec{A}$ für den Raumpunkt $\vec{r}_0$ mit

$$\mathrm{rot}_y\vec{A}(\vec{r}_0) = \frac{\partial A_x}{\partial z}(\vec{r}_0) - \frac{\partial A_z}{\partial x}(\vec{r}_0)\ .$$

Zusammen bilden die drei Komponenten $\mathrm{rot}_x\vec{A}(\vec{r}_0)$, $\mathrm{rot}_y\vec{A}(\vec{r}_0)$ und $\mathrm{rot}_z\vec{A}(\vec{r}_0)$ die **Rotation** des Vektorfeldes $\vec{A}$ im Raumpunkt $\vec{r}_0$:

$$\mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}_0) = \mathrm{rot}_x\vec{A}(\vec{r}_0)\cdot\vec{e}_x + \mathrm{rot}_y\vec{A}(\vec{r}_0)\cdot\vec{e}_y + \mathrm{rot}_z\vec{A}(\vec{r}_0)\cdot\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y}(\vec{r}_0) - \frac{\partial A_y}{\partial z}(\vec{r}_0)\\ \frac{\partial A_x}{\partial z}(\vec{r}_0) - \frac{\partial A_z}{\partial x}(\vec{r}_0)\\ \frac{\partial A_y}{\partial x}(\vec{r}_0) - \frac{\partial A_x}{\partial y}(\vec{r}_0)\end{pmatrix}$$

oder kurz als Vektorprodukt mit dem Nabla-Operator $\nabla := \vec{e}_x\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\cdot\frac{\partial}{\partial z}$ und nach Austausch von $\vec{r}_0$ durch $\vec{r}$

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{A}(\vec{r}\,) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}\,) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix}}\ .$$

Die Rotation ist also ein Vektor, dessen **Betrag** $\left|\mathrm{rot}\vec{A}\right|$ die maximale (lokale) Zirkulationsflächendichte bzw. die **Wirbeldichte** des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ angibt. Das bedeutet, wenn sich der Rotationsvektor $\mathrm{rot}\vec{A}$ auf ein Flächenelement $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}^{\,0}\cdot\mathrm{d}S$ bezieht, dessen Normaleneinheitsvektor parallel zu diesem Rotationsvektor verläuft, ist auch die daraus resultierende Zirkulation maximal:

$$\mathrm{rot}\vec{A} \upuparrows \vec{n}^{\,0} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}^{\,0}\cdot\mathrm{d}S \;=\; \mathrm{Maximum}\Big(\left|\mathrm{rot}\vec{A}\right|\cdot\mathrm{d}S\Big)\ .$$

Weil wir die Rotation als (gerichtete maximale) Zirkulationsflächendichte eines Vektorfeldes interpretieren können, muss das Flächenintegral dieser Flächendichte über ein endliches Flächenstück die Zirkulation des Vektorfeldes längs der Randkurve dieses Flächenstücks liefern. Diesen Zusammenhang zwischen Flächenintegral und Umlauflinienintegral bei gegebenem Vektorfeld beschreibt der

Satz von Stokes:

Das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes für ein bestimmtes Flächenstück $\mathcal{F}$ ist gleich dem Linienintegral (Umlaufintegral) über dieses Vektorfeld längs des geschlossenen Randes von $\mathcal{F}$,

$$\int_{\mathcal{F}} \mathrm{rot}\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \;=\; \int_{\mathcal{F}} \mathrm{rot}\vec{A} \cdot \vec{n}^{\,0} \cdot \mathrm{d}S \;=\; \oint_{(\mathcal{F})} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \;=\; Z_{\mathcal{C}} \,. \tag{74}$$

Es ist intuitiv klar, dass die Zirkulation nur von der Form der geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$ und ihrer Lage im Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ abhängt, was durch die Abbildung 17 veranschaulicht wird.

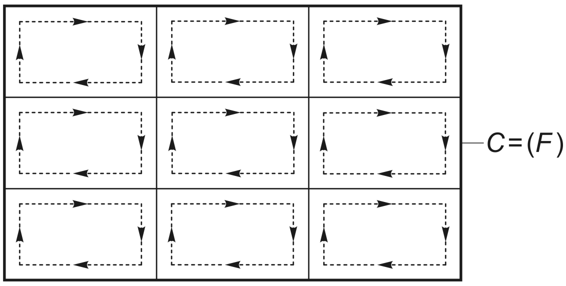


Abb. 17 Eine von $\mathcal{C}$ umrandete *beliebig gekrümmte Fläche* $\mathcal{F}$ werde in infinitesimal kleine Flächenstücke aufgeteilt. Summieren wir die Zirkulationen aller Teilflächenstücke, so heben sich die Integrale längs der gemeinsamen Grenzen der Flächenstücke wegen der entgegengesetzten Integrationsrichtung gegenseitig auf. Es verbleiben nur die Teilintegrale längs $\mathcal{C}$, die in ihrer Summe die Zirkulation der Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ längs $\mathcal{C}$ ergeben.

Wenn aber das Umlaufintegral $\oint_{(\mathcal{F})} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, also die rechte Seite von (74), unabhängig ist von der Gestalt der umrandeten Fläche $\mathcal{F}$, dann gilt dies notwendig auch für die linke Seite der Gleichung (74).

Das Flächenintegral $\int_{\mathcal{F}} \mathrm{rot}\vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ ist also unabhängig von der Gestalt der von $\mathcal{C}$ umrandeten Fläche $\mathcal{F}$.

18 Was sind Differentialgleichungen?

Gleichungen, in denen Ableitungen von Funktionen, die diese Gleichungen erfüllen, auftreten, heißen Differentialgleichungen (Abkürzung Dgl für Differentialgleichung und Dgln für Differentialgleichungen). Eine Dgl zu lösen heißt, die Funktionen zu finden bzw. zu berechnen, welche die Dgl erfüllen. Deshalb nennen wir diese Funktionen Lösungsfunktionen oder kurz Lösungen der Dgl.

Differentialgleichungen werden nach verschiedenen Kriterien klassifiziert. In der folgenden Auflistung zeigen wir die wichtigsten „Klassen“ :

- **gewöhnliche Differentialgleichungen**:

  In gewöhnlichen Dgln sind die Lösungsfunktionen und ihre Ableitungen nur von *einer* unabhängigen Variablen abhängig, z. B.

  $$y'' - a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = c \cdot x \ .$$

  Wenn „nur“ von Differentialgleichungen die Rede ist, sind meistens gewöhnliche Dgln gemeint.

- **partielle Differentialgleichungen**:

  In partiellen Dgln sind die Lösungsfunktionen und ihre (partiellen) Ableitungen von *mehr* als einer unabhängigen Variablen abhängig, z. B.

  $$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = a \cdot xy \ .$$

- **Lineare Differentialgleichungen**

  sind linear in den Lösungsfunktionen und linear in ihren Ableitungen, z. B.

  $$y'' + 2x \cdot y' + y = \cos x \ .$$

- **Lineare Differentialgleichungen** heißen **homogen**, wenn ihre Summanden nur aus den Lösungsfunktionen oder/und ihren Ableitungen mit evl. auch nicht konstanten Koeffizienten gebildet werden, z. B.

  $$y''' + 2y'' - \sin x \cdot y = 0 \ .$$

- **Lineare Differentialgleichungen** heißen **inhomogen**, wenn sie ein sog. **Störglied** $g(x)$ oder auch *const* besitzen, z. B.

  $$y''' + 2y'' - \sin x \cdot y = g(x) \quad \text{oder auch} \quad y''' + 2y'' - \sin x \cdot y = const \ .$$

- **Nichtlineare Differentialgleichungen**

  sind nicht linear in den Lösungsfunktionen oder/und ihren Ableitungen, z. B.

  $$\left(y''\right)^2 + yy' + y^2 = x \ .$$

- Die **Ordnung einer Differentialgleichung** ist gleich der höchsten Ordnung der in ihr vorkommenden Ableitungen der Lösungsfunktionen, z. B.

  $$\text{Dgl 2. Ordnung} \qquad y'' - k \cdot y = \sin x \ .$$

In den folgenden zwei Abschnitten zeigen wir an einfachen Beispielen aus der Physik, wie bedeutend Dgln sind und wie man sie in diesen speziellen Fällen lösen kann.

18.1 Das Zweite Newton'sche Axiom und der Impulsbegriff

Zweites Newton'schen Axiom (Aktionsprinzip):
Die auf einen Körper wirkende Kraft F ist gleich der zeitlichen Änderung seines Impulses p. Umgangssprachlich und stark verkürzt sagt man auch:

„Kraft gleich Masse mal Beschleunigung."

Für die Translation eines Körpers der Masse $m = m(t)$ und mit der Geschwindigkeit $v = v(t)$ gilt:[13]

$$p \propto m \quad \text{und} \quad p \propto v \quad \Rightarrow \quad p(t) = m(t) \cdot v(t) \ ,$$

$$\boxed{F(t) \ = \ \frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} \ = \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m \cdot v) \ = \ \dot{m}v + \dot{v}m \ = \ \dot{p}} \ .$$

Die auf einen Körper wirkende Kraft F kann auch als Impulsstromstärke analog zur elektrischen (Ladungs-)Stromstärke

$$I(t) \ = \ \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \ = \ \dot{q}$$

interpretiert werden. Das Zweite Newton'sche Axiom lautete dann:
Die zeitliche Änderung des Impulses p eines Körpers ist gleich der Stromstärke F des Impulses, der in den Körper hineinfließt oder von ihm abgegeben bzw. übertragen wird.

Unter der Bedingung, dass sich die Masse des Körpers mit der Zeit nicht ändert, also für

$$m(t) = m = const \quad \Rightarrow \quad \dot{m}v = 0 \ ,$$

was auch nichtrelativistisch meistens der Fall ist, gilt mit

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \text{Beschleunigung } a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}$$

die meistens angegebene, spezielle Form des Aktionsprinzips

$$\boxed{F(t) \ = \ m \cdot \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \ = \ m \cdot a(t) \ = \ m\ddot{x}} \ .$$

Durch Äquivalenzumformung erhalten wir daraus die **Bewegungsgleichung**

$$\boxed{\ddot{x} \ = \ \frac{F}{m} \ = \ a} \ ,$$

eine Differentialgleichung, die sich wie folgt klassifizieren lässt:

$$y''(x) \ + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) \ = \ g(x) \qquad \text{inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung mit Lösungen } y(x) \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{x}(t) \ = \ a(t) \qquad \text{inhomogene lineare Dgl 2. Ordnung mit Lösungen } x(t) \ .$$

[13] In der Physik ist es üblich, Ableitungen nach dem Parameter Zeit t durch Punkte über und nicht durch Striche an der differenzierten Größe zu kennzeichnen.

Die Lösungen $x = x(t)$ der Bewegungsgleichung sind also Weg-Zeit-Funktionen.

Lösen wir jetzt die Dgl, d. h. die Bewegungsgleichung, für den einfachsten Fall

$$a(t) \; = \; a \; = \; const :$$

Erste Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t \; &= \; \int a\,\mathrm{d}t \, , \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \widetilde{C}_1 \; &= \; a \cdot t + C_1 \qquad \Big| \; C_1 - \widetilde{C}_1 = v_0 \quad \Rightarrow \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \; = \; v \; = \; \dot{x} \; &= \; a\,t + v_0 \, . \end{aligned}$$

Zweite Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \; &= \; \int (a\,t + v_0)\,\mathrm{d}t \, , \\ x + \widetilde{C}_2 \; &= \; \frac{1}{2} a\,t^2 + v_0 t + C_2 \qquad \Big| \; C_2 - \widetilde{C}_2 = x_0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{x \; = \; x(t) \; = \; \frac{1}{2} a\,t^2 + v_0 t + x_0 \quad \text{für} \quad m = const, \;\; a = const \; \Rightarrow \; F = const} \; .$$

Diese Lösung ist die Weg-Zeit-Funktion im Fall $a = const$ und beschreibt die **gleichförmig beschleunigte Bewegung**. Die Konstanten x_0 und v_0 sind die **Anfangsbedingungen**, die sich aus den Integrationskonstanten ergeben.

Impulsänderung und Kraftstoß

Im einfachsten Fall sind m und F konstant, sodass auch die Beschleunigung a konstant ist und die Geschwindigkeit v linear von t abhängt (s. Abb. 18).

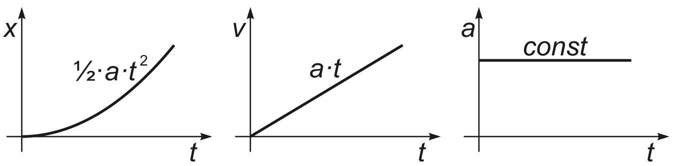


Abb. 18

Dann gilt

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = const \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{m \cdot \Delta v}_{\text{Impulsänderung}} \; = \; \Delta p \; = \; \underbrace{F \cdot \Delta t}_{\text{Kraftstoß}} \; .$$

Im Allgemeinen ist F aber nicht konstant. Es gelte also

$$m = const \;\; \text{und} \;\; F = F(t) \neq const \qquad \Rightarrow \qquad a = a(t) \neq const \, .$$

Daraus erhalten wir mit

$$F(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad m \cdot \mathrm{d}v(t) \ = \ F(t) \cdot \mathrm{d}t$$

durch Integration

$$\int_{v_1}^{v_2} m \cdot \mathrm{d}v \ = \ \int_{t_1}^{t_2} F(t) \cdot \mathrm{d}t \ ,$$

$$m \cdot v \Big|_{v_1}^{v_2} \ = \ mv_2 - mv_1 \ = \ p_2 - p_1 \ = \ \Delta p \ = \ \int_{t_1}^{t_2} F(t) \cdot \mathrm{d}t \ ,$$

$$\text{Impulsänderung} \ = \ \text{Kraftstoß} \ .$$

Für $F = const$ (und $m = const$) liefert die Integration wieder

$$m \cdot \Delta v \ = \ \Delta p \ = \ F \cdot t \Big|_{t_1}^{t_2} \ = \ F \cdot \Delta t \ . \ \Box$$

18.2 Der ungedämpfte harmonische Oszillator (Schwinger)

- Was bedeutet harmonisch?

  Ein akustischer harmonischer Oszillator erzeugt einen „reinen“ Sinuston beispielsweise der Frequenz ω_0 . Die Überlagerung reiner Sinustöne mit Frequenzen $\omega_n = n \cdot \omega_0$, $n \in \mathbb{N}$, wird als harmonisch empfunden.

- **Beispiel** für einen ungedämpften harmonischen Oszillator:

  ideal-elastische Federschwingung (s. Abb. 19)

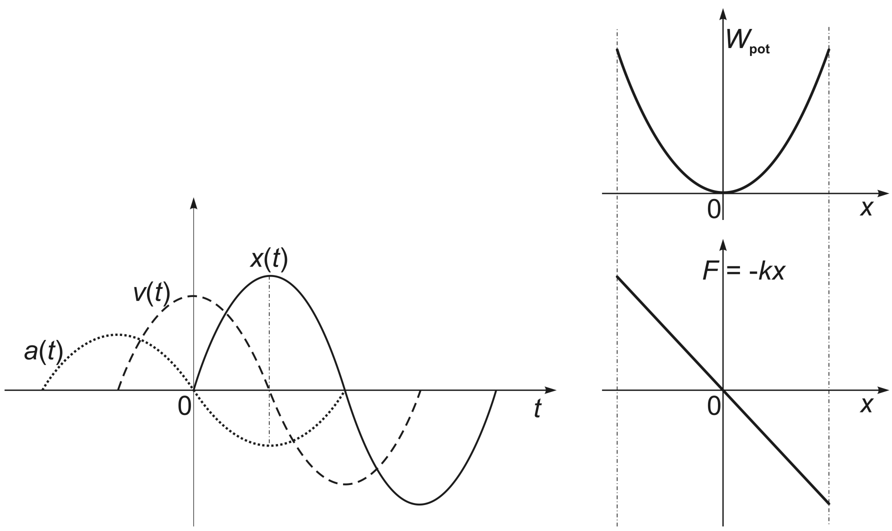


Abb. 19

Die Auslenkung Δx aus der Ruhelage x_0 soll dem **Hook'schen Gesetz** gehorchen, d. h., die Rückstellkraft der Feder soll proportional aber entgegengesetzt gerichtet zur Auslenkung aus der Ruhelage sein:

$$F \ = \ -k \cdot \Delta x \ .$$

Der Proportionalitätsfaktor k ist die (federspezifische) Rückstellkonstante. Setzen wir vereinfachend die Ruhelage $x_0 = 0$, erhalten wir für die Rückstellkraft die Gleichung

$$\boxed{F(x) \;=\; -k \cdot x} \;.$$

Die durch die Auslenkung aus der Ruhelage bedingte, in der Feder steckende potentielle Energie ist dann

$$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}} = -\int_0^x F(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^x -k\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,kx^2\bigg|_0^x \;,$$

$$\boxed{E_{\text{pot}} \;=\; \frac{1}{2}\,kx^2} \;.$$

Wie man sieht, hängt die potenzielle Energie (das „Potenzial") bei harmonischen Schwingungen vom Quadrat der Auslenkung ab, sie beschreibt also eine Parabel entsprechend einer quadratischen Funktion.

Die Rückstellkraft der Feder bewirkt eine Beschleunigung des ausgelenkten Körpers der Masse m in Richtung Ruhelage entsprechend

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0 \;.$$

Für den konstanten Faktor $\frac{k}{m}$ schreiben wir schließlich ω_0^2, was sich später noch als sinnvoll erweisen wird:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x \;=\; 0} \;.$$

Wir haben eine **homogene lineare Dgl 2. Ordnung** erhalten, die den ungedämpften harmonischen Oszillator mathematisch definiert und deren (noch unbekannte) Lösungen die Weg-Zeit-Funktionen $x = x(t)$ des oszillierenden Körpers sind.

- **Lösungsverfahren für homogene lineare Dgln mit konstanten Koeffizienten**

  Lösungsverfahren von Dgln beginnen meistens mit einem „einfallsreichen" Ansatz. Im Fall homogener linearer Dgln mit konstanten Koeffizienten ist dies der sog. **Exponentialansatz**

$$\boxed{x(t) \;=\; \mathrm{e}^{\lambda t}} \;,$$

mit dem wir in die Dgl gehen und so die Bestimmungsgleichung für den Parameter λ erhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} &= 0 \quad \Rightarrow \\
\lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} &= 0 \qquad \Big| \; : \mathrm{e}^{\lambda t} \\
\lambda^2 + \omega_0^2 &= 0 \\
\lambda^2 &= -\omega_0^2 \\
\lambda_\pm &= \pm\sqrt{-\omega_0^2} \;=\; \pm\mathrm{i}\,\omega_0 \qquad \Big| \; \text{mit } \mathrm{i}^2 = -1 \;.
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\lambda_\pm$ bzw. $\pm\mathrm{i}\,\omega_0$ in den Ansatz ergibt

$$x_\pm(t) \;=\; \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega_0 t}$$

und damit schließlich die **allgemeine Lösung** unserer Dgl:

$$\boxed{x(t) \;=\; C_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + C_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\;, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}}\;.$$

Durch Anwendung der Euler'schen Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ können wir die allgemeine Lösung umformen:

$$x(t) = C_1\,\cos(\omega_0 t) + \mathrm{i}C_1\,\sin(\omega_0 t) \;+\; C_2\,\cos(\omega_0 t) - \mathrm{i}C_2\,\sin(\omega_0 t)\;,$$

$$\boxed{x(t) \;=\; (C_1 + C_2)\,\cos(\omega_0 t) + \mathrm{i}(C_1 - C_2)\,\sin(\omega_0 t)}\;. \tag{75}$$

Physikalisch sinnvoll sind aber nur reelle Lösungen $x(t) \in \mathbb{R}$. Bedingung dafür ist bezüglich der unabhängigen Parameter C_1 und C_2

$$C_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + C_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \;=\; C_1^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} + C_2^*\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{C_1 = C_2^* \;=\; a + \mathrm{i}b\;, \quad a, b \in \mathbb{R}}\;.$$

Dies setzen wir in (75) ein:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \big(a + \mathrm{i}b + a - \mathrm{i}b\big)\,\cos(\omega_0 t) \;+\; \mathrm{i}\big(a + \mathrm{i}b - a + \mathrm{i}b\big)\,\sin(\omega_0 t) \\
&= 2a \cdot \cos(\omega_0 t) \;+\; \mathrm{i}\,2\mathrm{i}b \cdot \sin(\omega_0 t) \\
&= \underbrace{2a}_{A} \cdot \cos(\omega_0 t) \;-\; \underbrace{2b}_{B} \cdot \sin(\omega_0 t)\;.
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine **allgemeine reelle Lösung für den ungedämpften harmonischen Oszillator** gefunden:

$$\boxed{x(t) \;=\; A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\;, \qquad A, B \in \mathbb{R}}\;.$$

Jetzt zeigt sich auch, dass ω_0 die Kreisfrequenz unseres Oszillators ist.

- Die unabhängigen reellen Parameter A und B ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. (Spezielle) **Anfangsbedingungen liefern spezielle Lösungen**.

  Fall 1 Anfangsbedingungen: $x(t=0) = x_0\,,\ \ \dot{x}(t=0) = v_0 = 0\,,$

  d. h., der Körper wird um x_0 von der Ruhelage ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen.

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A\cos(0) + B\sin(0) \;=\; A = x_0\ , \\ \dot{x}(t=0) &= -A\omega_0\sin(0) + B\omega_0\cos(0) \;=\; B\,\omega_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0\ , \end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{spezielle Lösung} \qquad x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}\ .$$

  Fall 2 Anfangsbedingungen: $x(t=0) = 0\,,\ \ \dot{x}(t=0) = v_0\,,$

  d. h., der Körper passiert zum Zeitpunkt $t = 0$ die „Ruhelage“ $x_0 = 0 = x(t = 0)$ mit der Geschwindigkeit $\dot{x}(t = 0) = v_0$ (s. Abb. 19).

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A\cos(0) + B\sin(0) \;=\; A = 0\ , \\ \dot{x}(t=0) &= -A\omega_0\sin(0) + B\omega_0\cos(0) \;=\; B\,\omega_0 = v_0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}\ , \end{aligned}$$

$$\boxed{\textbf{spezielle Lösung} \qquad x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}\ .$$

19 Gravitationsfeld

Die Quellen von Gravitations- oder G-Feldern sind Massen. Die Wechselwirkung von Gravitationsfeldern verschiedener Massen hat unmittelbar zur Folge, dass diese Massen einander anziehen. Gravitationsfelder sind also **attraktiv**. Das Feld einer einzelnen Punktmasse (ohne den Einfluss anderer Massen) ist kugel- bzw. zentralsymmetrisch. Das **Newton'sche Gravitationsgesetz**

$$\boxed{F(r) \;=\; -\,G\,\frac{M\cdot m}{r^2}}$$

beschreibt die **Kraft** $F = |\vec{\boldsymbol{F}}|$, die auf eine Punktmasse m im Gravitationsfeld einer Punktmasse M wirkt, wenn r der Abstand zwischen den beiden Punktmassen ist. Man nennt diese Kraft **Gravitationskraft**. Der Proportinalitätsfaktor G ist die Gravitationskonstante. Mit dem Minuszeichen vor dem G wird der attraktiven Wirkung von Massen Rechnung getragen.

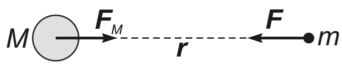


Abb. 20

Vektoriell betrachtet gilt, dass die beiden Punktmassen M und m einander anziehen mit der betragsgleichen aber entgegengesetzt gerichteten Gravitationskraft

$$|\vec{\boldsymbol{F}}| = |\vec{\boldsymbol{F}}_M|\,, \quad \vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{F}}_M\ .$$

Ändert die Punktmasse m ihren Abstand zur Punktmasse M von r_1 nach r_2, so ändert sich die **potentielle Energie** von m gemäß

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\text{pot}} &= -\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r \\
&= -\int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= GMm\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r \;=\; GMm\int_{r_1}^{r_2} r^{-2}\,\mathrm{d}r \;=\; GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}\ ,
\end{aligned}$$

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\frac{GMm}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2}\ , \quad \text{d. h.}$$

$$\left.\begin{aligned} r_2 > r_1 \quad &\Rightarrow \quad \Delta E_{\text{pot}} > 0 \\ r_2 < r_1 \quad &\Rightarrow \quad \Delta E_{\text{pot}} < 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{pot}} \text{ von } m \text{ wächst mit } r\ .$$

Für das Potential Φ_G des Gravitationsfeldes von M gilt die Konvention

$$\lim_{r_1\to\infty}\frac{\Delta E_{\text{pot}}}{m}\bigg|_{r_1}^{r_2} = -\frac{GM}{r}\bigg|_{r_1\to\infty}^{r_2} = -\frac{GM}{r_2} = \Phi_G(r_2)$$

und mit der Umbenennung $r_2 \longrightarrow r$

$$\boxed{\Phi_G(r) \;=\; -\frac{GM}{r} \;\leq\; 0} \;.$$

Das **Gravitationspotential** einer Punktmasse ist also stets **negativ** mit den Grenzwerten

$$\boxed{\lim_{r\to 0} \Phi_G(r) \;=\; -\infty \;, \qquad\qquad \lim_{r\to\infty} \Phi_G(r) \;=\; 0} \;.$$

20 Elektrisches Feld

Die Quellen von elektrischen- oder E-Feldern sind elektrische Ladungen. Es gibt positive und negative elektrische Ladungen. Positronen sind Elementarteilchen, die jeweils eine positive elektrische Elementarladung besitzen und Elektronen sind Elementarteilchen mit jeweils einer negativen elektrischen Elementarladung. Die Wechselwirkung von E-Feldern gleichnamiger Ladungen hat unmittelbar zur Folge, dass diese einander abstoßen. Ungleichnamige elektrischen Ladungen jedoch ziehen sich an. E-Felder **gleichnamiger** elektrischer Ladungen sind also **repulsiv**. Das Feld einer einzelnen elektrischen Punktladung (ohne den Einfluss anderer elektrischer Ladungen) ist kugel- bzw. zentralsymmetrisch. Das **Coulomb'sche Gesetz**

$$\boxed{F(r) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q\cdot q}{r^2}}$$

beschreibt die **Kraft** $F = |\vec{\boldsymbol{F}}|$, die auf eine positive Punktladung q im E-Feld einer (gleichnamigen) positiven Punktladung Q wirkt, wenn r der Abstand zwischen den beiden elektrischen Punktladungen ist. Man nennt diese Kraft auch **Coulomb-Kraft.** ε_0 ist die elektrische Feldkonstante für das Vakuum bzw. die Dielektrizitätskonstante.

Negative Ladungen werden mit einem Minuszeichen versehen. Wenn also die beiden Ladungen im Coulomb'schen Gesetz nicht gleichnamig sind, resultiert analog zum Newton'schen Gravitationsgesetz ein Minuszeichen vor der rechten Gleichungsseite, wodurch berücksichtigt wird, dass ungleichnamige elektrische Ladungen einander anziehen.

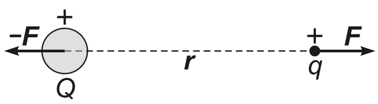


Abb. 21

Ändert die Punktladung q ihren Abstand zur Punktladung Q von r_1 nach r_2, so ändert sich die **potentielle Energie** von q gemäß

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\text{pot}} &= -\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r \\
&= -\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq}{r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r \;=\; -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} r^{-2}\,\mathrm{d}r \;=\; -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}\,,
\end{aligned}$$

$$\Delta E_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2}\,,\quad \text{d. h.}$$

$$\left.\begin{array}{lll} r_2 > r_1 & \Rightarrow & \Delta E_{\text{pot}} < 0 \\ r_2 < r_1 & \Rightarrow & \Delta E_{\text{pot}} > 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{pot}} \text{ von } q \text{ nimmt ab mit wachsendem } r\,.$$

Die zugehörige elektrische Potentialdifferenz $\Delta\Phi$ im E-Feld der positiven Punktladung Q ist analog zum G-Feld

$$\Delta\Phi \;=\; \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{q} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2} .$$

Für das Potential Φ des elektrischen Feldes von Q gilt die Konvention

$$\lim_{r_1\to\infty}\frac{\Delta E_{\text{pot}}}{q}\Bigg|_{r_1}^{r_2} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}\Bigg|_{r_1\to\infty}^{r_2} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r_2} \;=\; \Phi(r_2)$$

und mit der Umbenennung $r_2 \longrightarrow r$

$$\boxed{\Phi(r) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r} \;\geq\; 0} .$$

Das **elektrische Potential** einer **positiven Punktladung** ist also stets **positiv** mit den Grenzwerten

$$\boxed{\lim_{r\to 0}\Phi(r) \;=\; \infty\,, \qquad\qquad \lim_{r\to\infty}\Phi(r) \;=\; 0} .$$

Das Potential des elektrischen Feldes einer (negativen) Punktladung $-Q$ ist folglich stets negativ.

Wir stellen fest:
Die Potentiale $\Phi(r)$ des zentralsymmetrischen E-Feldes einer *positiven* Punktladung Q bilden ein skalares Feld. Das Potential $\Phi(r)$ ist gleich der potentiellen Energie, die eine aus dem Unendlichen zum Abstand r verschobene *positive* Probeladung q besitzt, dividiert durch die Probeladung q . Weil sich die Probeladung q herauskürzt, hängt das Potential nicht von der Probeladung ab.

Die elektrische Feldstärke $E(r)$ des elektrischen Feldes der Punktladung Q ist

Coulomb-Kraft pro Probeladung $\quad\Rightarrow$

$$\boxed{E(r) \;=\; \frac{F(r)}{q} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}}$$

und mit dem Operator „grad" (Gradient) der Vektoranalysis gilt die Konvention

$$\vec{\boldsymbol{E}}\big(\vec{\boldsymbol{r}}\big) \;:=\; -\operatorname{grad}\Phi\big(\vec{\boldsymbol{r}}\big) \;=\; -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,z) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} E_x\big(\vec{\boldsymbol{r}}\big) \\ E_y\big(\vec{\boldsymbol{r}}\big) \\ E_z\big(\vec{\boldsymbol{r}}\big) \end{pmatrix} .$$

Weil das E-Feld der Punktladung Q zentralsymmetrisch ist, hängen das Potential und damit auch die elektrische Feldstärke nur von der Kugelkoordinate r ab, sodass der Gradient in diesem speziellen Fall die einfache Form

$$\mathrm{grad}_r \;:=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$$

annimmt und wir die elektrische Feldstärke durch einfache Differentiation des Potentials $\varPhi(r)$ nach r berechnen können:

$$\begin{aligned} E(r) &= -\,\mathrm{grad}_r\,\varPhi \;=\; -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\varPhi(r) \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}\right) \;=\; -\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\right)\;, \\ E(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}\;.\;\Box \end{aligned}$$

Wie man sieht, erhält man das Potential des elektrischen Feldes durch Integration aus der elektrischen Feldstärke und umgekehrt die elektrische Feldstärke durch Differentiation aus dem Potential. Dabei ist auf die Vorzeichenkonvention zu achten. Wenn vor dem Gradienten ein Minuszeichen steht, muss in der Umkehrung auch vor dem Integral ein Minuszeichen stehen.

Hinweis!
Die elektrische Spannung U zwischen zwei Punkten im E-Feld einer Punktladung Q, z. B. Punkt a im Abstand r_1 von Q und Punkt b im Abstand r_2 von Q, ist die negative Potentialdifferenz zwischen den beiden Punkten, d. h. die elektrische Arbeit, die eine Probeladung auf dem Weg von a nach b verrichten würde:

$$U_{ab} \;:=\; -\Delta\varPhi_{ab} = -\Big[\varPhi(b) - \varPhi(a)\Big] = \varPhi(a) - \varPhi(b)\;.$$

Die elektrische Spannung ist wie die Potentialdifferenz abhängig vom E-Feld der Ladung Q und den beiden Bezugspunkten a und b, aber unabhängig von irgendeiner Probeladung.